Digitized by Google

Inf. tab. IV. 67 68.

Digitized by Google

2698
Jc. 8. 2bis J. 1172

Diophante

Digitized by Google

Colleg. Lugd. SS. Trin. Societ. Jesu Cat. insc. 1691.

107472

EX BIBLIOTH PUB COLLEG LUGDUN

LYON

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Tolosani.*

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

DE LA VILLE DE LYON

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.

M. DC. LXX.

Digitized by Google

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accedit Doctrinæ Analyticæ inventum nouum, collectum
ex variis eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

Digitized by Google

ILLVSTRISSIMO VIRO D.

D. IOANNI BAPTISTÆ COLBERTO,

REGI AB INTIMIS CONSILIIS ET A SECRETIS,

Ærarij Censori generali,

SVMMO REGIORVM ÆDIFICIORVM, NAVIGATIONIS ET COMMERCII PRÆFECTO,

Regni Administro, &c.

PRODIT in lucem tuis auspicijs, Vir Illustrissime, Diophantus varijs auctus parentis mei obseruationibus; Illas mole quidem exiguas, sed pondere, ni fallor, maiores, quæ tua est summa humanitas, forsitan non aspernaberis, præsertim cum ad numeros pertineant qui radicis instar ac velut in centro Matheseos positi, diffunduntur in omnes illius circuli partes. Cur enim Geometria, & quidquidei affine est, alium quam te

ambiat Patronum, qui terrarum orbem animo metiris, vt in extremis Regionibus in quibus olim emoriens natura defeciſſe videbatur, præclara Regis maximi facta celebrentur, & Barbarorum pectora liberalibus imbuta diſciplinis miteſcant. Cum vero illas ferè omnes aut earum ſemina Mathesis contineat, menti imperio natæ & membris famulitio aptis opitulatur, paciſque ac belli temporibus idonea, non tantum Regijs ædibus magnificè extruendis, ſed etiam vrbibus tutò propugnandis vtilem ſe præbet. Huius doctrinæ non immeritò captus illecebris Parens meus, quem adhuc lugeo, illam ſuccisiuis horis in medio forensium negotiorum ſtrepitu, abſque vllo tamen Iuriſprudentiæ, & Senatorij muneris diſpendio non infeliciter excoluit. An autem hæ, quas tibi, Vir Illuſtriſsime, offero lucubrationes, pondere, vt dixi, majores sint quam mole, si ſatis otij ſuppeteret, tu facillimè iudicares, qui Lynceâ ſagacitate in abdita quæque penetrans, veritatem ab errore non minus quam veram virtutem à fucatâ ſecernis, & eorum qui operam nauant ærario puras manus æquè dignoſcis, ac puritatem auri ſe probare poſſe Matheſeos quondam ille genius Archimedes celeberrimo circa coronam Hieronis experimento demonſtrauit. Sed te aliò vocant multa magnaque, in quibus ità verſaris, vt te pluribus parem, & adhuc majoribus dignum oſtendens, inuicti Principis famam, illiuſque ſubditorum leuamen, tibi laborum metam proponas. Id abunde teſtantur commercij reparatæ, & Piratarum repreſſæ vires qui Herculem Gallicum Herculeas columnas tranſeuntem & vtrumque mare committentem vident è latebris tanquam è Caci ſpeluncâ & pertimeſcunt; idem quoque teſtantur portus bellicis inſtructi nauibus quæ peregrinis non indigent armamentis, & hoſtibus terrorem incutiunt vt pateat qui mari potitur, eum rerum potiri; teſtantur denique hinc reſtauratæ tuis curis Artes, nobilique conſortio, vt egregiorum æmulatione opificum certatim augeri ac perfici poſsint, tuâ induſtriâ ſociatæ, illinc ſcientiarum arcana in tuis ipsis penatibus mirum in modum illuſtrata. Quæ ſatis fidem faciunt quantum tibi cordi ſit non ſolum vt Regni, ſed etiam vt Reipublicæ litterariæ fines

Digitized by Google

promoueantur & vt quidquid ex nouo illius orbe aduehitur, aspirante tui fauoris aurâ obliuionis & inuidiæ scopulos vitare possit; nunquam illos metuet hoc tui nominis præsidio munitum opus, si benignâ manu, vt enixè rogo, suscipias istud æterni monumentum obsequij, quod tibi voveo,

Addictissimus S. FERMAT.

Inf. tab IV. ~~ff~~ 68.

Digitized by Google

2698
Sc. B 2 f. 1173

Diophante

Colleg. Lugd. SS. Trin. Societ. Jesu Cat. insc. 1691.

107472

EX BIBLIOTH PUB COLLEG LUGDUN

LYON

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obſeruationibus D. P. de FERMAT *Senatoris Toloſani.*

Acceſſit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiuſdem D. de FERMAT Epiſtolis.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE DE LYON

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Ieſu.

M. DC. LXX.

ILLVSTRISSIMO VIRO D.

D. IOANNI BAPTISTÆ COLBERTO,

REGI AB INTIMIS CONSILIIS ET A SECRETIS,

Ærarij Censori generali,

SVMMO REGIORVM ÆDIFICIORVM, NAVIGATIONIS ET COMMERCII PRÆFECTO,

Regni Administro, &c.

LYON

RODIT in lucem tuis auspicijs, Vir Illustrissime, Diophantus variis auctus parentis mei obseruationibus; Illas mole quidem exiguas, sed pondere, ni fallor, maiores, quæ tua est summa humanitas, forsitan non aspernaberis, præsertim cum ad numeros pertineant qui radicis instar ac velut in centro Matheseos positi, diffunduntur in omnes illius circuli partes. Cur enim Geometria, & quidquid ei affine est, alium quam te

ambiat Patronum, qui terrarum orbem animo metiris, vt in extremis Regionibus in quibus olim emoriens natura defeciſſe videbatur, præclara Regis maximi facta celebrentur, & Barbarorum pectora liberalibus imbuta diſciplinis miteſcant. Cum vero illas ferè omnes aut earum ſemina Mathesis contineat, menti imperio natæ & membris famulitio aptis opitulatur, paciſque ac belli temporibus idonea, non tantum Regijs ædibus magnificè extruendis, ſed etiam vrbibus tutò propugnandis vtilem ſe præbet. Huius doctrinæ non immeritò captus illecebris Parens meus, quem adhuc lugeo, illam ſuccisiuis horis in medio forensium negotiorum ſtrepitu, abſque vllo tamen Iuriſprudentiæ, & Senatorij muneris diſpendio non infeliciter excoluit. An autem hæ, quas tibi, Vir Illuſtriſsime, offero lucubrationes, pondere, vt dixi, majores sint quam mole, si ſatis otij ſuppeteret, tu facillimè iudicares, qui Lynceâ ſagacitate in abdita quæque penetrans, veritatem ab errore non minus quam veram virtutem à fucatâ ſecernis, & eorum qui operam nauant ærario puras manus æquè dignoſcis, ac puritatem auri ſe probare poſſe Matheſeos quondam ille genius Archimedes celeberrimo circa coronam Hieronis experimento demonſtrauit. Sed te aliò vocant multa magnaque, in quibus ita verſaris, vt te pluribus parem, & adhuc majoribus dignum oſtendens, inuicti Principis famam, illiuſque ſubditorum leuamen, tibi laborum metam proponas. Id abunde teſtantur commercij reparatæ, & Piratarum repreſſæ vires qui Herculem Gallicum Herculeas columnas tranſeuntem & vtrumque mare committentem vident è latebris tanquam è Caci ſpeluncâ & pertimeſcunt; idem quoque teſtantur portus bellicis inſtructi nauibus quæ peregrinis non indigent armamentis, & hoſtibus terrorem incutiunt vt pateat qui mari potitur, eum rerum potiri; teſtantur denique hinc reſtauratæ tuis curis Artes, nobilique conſortio, vt egregiorum æmulatione opificum certatim augeri ac perfici poſsint, tuâ induſtriâ ſociatæ, illinc ſcientiarum arcana in tuis ipsis penatibus mirum in modum illuſtrata. Quæ ſatis fidem faciunt quantum tibi cordi ſit non ſolum vt Regni, ſed etiam vt Reipublicæ litterariæ fines

promoueantur & vt quidquid ex nouo illius orbe aduehitur, aspirante tui fauoris aurâ obliuionis & inuidiæ scopulos vitare possit ; nunquam illos metuet hoc tui nominis præsidio munitum opus, si benignâ manu, vt enixè rogo, suscipias istud æterni monumentum obsequij, quod tibi voveo,

Addictissimus S. FERMAT.

Lectori Beneuolo.

DIOPHANTVM hîc habes, & varias quibus auctus est obseruationes, paucas illas quidem & breues, non tamen contemnendas; nec enim me latet hujusmodi opera ponderari potius quam numerari à peritis æstimatoribus, quibus vnica demonstratio, imò interdum vnicum Problema magni voluminis instar est; in Mathematicis nimirum disciplinis, noua Laconico licet more exhibita veritas pluris fieri solet, quam verbosa quorumdam tautologia; Doctis tantum quibus pauca sufficiunt, harum obseruationum auctor scribebat, vel potius ipse sibi scribens, his studijs exerceri malebat quam gloriari; adeo autem ille ab omni ostentatione alienus erat, vt nec lucubrationes suas typis mandari curauerit, & suorum quandoque responsorum autographa nullo seruato exemplari petentibus vltrò miserit; norunt scilicet plerique celeberrimorum huius sæculi Geometrarum, quam libenter ille & quantâ humanitate, sua ijs inuenta patefecerit; Quamobrem superstites quosdam Ipsius amicos, sæpe hortatus sum sæpiusque hortabor, vt si quos illius ingenij partus blandâ manu susceperint, illos in musæi vmbrâ diutius delitescere non patiantur; dum autem plura quæ breui, vt spero, prodibunt, colligo, tibi non iniucundam fore duxi, nouam horum Diophanti operum, istarumque simul obseruationum editionem: Illas Parens meus quasi aliud agens & ad altiora festinans margini variis in locis apposuit, præsertim ad quatuor vltimos libros; cum enim ardua sectaretur ille, faciliora & vulgo Logistarum nota quæ duobus primis libris continentur, aut vt ipsius Diophanti verbis vtar, τὰ ἐν ἀρχῇ στοιχειωδῶς ἔχοντα ferè omnino prætermisit; Qualis autem Quantusque in Arithmeticis fuerit Diophantus, sat sciunt qui primis, vt dicitur, labris puram Logisticam gustauerunt; tredecim ille scripserat Arithmeticorum libros, quorum sex tantum extant, vnusque de numeris multangulis, reliqui vel temporis iniuriâ perierunt, aut alicubi forsan Thesauri instar ita seruantur, vt nullius videantur esse, dum publici juris fieri non possunt; meminit Diophanti Suidas in voce Hypathia & Lucillius libro secundo Anthologiæ capite vigesimo secundo Diophanti Astrologi recordatur; an vero Suidas & Lucillius de hoc eodemque loquantur, nihil comperti habemus; eum multi circa Neronis tempora vixisse putant, nec deest qui Antonino pio imperante eum floruisse leuibus fretus coniecturis suspicetur; illud audacter asserere licet, hoc Auctore nullum antiquiorem hactenus innotuisse, qui hanc instauraverit doctrinam, quam à Græcis acceptam Arabes cum ipso Algebræ nomine ad

nos transmisisse existimantur ; eximia vero Problemata quæ hoc opus complectitur, adeo humanæ mentis captum videntur superare, vt ad eorum explanationem indefesso Xylandri labore & miranda Bacheti sagacitate opus fuerit, duo illi fuere doctissimi horum librorum interpretes, nam vix eo nomine dignus est Græcus Scholiastes ; Bombellius verò in Algebra quam Italico sermone vulgauit, Diophanti quæstionibus suas permiscens, fidi interpretis partes non sustinuit ; neque eo functus est munere subtilissimus Vieta qui peragrans auia Logisticæ loca, nec alterius inhærens vestigiis, sua maluit in lucem proferre inuenta quam facem præferre Diophantæis ; quantum autem Analyticam vltra veteres terminos promouerit Parens meus, tuum erit, Erudite Lector, judicium ; vtinam ipsius cœptis non obstitissent angustiæ temporis, & plura parantem mors heu nimium immatura nobis illum non præripuisset ! plura procul dubio ex eodem fonte manassent, nec suis quædam istorum problematum demonstrationibus carerent ; quin vero ipse eas penes se, & in scrinio, vt ita loquar, pectoris habuerit, tum aliæ lucubrationes, tum illius animi candor & modestia dubitare non sinunt ; licet autem à tot tantisque viris laudatus Parens, à liberis absque inuidia laudari possit, nec illud ingenti luctui solatium, vel potius irritamentum denegari debeat, magis tamen libenter, ni fallor, illius encomium perleges quod in diario Doctorum elegantissimo, & in plerisque clarissimorum scriptorum libris occurrit ; horum nonnulli magnificè jamdudum mentionem fecere variorum ipsius operum, quæ licet inedita non tamen latuerunt, vt abundè testantur quædam excerpta quæ adjicere non piget, & doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs illius epistolis à R. P. Iacobo de Billy Societatis Iesu Sacerdote, cuius perspicacissimum ingenium & eruditio commendatione non egent, cum in ipsius operibus satis eluceant ; cæterum quidquid in hoc erratum fuerit, id Typographorum incuriæ tribuas, & æqui bonique consulas quæso. VALE.

ELOGE DE MONSIEVR DE FERMAT, *Conſeiller au Parlement de Toloſe.*

Du Iournal des Sçauans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy auec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conſeiller au Parlement de Toloſe. C'eſtoit vn des plus beaux eſprits de ce ſiecle, & vn genie ſi vniuerſel & d'vne eſtenduë ſi vaſte, que ſi tous les ſçauans n'auoient rendu témoignage de ſon merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choſes qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ſes loüanges.

Il auoit toûjours entretenu vne correſpondance tres particuliere auec Meſſieurs Descartes, Toricelli, Paſcal, Frenicle, Roberual, Hugens, &c. & auec la plus part des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il auoit lié vne amitié ſi etroite auec M. de Carcaui, pendant qu'ils eſtoient confreres dans le Parlement de Toloſe, que comme il a eſté le confident de ſes eſtudes, il eſt encore aujourd'huy le depoſitaire de tous ſes beaux eſcrits.

Mais parce que ce Iournal eſt principalement pour faire connoître par leurs ouurages les perſonnes qui ſe ſont renduës celebres dans la republique des lettres; on ſe contentera de donner icy le catalogue des eſcrits de ce grand homme; laiſſant aux autres le ſoin de luy faire vn éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la ſçience des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy vne methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Vne autre *de maximis & minimis*, qui ſert non ſeulement à la determination des problemes plans & ſolides; mais encore à l'inuention des touchantes & des lignes courbes, des centres de grauité des ſolides, & aux queſtions numeriques.

Vne introduction aux lieux, plans & ſolides; qui eſt vn traité analytique concernant la ſolution des problemes plans & ſolides; qui auoit eſté veu deuant que M. Descartes eut rien publié ſur ce ſujet.

Vn traité *de contactibus ſphæricis*, où il a demonſtré dans les ſolides ce que M. Viet Maiſtre des Requeſtes, n'auoit demonſtré que dans les plans.

Vn autre traité dans lequel il reſtablit & demonſtre les deux liures d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et vne methode generale pour la dimenſion des lignes courbes, &c.

De plus, comme il auoit vne connoiſſance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il eſtoit conſulté de toutes parts ſur les difficultez qui ſe preſentoient; il a éclaircy vne infinité de lieux obſcurs qui ſe rencontrent dans les anciens. On

a imprimé depuis peu quelques-vnes de ſes obſeruations ſur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Caſtelli de la meſure des eaux courantes, en a inſeré dans ſon ouurage vne tres-belle ſur vne Epiſtre de Syneſius, qui eſtoit ſi difficile, que le pere Petau qui a commenté cét autheur, a aduoüé qu'il ne l'auoit pû entendre. Il a encore fait beaucoup d'obſeruations ſur le Theon de Smirne & ſur d'autres Autheurs anciens. Mais la pluſpart ne ſe trouueront qu'éparſes dans ſes Epitres; parce qu'il n'eſcriuoit gueres ſur ces ſortes de ſujets, que pour ſatisfaire à la curioſité de ſes amis.

Tous ces ouurages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuſes de l'antiquité, n'empeſchoient pas que M. de Fermat ne fit ſa charge auec beaucoup d'aſſiduité, & auec tant de ſuffiſance, qu'il a paſſé pour vn des plus grands Iuriſconſultes de ſon temps.

Mais ce qui eſt de plus ſurprenant, c'eſt qu'auec toute la force d'eſprit qui eſtoit neceſſaire pour ſoûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il auoit encore vne ſi grande delicateſſe d'eſprit, qu'il faiſoit des vers Latins, François & Eſpagnols auec la meſme elegance, que s'il eût veſcu du temps d'Auguſte, & qu'il eût paſſé la plus grande partie de ſa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

On parlera plus particulierement des ouurages de ce grand homme, lors qu'on aura recouuert ce qui en a eſté publié, & qu'on aura obtenu de M. ſon fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore eſté.

OBSERVATION DE MONSIEVR DE FERMAT ſur Syneſius, rapportée à la fin de la traduction du liure de la meſure des eaux courantes, de Benedetto Caſtelli.

LES pages qui reſtent vuides dans ce cayer m'ont donné la penſée de les remplir de la belle obſeruation que j'ay appriſe ces iours paſſez, de l'incomparable Monſieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me ſouffrir ſouuent dans ſa conuerſation. C'eſt ſur la quinziéme Lettre de Syneſius Eueſque de Cyrene, qui traite d'vne matiere qui n'a eſté entenduë par aucun des interpretes, non pas meſmes par le ſçauant Pere Petau, ainſi qu'il l'aduoüe luy-meſme dans les Notes qu'il a faites ſur cét Autheur; Et ie donne dautant plus volontiers cette obſeruation, qu'elle a beaucoup de rapport auec les traitez qui ſont cy-deuant.

Cét Eueſque eſcrit à la ſçauante Hypatia, qui eſtoit la merueille de ſon ſiecle, & laquelle enſeignoit publiquement la Philoſophie, auec l'admiration de tous les ſçauans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. I'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Ie me trouue ſi mal, que i'ay beſoin d'vn hydroſcope. Ie vous prie d'en faire faire vn de cuiure, & de me l'acheter. C'eſt vn tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'vne fleute; ſur ſa longueur il porte vne ligne droite, qui eſt coupée en trauers par de petites lignes, par leſquelles nous iugeons du poids des eaux. L'vn des bouts eſt couuert d'vn cone, qui eſt poſé également deſſus, en telle ſorte que le tuyau & le cone ont vne meſme baſe. L'on appelle cét inſtrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aiſe-

ment compter les sections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoit le poids de l'eau.

Comme nous auons perdu la figure & l'vsage de cét instrument, de mesme qu'vne infinité d'autres belles choses, que les Anciens auoient inuentées, & dont ils se seruoient, les sçauans de ce temps icy se sont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel estoit cét instrument dont parle Synesius. Il y en a qui ont crû que c'estoit vne Clepsydre, mais le Pere Petau a rejetté auec raison cette opinion. Pour luy, il aduoüe, qu'il ne le comprend pas; il soupçonne pourtant que c'estoit vn instrument qui seruoit à niueler les eaux, & qui auoit du rapport auec celuy dont Vitruue fait mention au liure 8. ch. 6. de son Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il est aisé de juger par la lecture de Vitruue, & de Synesius; que ce sont deux instrumens fort differens, & en figure, & en vsage; & que si tous deux ont des sections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates sont perpendiculaires sur l'horizon, & celles de l'hydroscope luy sont paralleles. Ie passe tous silence plusieurs autres differences, que ie pourrois remarquer, pour rapporter le sentiment de Monsieur de Fermat, qui est sans doute le veritable sens de Synesius. Cét instrument seruoit pour examiner le poids des differentes eaux pour l'vsage des malades; car les Medecins sont d'accord que les plus legeres sont les meilleures; le terme ῥοπὴ, dont se sert Synesius le monstre clairement. Il ne signifie pas icy *libramentum* le niuelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Machines, il signifie le poids, que les Latins appellent *momentum*, & de là le traitté des equiponderans d'Archimede a pour titre ἰσορροπικῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouuoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, a cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inuenterent sur les principes du traité d'Archimede *de his quæ vehuntur in aqua*, celuy dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mesmes, la difference du poids qu'elles ont entre-elles, la figure en est telle; A F est vn Cylindre de cuiure A B est le bout d'en haut, qui est toûjours ouuert, E F est le bout d'embas, qui est couuert du cone E I F, qui a la mesme base que le bout d'embas; A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diuerses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empeschera; mais il y enfoncera iusques à vne certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diuersement, suiuant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrer, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'vsage de cét instrument, & la raison de cét vsage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archeuesque de Tolose, ayant enuoyé cette explication au Pere Petau, il aduoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui auoit compris quel estoit l'instrument, & il auoit écrit que dans vne seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, i'ay crû que le Lecteur sçauant & curieux ne sera pas marry que ie luy en aye fait part.

LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monſieur Deſcartes.

MONSIEVR,

Ie n'ay pas eu moins de joye de recevoir la Lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre voſtre amitié, que ſi elle me venoit de la part d'vne Maiſtreſſe, dont j'aurois paſſionnement deſiré les bonnes graces. Et vos autres eſcrits qui ont precedé me font ſouvenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit recevoir perſonne pour ſeruiteur, qui ne ſe fut auparauant éprouué contre elle au combat. Ce n'eſt pas toutesfois que ie pretende me comparer à ce Roger, qui eſtois ſeul au monde capable de luy reſiſter; mais tel que ie ſuis, ie vous aſſeure que i'honnore extremement voſtre merite. Et voyant la derniere façon dont vous vſez pour trouuer les tangentes des lignes courbes, ie n'ay autre choſe à y répondre, ſinon qu'elle eſt tres bonne, & que ſi vous l'euſſiez expliqué au commancement en cette façon ie n'y euſſe point du tout contredit, &c.

AVTRE LETTRE DE MONSIEVR DESCARTES A MONSIEVR DE FERMAT,

pag. 348. tom. 3. des Lettres de Monſieur Deſcartes.

MONSIEVR,

Ie ſçay bien que mon approbation n'eſt point neceſſaire, pour vous faire connoiſtre quelle opinion vous devez auoir de vous meſme, mais ſi elle y peut contribuer quelque choſe, ainſi que vous me faites l'honneur de m'eſcrire, ie penſe eſtre obligé de vous auouer icy franchement, que ie n'ay jamais connu perſonne, qui m'ait fait paroiſtre qu'il ſçeut tant que vous en Geometrie. La tangente de la ligne courbe, que décrit le mouuement d'vne roulette, qui eſt la derniere choſe que le Reuerend Pere Merſenne a pris la peine de me communiquer de voſtre part, en eſt vne preuue tres aſſeurée; car dautant qu'elle ſemble dependre du rapport qui eſt entre vne ligne droite & vne circulaire, il n'eſt pas aiſé d'y appliquer les regles qui ſeruent aux autres; & Monſieur de Robernal qui l'auoit propoſée, qui eſt ſans doute auſſi l'vn des premiers Geometres de noſtre ſiecle, confeſſoit ne la ſçauoir pas, & meſme ne connoiſtre aucun moyen pour y paruenir. Il eſt vray que depuis il a dit auſſi qu'il l'auoit trouuée, mais ç'a eſté juſtement le lendemain apres auoir ſçeu que vous & moy luy enuoyions; & vne marque certaine qu'il ſe mécontoit, eſt, qu'il diſoit auoir trouué en meſme temps que voſtre conſtruction eſtoit fauſſe, lors que la baſe de la courbe eſtoit plus ou moins grande que la circonference du cercle; Ce qu'il eut peu dire tout de meſme de la mienne, ſinon qu'il ne l'auoit pas encore veue; car elle s'accorde entierement auec la voſtre. Au reſte, Monſieur, ie vous prie de croire que ſi i'ay témoigné cy-deuant n'approuuer pas tout à fait certaines choſes particulieres qui venoient de vous, cela n'empeſche point que la declaration que ie viens de faire ne ſoit tres vraye. Mais comme on remarque plus ſoigneuſement les petites pailles des diamans, que les plus grandes tâches des pierres communes, ainſi i'ay crû deuoir regarder de plus prés à ce qui venoit de voſtre part, que s'il fut venu d'vne perſonne moins eſtimée. Et ie ne craindray pas de vous dire que cette meſme raiſon me conſole, lors que ie voy que de bons eſprits s'eſtudient à reprendre les choſes que i'ay écrites, en ſorte qu'au lieu de leur en ſçauoir mauuais gré, ie penſe eſtre obligé de les en remercier. Ce qui peut, ce me ſemble, ſeruir à vous aſſeurer que c'eſt veritablement, & ſans fiction, que ie ſuis, &c.

P. Herigone, tom. 6. Cursus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NVnquam fallit hæc methodus, vt asserit eius inuentor, qui est doctissimus Fermat Consiliarius in Parlamento Tolosano excellens Geometra nec vlli secundus in arte Analytica: qui optimè etiam restituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac vrbe vidimus manuscripta in manibus plurimorum, quibus subnexa est ab eodem auctore ad locos planos & solidos Isagoge.

D. ISMAEL BVLLIALDVS
Exercitatione de Porismatibus.

HAnc de porismatibus scriptiunculam data mihi occasione composui, cùm ante biennium vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat in suprema Curia Tolosana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritissimus, rerum Mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas & porismata quæ tam theorematicè quam problematicè proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi vnius monumentis & collectionibus Mathematicis porismatum naturam & vsum discere possumus, cùm ex Veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus supersit. Illius tamen sententia legenti statim obuia non est; textúsque corruptione, & applicationis porismatum defectu obscurior proculdubio euadit. Interea dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici iuris facere placuit; vt alios ad eorundem inuestigationem impellere emus; ipsumque Amplissimum Dominum de Fermat, ad sua edenda, vtinam & ad alia sublimis intellectus sui *Διρήματα* cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est, quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem à subtilissimis ætatis nostræ Geometris Bonauentura Cauallerio Bononiæ, & Euangelista Torricello Florentiæ summis laudibus in cœlum ferri, eiusque inuenta mirabilia prædicari auribus meis audiui, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multaque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatissimum toto pectore veneror ac colo.

R. P. MARINVS MERSENNVS ORDINIS MINIMORVM
Reflectionum Physicomathematicarum pag. 215.

CVm autem viuos potius quam mortuos quærerem, vnus abfuit Clarissimus Fermatius, Geometrarum Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctissimoque Senatore, Domino d'Espagnet, velut auulsum Begeraco, triduò amplexus sum.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON 1911

Doctrinæ

DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON 1861

Collectum à R. P. Iacobo de Billy S. I. Sacerdote ex varijs Epistolis quas ad eum diuersis temporibus misit D. P. de Fermat Senator Tolosanus.

Erudito Lectori.

SATIS est in limine huius operis fixisse nomen Fermatij, vt grande aliquid suspiceris, ille enim tantus vir fuit nihil vt fingere potuerit paruum, imò ne mediocre quidem, mens eius tot splendoribus illustris erat vt nihil obscurum pateretur, solem diceres qui tenebras statim excutiat & in ipsis etiam abyssis lucem immodicam radiorum suorum multitudine procreet: Diophantum hactenus mirati sunt vniuersi & merito quidem, verum ille quantus quantus sit, pigmæus est respectu nostri gigantis, qui longum totius orbis mathematici iter emensus, noua climata aliis inuisa peragrauit; Vietam prædicauere quotquot Algebricis operationibus nostro seculo vacauerunt, sufficitque ad famam alicui conciliandam, si dicamus illum in opere analyseos, mentem huius authoris assecutum, sed necdum ille pertigit ad eius scientiæ culmen, vt multis exemplis infra explicandis planum fiet; Claudium Gasparem Bachetum vt subtilissimum analystam & mihi alias intimum veneratus sum semper, atque istius in Diophantum elucubrationes præclare demonstrant quam perspicax fuerit in numeris, at visus illius hebetior est si cum oculis lyncei nostri omnia etiam abstrusissima penetrantis comparetur.

Verum ne hoc opusculum sola illius authoritate fulciatur, lubet hic paucis aperire quid recens repererit & quam late vagetur nouum ipsius inuentum; ac primo, hactenus Analystæ in quibusdam subtilioribus æquationibus duplicatis vnicam solutionem reperire potuerunt, asseritque ipse Bachetus ne duas quidem posse inueniri, Fermatius infinitas mox dabit, nec ipsum remorabuntur numeri ficti & nihilo minores qui sæpius occurrunt in eiusmodi operationibus, sed ipsos ventilabit ocyùs, & subtilissimo scrutinio ad veros tandem reducet: deinde nemo quod sciam triplicatas æquationes soluit hactenus nisi eas ex arte prius composuerit & aptarit tali ratione vt obuiæ statim sint solutiones ipsis etiam tyronibus, Fermatius singularem inuenit methodum qua solui possunt datæ vt libet si vnum excipias casum quem sumus infra explicaturi: tertio quis vnquam in numeris compositis ex quinque speciebus quotlibet solutiones exhibuit? Quis ex primitiuis radicibus elicuit deriuatiuas tum primi gradus, tum secundi, tum tertij, & sic deinceps in infinitum, nemo plane: vni Fermatio debetur hoc inuentum, vnus ille hæc omnia non ex alienis cumulauit operibus, quod rhapsodi quidam facere consueuerunt, sed proprio marte cudit & ex suis ipse fontibus hausit: hoc ille

cum mihi amicissimè communicasset per literas, iudicaui dignissimum quod typis mandaretur & ne ab eius mente vllatenus recedam exscribendum mihi videtur in primis compendium quoddam totius methodi cui nomen dedit appendicis ad dissertationem Claudij Gasparis Bacheti de duplicatis apud Diophantum æqualitatibus. En ipsissima illius verba.

Proposuit feliciter satis pleroſque duplicatæ æqualitatis & modos & casus subtilis ille & doctissimus analysta Bachetus ad quæstionem vigesimam quartam libri sexti Diophanti, sed integram sane non demessuit segetem, quas enim quæstiones vnicà tantum, aut ad summum duplici solutione circumscribit, ad infinitas porrigere & promouere nihil vetat, imo procliui id exequi operatione est in promptu. Proponatur sextus modus quem ipse satis prolixe explicat pag. 439. & 440. casus omnes ab ipso enumerati ex nostrà quam mox exhibituri sumus methodo infinitas admittunt solutiones, quæ à primâ per iteratas analyses gradatim in infinitum deriuantur. Methodus hæc est: quæratur solutio quæstionis propositæ secundum methodum vulgarem hoc est secundum methodum Bacheti aut Diophantæam, prodibit statim valor numeri siuè radicis ignotæ, quo peracto iteretur analysis & pro valore nouæ inuestigandæ radicis, ponatur vna radix plus numero vnitatum prioris radicis, reducetur quæstio ad nouam æqualitatem duplicatam, in qua vnitates vtrinque reperientur quadratæ propter priorem solutionem, ideoque differentia æquationum ex numeris tantum & quadratis, quæ sunt proximæ inter se species, constabit, quare resoluetur ex Diophanto & Bacheto noua hæc duplicata æqualitas ex quâ pari artificio tertia, & ex tertia quarta, & sic in infinitum deducentur; quod non aduertisse aut Diophantum aut Bachetum imo & Vietam dispendium huc vsque analyseos maximum fuit, sed præcipuum inuentionis nostræ artificium in iis se prodit quæstionibus, in quibus primigenia analysis pro valore incognitæ radicis exhibet numerum notâ defectus insignitum, qui ideo minor esse nihilo intelligitur; methodus autem nostra in hoc casu, non solum in problematis quæ per duplicatas æqualitates soluuntur locum habet, sed generaliter in aliis quibuscumque vt experienti notum fiet; sic igitur procedit: quæratur quæstio proposita secundum methodum vulgarem, si non succedat solutio post absolutam operationem, quia nempe valor numeri habet notam defectus & ideo minor nihilo deprehenditur, non tamen despondendum animum confidenter pronuntiamus, quæ oscitantia, vt verbis Vietæ vtar, fuit & ipsius & veterum analystarum, sed iterum quæstionem tentemus, & pro valore radicis ponamus 1 N. — numero quem sub signo defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubie æquatio quæ per veros numeros solutionem quæstionis repræsentabit. Hactenus Fermatius.

Ecce tibi epitomen huius opusculi quod diuidemus in tres partes; prima spectabit solutiones infinitas æquationum duplicatarum, siue illæ occurrant per signum +, siue per signum —: secunda gradum faciet ad triplicatas æquationes, in quibus arcana quædam & huc vsque inaudita aperiemus: tertia conscendet ad numeros ex quinque vel quatuor speciebus compositos, qui quadrato æquati dabunt radices infinitas, si primitiuis adiungantur deriuatiuæ, exhibebitque artem istiusmodi radices eruendi.

PARS PRIMA.

De solutionibus infinitis duplicatarum æqualitatum.

DElibanda est hic breuiter methodus vulgaris duplicatæ æqualitatis quæ sic habet. Duorum terminorum quadrato æquandorum cape differentiam elige duos numeros hanc differentiam producentes, tum vel quadratum semissis summæ producentium æquetur maiori termino, vel quadratum semissis differentiæ producentium æquetur termino minori, sic enim habebitur valor radicis iuxta quem resoluti duo termini exhibebunt quadratos. Exempla dabimus hîc in tribus tantum casibus ex quibus reliquos casus assequi facile est. 1

Primus casus est dum solæ radices & vnitates æquantur quadrato, vt contingit in duobus terminis sequentibus 2 N + 12 & 2 N. + 5. horum differentia 7. producitur ab 1 & 7. illorum summa est 8. quadratus dimidiæ summæ est 16. qui æquatus 2 N + 12 dat 2. pro valore radicis in vtroque termino, vel eorumdem producentium differentia est 6. quadratus semissis illius 9. æquetur minori termino 2 N + 5. & habebitur idem valor 2. duoque termini dati erunt 16. & 9. 2

Secundus casus est dum quadrata, radices, & vnitates æquantur quadrato, & est numerus quadratorum quadratus, vt si æquentur quadrato 4 Q + 20 N + 8. & 4 Q + 4 N − 8. horum differentia est 16. N + 16. quam producunt 4. & 4 N + 4. summæ 4 N + 8 semissis quadratus est 4 Q. + 16 N + 16. qui æquatus priori termino ex supradictis dat 2. pro valore radicis. Hîc nota ex infinitis producentibus differentiam superiorem, tales eligi debere vt numerus habens adiunctum characterem radicis, duplus sit lateris quadrati qui idem est in vtroque termino, propterea eligimus 4 N. vt quadratus semissis illius æquetur quadratis 4 Q. igitur duo termini dati æquiualebunt 64. & 16. 3

Tertius casus quem adnotasse operæ pretium erit & qui nobis sæpissime futurus est vsui, est cum vnitatum numerus in vtroque termino quadratus est, siue sit idem, siue diuersus, vt si æquandi sint quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. diuide quadratum maiorem 64. per 16. & quotiens 4. multiplicet minorem terminum 1 Q. + 16. 8 N. ita enim productus 4 Q. + 64. − 32 N habebit easdem vnitates quadratas quas alius terminus 3 Q + 64. + 48. N. hi duo æquandi sunt quadrato. Horum differentiam 1 Q. + 16 N producunt 1 N. & 1 N. + 16. (nota iterum 16 esse duplum 8. lateris quadrati qui est communis vtrique termino) horum producentium summa est 2 N + 16. quadratus dimidiæ summæ 1 Q + 64 + 16. N. æquatur 4. Q + 64. − 32 N. & fit 16. pro valore, ergo duo termini iuxta hunc valorem resoluti sunt 144 & 1600. 4

Præceptum generale ad solutiones infinitas duplicatarum æqualitatum.

Cape valorem radicis per methodum vulgarem, hunc connecte 1 N. cum suo signo, siue sit illud plus, siue minus & fiet noua radix secundum quam resolui debent duo termini in datâ æquatione duplicatâ æquati quadrato & fient noui termini quadrato æquandi, in his inueniatur valor radicis per methodum vulgarem, & præcipuè per tertium casum quem postremo dedi, & quem adnotasse dixi operæ pretium fore, ita extabit nouus valor pro posterioribus terminis; hunc connecte primo va- 5

lori, prout indicat eius signum plus vel minus, & fiet nouus valor pro prioribus terminis qui dati sunt quadrato æquandi.

6 Sit in exemplum vterque terminus sequens æquandus quadrato 4 N. + 1 & 1 Q. − 2 N + 1. præter 2. qui est obuius valor, inuenietur etiam valor $\frac{1}{4}$ per methodum vulgarem. Lubet vti vtroque valore ad nouas solutiones, ac primo iuxta præceptum pro noua radice capio 1 N + 2. ergo 4 N. + 1 qui fuit primus terminus æquatus quadrato erit 4 N + 9. (nam si 1 N. dat 1 N + 2 habebis 4 N. dare 4 N + 8. cui adde vnitatem in eodem primo termino existentem fietque 4 N + 9 simili ratione sumendo rursus 1 N. + 2. pro 1 N. & iuxta illam resoluendo 1 Q − 2 N + 1 qui est secundus terminus datæ æqualitatis, fiet nouus terminus æquandus quadrato 1 Q + 2 N + 9. ab hoc tolle priorem 4 N. + 9. & absolue hanc duplicem æqualitatem modo communi fietque valor pro posterioribus terminis $\frac{1}{4}$ cui adde 2 (quia sumpta fuit noua radix 1 N + 2) & habebis valorem nouum radicis pro data æqualitate $\frac{11}{4}$.

7 Rursus placet per alium valorem $\frac{1}{4}$ inuenire nouum valorem 2 pono pro noua radice 1 N + $\frac{1}{4}$ iuxta quam resoluti dati termini 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 dant nouos terminos 4 N + 4 & 1 Q + $\frac{1}{16}$ − $\frac{1N}{2}$, igitur quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus est, poterit hæc æqualitas duplicata resolui, soluatur vt dictum est num. 4. in tertio casu & inuenietur pro posterioribus terminis valor $\frac{11}{4}$. cui adde $\frac{1}{4}$ (quia sumpta est noua radix 1 N + $\frac{1}{4}$) extabitque valor alius pro data æqualitate $\frac{111}{16}$.

8 Habes ergo secundos valores deriuatiuos ex primis, atque ex tuis secundis potes tertios eruere eodem prorsus artificio, vt si libeat per radicem $\frac{11}{4}$ elicere tertiam, connectes illam cum 1 N. vt sit noua radix 1 N + $\frac{11}{4}$ iuxta quam resoluti dati termini 4 N + 1. & 1 Q. − 2 N + 1. eo modo quo resolui debere iam diximus, dabunt nouos terminos 4 N + 36 & 1 Q + $\frac{121}{16}$ + $\frac{11N}{2}$. in quibus vnitatum numerus est quadratus ergo valor radicis pro nouis illis terminis erit $\frac{11}{4}$. cui si addas $\frac{11}{4}$. juxta positionem præcedentem habebis pro valore in datis terminis + $\frac{1}{16}$. & iuxta illum resoluti dati termini exhibebunt quadratos.

9 Hinc vides posse inueniri valores infinitos: etenim ex primis orientur secundi & ex secundis tertij, & sic in infinitum, in exemplo dato iam habes quinque valores, ex postremis iterum possunt erui noui; ergo quælibet data æqualitas duplicata habet solutiones infinitas, quod erat demonstrandum.

Non despondendus animus si occurrant pro solutione numeri ficti & minores nihilo.

10 Vsuenit interdum vt in problematum enodatione reperiantur numeri ficti, vnde fit vt inexperti statim cadant animis, vt pote qui in casum vt ipsi existimant impossibilem inciderint, verum audacter affirmamus cum nostro Fermatio etiam inde elici posse solutionem.

11 Sit verbi gratia æqualitas duplicata data 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q & inuentus sit per methodum vulgarem valor radicis − 4 iuxta quam resoluti duo termini dant veros quadratos 9 & 49 illa radix est numerus fictus, fateor, hæc tamen sic inseruiet ad veros numeros inueniendos; pone pro noua radice 1 N − 4 & juxta illam resolue duos terminos priores, fientque noui termini 9 − 2 N. & 2 Q − 20 N. + 49 (quia 2 N. æquiualebunt 2 N 8. quæ si subtrahas ab vnitate vt postulat signum defectus habebis 9 − 2 N. pro priori termino nouo non aliter 2 Q dabunt 2 Q + 32 − 16 N. & 4 N dabunt 4 N − 16 quos si tollas ab 2 Q + 32 − 16 N iunctis cum vnitate vt primitiuus numerus indicat fiet 2 Q − 20 N. 449.) quare cum in istis terminis vnitatum numerus sit quadratus, inuenietur valor per methodum Diophantæam, ex hoc valore inuento tolle 4 quia radix

est 1 N − 4 fietque valor pro æqualitate data $\frac{3111696}{390625}$. igitur per numerum fictum inuentus est verus numerus qui satisfacit quæstioni vt ipse per examen probare poteris.

Rursus si detur ista duplicata æqualitas 8 Q. + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N. facile 12
inuenientur radices − 2 & $-\frac{44}{7}$ sed quia numeri isti ficti sunt, cape pro noua radice 1 N − 2 iuxta quam resoluti duo priores termini dant nouos terminos quadrato æquandos 8 Q + 4 − 16. N & 2 Q + 4 − 4 N. igitur per methodum Bacheti pro istis nouis terminis inuenietur valor radicis + $\frac{44}{7}$. vnde si tollas 2. quia noua radix fuit 1 N − 2 extabit noua radix pro data æqualitate duplicata + $\frac{30}{7}$ ergo ex numero ficto inuentus est verus satisfaciens duplicatæ æqualitati. Idem fieri potest de alio numero ficto simo & & ex illis inueniri possunt alij sine numero.

Tertium exemplum sit in istis terminis quadrato æquandis 1 + 2 N + 2 Q & 1 + 6 13
N + 2 Q per methodum communem reperitur valor − 4 igitur redintegranda est operatio, & ponendum pro noua radice 1 N − 4 & secundum illam resoluendi priores termini, vt iam dictum est, fientque termini noui 2 Q + 25 − 14 N. & 2 Q + 9 − 10 N. ergo quoniam vnitatum numerus vtrobique quadratus est inuenietur ex methodo Diophantæa valor radicis pro posterioribus terminis, hinc tolle 4. iuxta nouam radicem & relinquetur pro æqualitate data valor verus & realis $\frac{3111696}{390625}$, non ergo cadendum animo si occurrant aliquando numeri ficti quia reduci possunt ad veros vt demonstratum est in exemplis prioribus.

In hoc genere soluēdi duplicatas æqualitates, debet differentia terminorum æquandorum constare quadratis & radicibus solis.

Sæpius contingit in solutione æqualitatum, vt differentia terminorum constet ra- 14
dicibus solis, vt si oporteat æquare quadrato 1 Q + 1 − 1 N & 1 Q + 1 − 3 N tollendo secundum à primo differentia est 2 N. aliquando etiam differentia terminorum constat radicibus & vnitatibus, vt si termini sequentes æquentur quadrato 9 Q + 15 − 21 N. & 9 Q + 24. − 48 N. supponendo enim primum maiorem vel minorem (quod plerumque liberum est) erit differentia 27 N − 9 vel 9 − 27 N. verum in Fermatianâ methodo hoc curandum vt differentia terminorum constet radicibus & quadratis alioquin vel in impossibile caderes, vel labor tuus nullam nouam produceret solutionem, vt autem differentia constet quadratis & radicibus, debent vnitates quadratæ diuersæ reduci ad eumdem quadratum vt supra docuimus num. 4.

Sit exempli gratia æqualitas duplicata sequens 1 Q + 1 N + 2 & 1 Q + 3 N + 3 15
valor radicis per methodum communem est 2, ergo iuxta methodum Fermatianam sumi debet pro noua radice 1 N − 2. & iuxta illam oportet resoluere priores terminos, fientque noui termini æquandi quadrato 1 Q − 3 N. + 4. & 1 Q − 1 N + 1 si horum caperes differentiam haberes 2 N − 3 vel 3 − 2 N. prout primus terminus supponeretur maior aut minor, cape quosuis numeros qui has differentias producant, nihil proficies, nec vnquam ad optatum peruenies finem, nisi reducas illos terminos ad eumdem quadratum quod fit diuidendo maiorem quadratum per minorem & per quotientem multiplicando terminum illum qui minorem quadratum continet, in eo igitur exemplo diuide 4. per 1. & quotiens 4. multiplicet terminum 1 Q − 1 N + 1. ita enim habebuntur duo termini noui ad nostram methodum apti 4 Q − 4 N + 4. & 1 Q − 3 N + 4.

Rursus sint duo termini æquandi quadrato 1 Q + 16 − 8 N. & 3 Q + 64 + 48 N. 16
per methodum vulgarem valor est 16. ergo pro nouâ radice sumi debet 1 N. + 16 iuxta quam si resoluantur priores termini fient termini noui quadrato æquandi 1 Q. + 24 N.

+ 256. & 3 Q. + 144 N + 1600. caue capias horum differentiam 2 Q + 120 N + 1344. impossibile enim foret hoc pacto ad solutionem peruenire, quid igitur facies? Illud quod hactenus factitatum est sæpius: diuides 1600. per 256 & per quotientem $\frac{25}{4}$ multiplicabis 1. Q + 24 N + 256 & productus inde natus $\frac{25}{4}$ + 150 N. + 1600 cum 3 Q + 144 N + 1600. repræsentabit duos terminos æquandos quadrato, eorumque terminorum differentia constabit quadratis & radicibus: ergo ad nouam solutionem peruenire fas erit.

Hoc genus operandi non tantum valet ad solutiones duplicatarum æqualitatum, sed etiam ad alias quascunque.

17 Ferax est admodum ager iste quem colere cœpimus, etenim methodus Fermatiana, non tantum valet ad soluendas æqualitates duplicatas in infinitum, sed etiam ad alias; sit verbi gratia inueniendus numerus cuius duodecuplum sublatum ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. faciat cubum. ponatur numerus ille 1 N. ergo 8 Q + 8 − 12 N. æquatur cubo, finge latus 2 − 1 N. cubus erit 8 − 12 N + 6 Q. − 1 C. æquandus 8 Q + 8 − 12 N. & fit pro valore radicis − 2 quæ radix licet ficta satisfacit propositæ quæstioni. Verum vt inde habeatur numerus verus, pone pro nouâ radice 1 N − 2 & iuxta eam resolue prædictum numerum 8 Q + 8 − 12 N. fietque nouus terminus 8 Q − 44 N + 64. æquandus cubo, finge latus huius cubi 4 $\frac{11}{11}$ N. (4 est latus cubi 64. in nouo termino existentis, $\frac{44}{11}$ N. vero est quotiens qui fit diuidendo 44 N. in nouo termino existentem per triplum quadratum lateris cubici 4. nempe 48) eius cubus 64 − 44 N. + $\frac{121}{121}$ N. − $\frac{1331}{1331}$ N. æquatus nouo termino 8 Q − 44 N + 64 dat pro radice 2 $\frac{121}{1331}$ N. vnde si tollas 2. ob nouam radicem positam 1 N − 2 restabit valor pro priori positione $\frac{121}{1331}$ N. talis est numerus quæsitus, eius enim duodecuplum si tollas ab octuplo eius quadrato iuncto cum 8. dat $\frac{1331}{14641}$ cubum à latere $\frac{11}{121}$.

18 Rursus, si quæras triangulum rectangulum, cuius area iuncta hypotenusæ faciat quadratum, formabis illud ab 1 N + & 1 N. latera sunt 2 Q + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q. + 2. N. junge aream 2 C + 3 Q + 1 N. hypotenusæ 2 Q + 1 + 2 N & fit 1 + 3 N + 5 Q. + 2 C æquandus quadrato; finge latus 1 + $\frac{1}{2}$ N & habebis $\frac{1}{2}$ pro valore, pone igitur nouam radicem in N. − $\frac{1}{2}$ & juxta illam resolue singulas particulas numeri superioris & summam inde ortam æqua quadrato fietque numerus $\frac{1}{16}$ pro valore radicis ad primas positiones.

19 Simili ratione si sit inueniendum triangulum rectangulum, cuius area juncta vni lateri circa rectum faciat quadratum, formabis illud vt mox dictum est in numero præcedenti & area 2 C + 3 Q + 1 N. jungetur lateri 1 + 2 N. & fiet valor − $\frac{1}{4}$ cape igitur pro noua radice 1 N. − $\frac{1}{4}$ & iuxta illam resolue singulas particulas numeri quadrato æquati & fiet noua summa 2 C + $\frac{15}{16}$ + $\frac{11}{16}$ N. + $\frac{25}{16}$ N. æquanda quadrato: finge latus $\frac{5}{4}$ + $\frac{11}{40}$ N. & fiet valor pro numeris primo positis $\frac{121}{160}$ ac proinde triangulum quæsitum erit $\frac{9801}{19200}$, $\frac{7744}{19200}$, $\frac{12769}{19200}$.

Noua methodus ad solutionem duplicatarum æqualitatum.

20 Sit data æqualitas duplicata 25 Q + 4 N − 6 & 9 Q + 20 N. = 6 seu oporteat

æquare quadrato vtrumque numerum propositum: methodus communis est reuocare numeros quadratorum diuersos ad eundem vt dictum est num. 4. verum hoc non est necesse, sed potest sumi immediatè differentia numerorum quæ est 16 Q — 16 N. tum inueniendi sunt tales producentes, vt summa radicum faciat 10. N (seu duplum radicis 254) tales sunt 8 N. & 2 N — 2 horum enim producentium summæ semissis quadratum æquatum priori termino 25 Q + 4 N — 6. quem supposuimus maiorem dabit valorem $\frac{1}{2}$.

Rursum si darentur duo sequentes termini $\frac{121}{9}$ + 121 — $\frac{121N}{9}$ & 1 Q + 121 — 26 N. æquandi quadratis, cum numerus vnitatum vtrobique sit idem quadratus ex methodo vulgari capienda esset differentia $\frac{121}{9}$ — $\frac{121N}{9}$ tum sumendi forent producentes $\frac{121N}{99}$ & $\frac{121N}{11}$ — 22 & inde inueniendus valor radicis. Fermatius sumit producentes $\frac{1N}{1}$ & $\frac{11N}{1}$ — $\frac{11}{1}$ ergo summa producentium $\frac{12N}{1}$ — $\frac{11}{1}$ huius summæ semissis quadratus æquatus $\frac{1}{1}$ + 121 — $\frac{121N}{9}$ dat valorem radicis $\frac{61}{11}$. 21

Iterum sit soluenda æqualitas duplicata 169 9 + 5746 N. + 169. & 1 Q + 10 N. + 169. tripliciter ista æqualitas solui potest: primo accipiendo differentiam terminorum illorum quæ est 168 Q + 5736 N & eligendo duos producentes in quorum vno sit 26, duplum videlicet lateris quadrati 169. atque hæc est methodus communis: secundo solui potest reuocando diuersos quadratorum numeros ad eundem, quod fieret ducendo singulas particulas numeri posterioris in 169. vt explicatum est num. 4. tertio soluetur eadem æqualitas eligendo producentes 14 N & 12 N + $\frac{1225}{7}$ ita enim summa radicum erit 26 N. duplum lateris quadrati 1699. atque hæc est methodus Fermatiana quæ dat pro valore radicis $\frac{5741}{11}$. 22

Dicet aliquis istam methodum esse quidem ingeniosam, sed inutilem, vt pote quæ prodeat tantum ex numeris arte conquisitis, & tali ratione dispositis vt & illi producant differentiam terminorum quadrato æquandorum, & in summa reperiatur duplum lateris majoris quadrati. At quisquis hoc opponit ignorat eâ ratione solui pulcherrimum & difficillimũ problema quod alias torsit omnes Algebristas, & quod insolutum mansisset, ni Fermatius hac methodo fultus soluisset nodum Gordianum. Denique qui inutilitatem huius methodi accusat videat solutionem multorum problematum infra num. 45. 47. 48. 50. Quomodo autem inueniantur isti producentes facile est judicare nam sumendum duplum lateris quadrati majoris & illud diuidendum in duas partes quæ producant differentiam quadratorum, vt in primo exemplo sumitur 10. diuidendus in duos qui faciant 16. & inuenientur producentes 8 & 2. ita de cæteris. 23

Post inuentos per analysin primitiuos numeros iterata operatio exhibet solutionem.

Contingit non raro, vt in enodatione alicuius problematis incidatur in numeros fictos: iam supra ostensum est quomodo huic malo medeatur ars analytica Fermatij, sed accipe insuper radicem singularem ex qua fructus innumeri prodibunt: radix illa est iterata operatio, sed ne incassum redintegres operationem analysis exhibebit numeros primitiuos in secundâ operatione ponendos. 24

Quæratur verbi gratia triangulum rectangulum cuius tam hypotenusa quam summa laterum circa rectum sit numerus quadratus, formetur triangulum ab obuiis Numeris 1 N + 1 & 1 N. ergo tria latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 N + 2 Q. igitur hypotenusa 2 Q. + 1 + 2 N. & summa laterum circa rectum 2 Q. + 1 + 4 N. æquantur. quadrato & fit per methodum cõmunem valor radicis $\frac{12}{7}$ vnde duo numeri à quibus formatum est triangulum erunt — $\frac{5}{7}$ & — $\frac{12}{7}$ seu in integris accipiendo solos numeratores — 5 — 12 triangulum autem inde formatum est 169. 119. 120. vnde infero ad solu- 25

tionem problematis inueniendum esse aliquod triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit quadratus & differentia laterum circa rectum sit quadratus atque hæc conclusio elicitur vi analyseos præcedentis, istud autem triangulum est 169. 119 120. quod formatur vel ab −5 & −12. vel a +5 & +12. quare itero operationem & formo triangulum quæsitum ab 1 N + 5. & 12. & peruenio tandem ad æqualitatem duplicatam quæ non dabit amplius numeros fictos, sed veros beneficio trianguli illius primitiui vt distinctius videbitur infrà num. 45.

26 & Rursus si proponatur quærendum triangulum rectangulum quo· productus sub hypotenusa in summam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus areâ, faciat quadratum formabitur triangulum ab obuiis Numeris 1 & 1 N + 1. ergo latera erunt 1 Q + 2 N + 2. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. duo itaque 1 Q + 2 N + 2 in 1 Q + 3 N 1 & productus 1 QQ + 5 C + 9 Q. + 8 N. + 2. multatus area 1 C. + 3 Q + 2 N dat residuum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 6 N + 2 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 2 N + 1. eius quadratum est 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquandum numero superiori & fit valor $\frac{1}{2}$ proindeque si hic sisteremus secundum latus quod fuit 1 Q + 2 N foret minus nihilo & ad solutionem postulatam ineptum, quare iteranda est operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2. ita enim latera erunt 1 Q + 2 N + 5. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. productus ex hypotenusa in summam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus areâ erit 1 QQ + 4 C + 6 Q + 20 N. + 1 æquandus quadrato, finge latus 1 + 10 N − 1 Q & fit pro valore verus numerus $\frac{12}{29}$ ergo iuxta positiones formandum erit triangulum a $\frac{12}{29}$ & 2 siue in integris accipiendo solos numeratores à 29 & 12 & fient latera quæsiti trianguli 985. 697. 696. Idem omnino contingeret si poneres pro noua radice 1 N. − $\frac{1}{2}$ & iuxta illam resolueres 1 QQ + 4 C + 6 N + 2 inde enim orietur nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ + 2 C + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ finge latus $\frac{1}{2}$ + 5 N. − 1 Q & fit valor $\frac{12}{29}$. hinc tolle $\frac{1}{2}$ ob nouam radicem & fit $\frac{12}{29}$ pro primis positionibus, quare juxta positiones formabitur triangulum in integris ab 29. & 12 vt supra.

27 Iterum quæratur triangulum rectangulum ita vt hypotenusa sit quadratus sicut & differentia laterum ponatur 1 N + 1 & 1 pro duobus numeris à quibus formetur triangulum, ergo latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 N + 2. tolle postremum 2 N + 2. à medio 1 Q + 2 N. igitur differentia 1 Q − 2 & hypotenusa 1 Q + 2 + N. æquantur quadrato & fit per duplicatam æqualitatem $\frac{12}{5}$ pro valore radicis, ergo iuxta positiones numeri formantes triangulum erunt − $\frac{12}{5}$ & 1 seu in integris abiecto denominatore, −5 & 12. posses iterare operationem, & inuenire triangulum quæsitum, sed aduerte vltro illud offerri ex formatione 5 & 12. fit enim triangulum rectangulum 169. 119. 120. vbi hypotenusa & differentia laterum est quadratus numerus.

Bachetus impossibilitatem agnoscit vbi Fermatius facilitatem inuenit.

28 Fatendum est ingenuè plurimas quæstiones per methodos ordinarias solui infinities vt cum vterque numerus quadrato æquandus constat radicibus diuersis & eodem quadrato, facilè enim est eo in casu reperire quotlibet solutiones, propterea Bachetus ad quæstion. 24 lib. 6. cum in secundo modo soluendi duplicatas æqualitates dixisset vnicam solutionem afferri, in quarto modo solutiones adhibet infinitas. Verum aliæ sunt æqualitates duplicatæ delicatiores in quibus per methodos communes vnica solutio, vel ad summum duplex inuenitur, vnde ille idem illustris Diophanti commentator loco citato ait vnicam solutionem afferri posse, dum numerorum ex tribus speciebus compositorum differentia constat vnicâ specie, vel enim in vno numerorum

quadrato

quadrato æquandorum sunt tres speeies ex vna parte & duæ tantum ex alia, estque vnicus vtrinque quadratus, vel dum sunt tantum duæ species in terminis æquandis, & vnus constat quadratis & vnitatibus, alter autem vnitatibus & radicibus, addit autem contingere duas solutiones cum tam quadratorum quam vnitatum numerus est quadratus: ego vero, pace tanti viri dixerim, aio ex methodo Fermatianâ etiam in his omnibus casibus contingere solutiones infinitas vt exemplis sequentibus planum erit.

Primum exemplum sit in duplicatâ æqualitate $1\,Q+3\,N+7$. & $1\,Q-5\,N+7$. 29
differentia eorum terminorum constat vnica specie estque $8\,N$. & sit valor 3. frustra Bachetus per suam methodum alium quæreret, sed ponatur pro nouâ radice $1\,N+3$. ergo noui termini erunt $1\,Q+25+9\,N$. & $1\,Q+1+1\,N$. igitur quoniam numerus vnitatum quadratus est vtrobique poterit solui ista æquatio nec te terreant numeri ficti qui occurrent iam enim supra dedimus modum ex illis eliciendi veros.

Secundum erit in $4\,Q-1\,N-4$ & $4\,Q+15\,N$. vbi sunt tantum duæ species ex vna 30
parte, & quam Bachetus soluit inueniendo vnicum valorem $\frac{1}{4}$. pone pro nouâ radice $1\,N+\frac{1}{4}$. ergo iuxta illam resoluti priores termini dabunt nouos æquandos quadrato $4\,Q+1+9\,N$. & $4\,Q+25\,N$. ac proinde cum habeatur numerus vnitatum quadratus inueniri potest valor radicis eritque $\frac{481}{480}$.

Tertium exemplum sit in duobus terminis $1\,Q+9$ & $9+24\,N$ æquandus quadra- 31
to, duos inuenies valores ad solutionem istius æqualitatis, nempe 3 & $\frac{481}{161}$ inde inuenies infinitos, ponendo pro noua radice $1\,N+3$ vel $1\,N+\frac{481}{161}$ verum hoc indicasse satis esto.

Deinde Bachetus ait reperiri duas solutiones in iis duplicatis æqualitatibus 32
quarum termini habent tam numerum quadratum quam vnitatum quadratum vt si dentur æquandi quadrato $1\,Q+12\,N+1$ & $1\,Q+1$ nam per methodos vulgares reperientur valores $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ at si quis petat alios, hæret Bachetus, noster tamen Fermatius inde se alacriter expedit & subministat infinitos. Adde quod ne in hoc quidem casu semper dabit duos valores Bachetus vt si dentur duo termini æquandi quadrato $1\,Q+3\,N+1$ & $1\,Q-1\,N+1$ vnicum enim eius methodus valorem exhibet, imo continget sæpè vt ne vnum quidem sit exhibiturus vt si dentur æquandi quadrato $1\,Q-6\,N+\frac{1}{4}$ & $1\,Q-2\,N+\frac{1}{4}$ hoc autem continget quia valor exhibetur cum defectu; jam autem supra diximus per methodum Fermatianam innumeros valores exhiberi etiam dum numeri ficti occurrunt.

Præterea cum Diophantus l. 4. q. 29. eo deueniisset vt $9\,QQ-4\,C+69-12\,N$. 33
$+1$ æquandus foret quadrato, Bachetus ait quatuor tantum modis id fieri posse, sublatis enim quadrato quadratis & vnitatibus vel tollet radices, vt maneat æquatio inter cubos & quadratos; vel tollit cubos vt maneat æquatio inter radices & quadrata, vnde inuenit tantum duos valores $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{11}$. Fermatius vero reperit infinitos, primo enim expungit etiam quadrata, vt remaneat æqualitas inter cubos & quadratoquadrata vel inter radices & vnitates. Secundo asserit Bachetus si fingatur latus istius quadrati $3\,Q+6\,N-1$. fore vt incidatur in incommodum $\&24\,Q+40\,C$ æquentur nihilo, Verum hoc incommodum non pertimescit Fermatius. Tertio ex quolibet valore inuento, alios reperit in infinitum vt iam explicatum est.

Deinde Bachetus lib. 4. q. 28. ait esse impossibile æquari cubo $8\,C+8\,N-1\,Q$ 34
-1 & affert rationem quia non potest fingi cubus iste nisi à latere $2\,N-1$ vel tollantur cubi & vnitates: verum, pace tanti viri dixerim, falsum hoc est, primo enim potest fingi latus istius cubi $\frac{1}{8}N-1$ ex fit valor $\frac{1}{512}$ deinde fingendo latus $2\,N-1$ fiet radix $-\frac{1}{4}$. & resoluendo numerum superiorem iuxta hanc nouam radicem. Hæc fusius explicabuninfrà in tertiá parte.

Vietam Fermatius antecellit.

35 Non satis caute negauit Vieta numetum compositum ex duobus cubis posse diuidi in alios duos cubos: Fermatius enim docet id posse fieri ex iis quæ habet Bachetus ad l. 4. Q. 2. Diophanti (quod tamen ipse Bachetus non aduertit) sit igitur 9. compositus ex cuobus cubis 1 & 8 diuidendus in alios duos cubos, quærantur primum duo cubi quorum differentia sit 9. beneficio huius canonis: vtrumque datorum cuborum 1 & 8 ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum & minori quotienti adde maius latus, a maiore autem quotiente aufer minus latus, summa & residuum exhibebunt quæsitorum latera cuborum: proinde latera illa sunt $\frac{19}{7}$ $\frac{17}{7}$ cubi vero $\frac{4913}{343}$ $\frac{4913}{343}$. Secundo datis duobus cubis inueniuntur alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum; hoc autem commode fiet per canonem sequentem, productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per summam cuborum, à majore quotiente aufer minus latus à minore quotiente aufer minus latus, relinquentur latera quæsitorum cuborum. At duorum cuborum mox inuentorum differentia est 9. ergo latera nouorum cuborum quorum differentia est 9. erunt 188479 & 36520 (suppositio vtrique denominatore cõmuni 90391) cubi autem erunt 6695590842626239 & 48707103808000 (modo tamen vtrique supponatur communis denominator 7385426376 46471) horum igitur cuborum differentia est 9 sicut & priorum. Tertio extat alius canon quo inueniuntur duo cubi quorum summa æqualis est differentiæ duorum cuborum datorum, & est eiusmodi: vtrumque datorum cuborum duc ter in latus alterius, productos diuide per summam datorum cuborum, à maiore quotiente aufer minus latus, & minorem quotientem aufer à majore latere, relinquentur cuborum quæsitorum latera. Ergo cum duorum cuborum posteriorum differentia sit 9. si per hunc canonem inueniantur duo cubi quorum summa sit æqualis illi differentiæ habebuntur latera quæsitorum cuborum $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$.

36 Vieta soluit acutissime problema Adriani Romani quod fuerat propositum omnibus totius orbis mathematicis in vno casu, dum videlicet numerus cum quo debet fieri æquatio minor est binario, idque per sectiones angulares, vbi ingenij sui vim mirificè ostendit & maximam inde existimationem vbique terrarum sibi comparauit. Verum Fermatius noster, etiam dum numerus binario maior est, quo in casu nullum est ab sectionibus angularibus præsidium, soluit quæstionem; sit enim $45.(1) - 3795(1) + 95634(1)$ &c. nihil omnino immutando in terminis Adriani numerus æqualis cuiuis numero dato (eo enim recidit problema Adriani vt Vieta ipse vel agnouit vel emendauit) sit autem datus numerus $\text{Ɛ}8 + 6$, qui est binario maior, asserit Fermatius valorem radicis primigeniæ facillime designari per radices vniuersales eritque in eo casu Ɛ potestatis $45(3 + \text{Ɛ}2 + \text{Ɛ}\,\text{bin.}\,10. + \text{Ɛ}72) + \text{Ɛ}$ potestatis $45(3 + \text{Ɛ}2 - \text{Ɛ}\,\text{bin.}\,10 + \text{Ɛ}72)$ Rursus si detur numerus 4 asserit Fermatius valorem radicis fore Ɛ potestatis 45 bin. $2 + \text{Ɛ}3 +$ Ɛ potestatis 45. residui $2 - \text{Ɛ}3$. & sic infinitum valores nouos dabit etiam supra binarium, cum Vieta ne vnum quidem etiam sectionum angularium ope sufful-tus exhibere possit.

37 Vieta l. 5. zetet. 9. infeliciter soluit quæstionem tertiam libri sexti Diophanti; cum enim iste proponat inuenire triangulum rectangulum cuius area assumens datum numerum faciat quadratum, coarctauit Vieta quæstionem ad datum numerum ex duobus quadratis compositum, at Fermatius innumeris modis soluit problema de dato quocumque numero si enim dentur 3 numeri sequentes exhibet triangulum quæsitum $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$.

Diophantum in plurimis Fermatius ſuperat.

Diophantus l. 5. q. 8. tradit artem inueniendi tria triangula rectangula quæ ſint æqualia quoad aream; qui vero plura ab ipſo expetet numquam obtinebit, præterea nunquam tradidit Diophantus methodum inueniendi triangulum dato triangulo æquale quoad aream. Fermatius vtrumque mox atque eadem operatione præſtabit, ſit verbi gratia inueniendum triangulum rectangulum cuius area ſit 6. qualis eſt area trianguli rectanguli 3. 4. 5. eſto vnum latus cuiuſpiam trianguli rectanguli 3 & aliud latus ſit 1 N + 4 horum quadrata ſimul ſumpta exhibent 25 + 1 Q. + 8 N. pro quadrato hypotenuſæ: quare iſte numerus æquatur quadrato, deinde area iſtius trianguli ½ N + 6. debet eſſe ſextupla alicuius quadrati (quia poſtulatur aream eſſe 6, ergo eius areæ ſextans quadratus eſt ac proinde ille ductus in 36. efficiet quadratum, efficit autem 9 N + 36. igitur hic numerus æquandus eſt quadrato. En igitur duos terminos duplicatæ æqualitatis 9 N + 36. & 25 + 1 Q + 8 N. in his autem vnitatum numerus quadratus eſt, ergo valor radicis facile reperietur et tque — ac proinde 1 N + 4 erit . aliud autem latus circa rectum eſt 3 igitur horum quadrata ſimul ſumpta faciunt quadratum cuius latus erit hypotenuſa ergo habes triangulum rectangulum . cuius area eſt ſextupla cuiuſpiam quadrati nempe . huius vero quadrati latus eſt . per quod ſi diuidas ſingula latera trianguli mox reperti, habebis triangulum quæſitum . . . cuius area eſt 9. aduerte nos inueniſſe hoc triangulũ per illud quod datum fuit 3. 4. 5. ac per inuentum inueniri poſſe tertium, per tertium, inuenietur quartum & ſic in infinitum. Ecce tibi quatuor triangula rectangula quorum area eſt 840 primum 58. 40. 42. ſecundum 74. 24. 70. tertium 113. 15. 112. quartum . . . 38

Diophantus l. 6. q. 6. incidit in illam duplicatam æqualitatem 1 + 1 Q & 1 + 14 N. poteſt illa reſolui duobus modis, ſupponendo primum ex illis maiorem vel minorem altero, prout libuerit: & ſunt duæ radices ⅓ & . ſciſcitare ab illo tertiam, non dabit. Fermatius poteſt dare infinitas, pro exemplo ſumatur noua radix 1 N + ⅓ & juxta illum reſoluantur 1 + 1 Q & 1 + 14 N. fientque noui termini 1 Q + + & 49 + 14 N. ergo cum vnitatum numeri ſint quadrati in vtroque termino, reſolui poteſt per methodum, eritque radix pro duobus terminis poſterioribus cui necte ⅓ & fiet valor radicis pro datâ æqualitate + . 39

Diophantus l. 6. poſt quæſt. 15. & 17. omiſit tertium caſum quo quæri poteſt triangulum rectangulum vt tam hypotenuſa quam alterum laterum circa rectum, detractâ areâ faciat quadratum: omiſit inquam illud problema raræ ſubtilitatis non alia de cauſa niſi quia incidit in numeros fictos quorum enodationem ignorauit. Fermatius illud acutiſſime ſoluit; primo enim per analyſin deprehendit inueniendum eſſe triangulum rectangulum in quo productus ſub hypotenuſa in ſummam vnius laterum circa rectum & dimidij alterius multatus area, ſit quadratus, deinde triangulum iſtiuſmodi inuenit eiuſque ratiocinium & praxim dedimus ſupra num. 26. vbi diximus triangulum 985. 697. 696. ſatisfacere huic lemmati. Tertio latera huius trianguli nectit characteri radicum vt ſit triangulum quæſitum 985 N. 697 N. 696 N. cuius area 2425564. tollatur ab hypotenuſa 985 N & 697 N. ita duo reſidua 985 N — 2425569 & 697 N & 2925564 erunt æquanda quadrato, æquetur illud poſtremum quadrato ab 697 N. orto ſitque 485809 æquale 697 N — 2425569. & fiet valor radicis ideoque triangulum ab initio quæſitum erit . En quo Diophantus nuſquam attingere potuit, multa alia dabimus eiuſmodi in ſequentibus quæ Diophantus omiſit, vt pote ſibi ignota. 40

Quæstiones duodecim circa hactenus dicta.

41 Quot exempla dedimus tot sunt problemata difficillima, quibus enodandis impares erunt algebristæ vulgares. Primum enim exemplum in quo proposita est duplicata æqualitas 4 N + 1 & 1 Q − 2 N + 1 ita enunciari potest. Inuenire numerum octonario majorem cuius quadruplum additum vnitati faciat quadratum & cuius duplum subtractum ab eius quadrato cum vnitate iuncto faciat rursus quadratum, numerus quæsitus est $\frac{15}{4}$. Secundum exemplum sic proponetur. Inuenire numerum cuius duplum detractum vnitati quadratum exhibet & cuius quadruplum subtractum ab vnitate iunctâ cum duplo eius quadrato faciat quadratum. Hinc existit duplicata æqualitas inter 1 − 2 N & 1 − 4 N + 2 Q vbi valor radicis est $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$. Tertium exemplum in quo 89 + 4 + 16 N & 2 Q + 4 + 4 N æquantur quadrato, sic proponi potest in problema. Inuenire numerum cuius sedecuplum cum octuplo quadrato additum 4. facit quadratum & cuius quadruplum cum quaternario & duplo ipsius quadrato, facit quadratum, hic valor est $\frac{15}{17}$. Omitto reliqua exempla vt proponam illustriores quasdam quæstiones.

Inuenire infinities duos numeros quorum productus sublatus ab alterutro eorum, aut ab illorũ summâ aut à differentiâ relinquat quadratum.

42 Sint duo illi 1 N. & 1 − 1 N sic enim satisfiet duobus postulatis prioribus, restat ergo vt duobus posterioribus satisfiat, suppono 1 N esse minorem, ergo productus 1 N − 1 Q. subtractus à differentia 1 − 2 N dat pro residuo 1 Q + 1 − 3 N. subtractus autem à summa 1. relinquit 1 Q + 1 − 1 N. illa ergo duo residua æquantur quadratis & fit per methodum vulgarem $\frac{1}{2}$ pro valore radicis ac proinde duo numeri quæsiti sunt $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$. Supponatur nunc pro nouâ radice 1 N. + $\frac{1}{4}$ & iuxta illam resoluantur duo residua supradicta, fientque de nouo, duo termini 1 Q + 4 $\frac{1}{4}$ $\frac{1N}{2}$ & 1 Q + $\frac{1}{16}$ − $\frac{2N}{4}$ æquandi quadratis, igitur quoniam in vtroque termino vnitatum numerus est quadratus, inuenietur valor pro his terminis $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ huic adde $\frac{1}{4}$ & fiet valor pro prioribus terminis, igitur duo numeri quæsiti erunt $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ & $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$.

Potes ex isto posteriori valore elicere alium tertium, & ex tertio quartum, & sic in infinitum. En tibi alios duos numeros satisfacientes quæstioni 10416 & 41449 modò supposueris denominatorem 51865.

Inuenire infinities tres numeros quorum solidum subtractum à singulis, & à qualibet illorum differentia & à producto medij in extremos, & à quadrato medij, relinquat quadratum.

43 Ponantur tres quæsiti 1 N. 1. 1. − 1 N horum solidum 1 N − Q. detractum primo & tertio, itemque differentiæ primi & secundi, ac differentiæ secundi & tertij relinquit quadratum, superest ergo vt satisfiat reliquis postulatis seu vt 1 Q + 1 − 1 N & 1

Q + 1 − 3 N. æquentur quadratis, sunt autem iidem plane numeri cum iisdem signis quæ in priori quæstione; igitur valor est $\frac{1}{4}$ & fient tres quæsiti 3. 8. 5. modo illis supponatur denominator communis 8. Item tres sequentes 10416. 51865. 41449 (modo supponatur illis denominator 51865) satisfaciunt quæstioni simili ratione tres subsequentes 249875197. 784992912. 535117715. suppositio denominatore communi 784992912. soluunt quæstionem.

Potest idem problema aliter proponi hoc modo. Diuidere infinities binarium in tres partes, ita vt solidum sub illis detractum singulis, & cuilibet eorum differentiæ & cuilibet producto medij in extremos, & quadrato medij, semper relinquat quadratum, nam quilibet ternarius ex supradictis æquatur binario. Aduerte dumtaxat me per medium non intelligere minorem majore & majorem minore, sed habere tantum rationem situs, in eo ordine quem supra vides.

Inuenire infinities duos numeros tales, vt differentia quadratorũ ab illis ortorum detracta maiori vel minori, vel summæ vel differentiæ eorum, relinquat quadratum.

Ponatur summa numerorum 1 − 2 N. & differentia 2 N. ergo ipsi numeri erunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ − 2 N. proindeque differentia quadratorum ab illis est 2 N − 4 Q quæ detracta summæ vel differentiæ relinquit quadratum. Restat ergo vt detracta alterutri numerorum, quadratũ relinquat, relinquit autem $\frac{1}{4}$ + 4 Q − 2 N. & $\frac{1}{4}$ + 4 Q − 4 N. igitur hæc æquanda quadratis, & fit 1 N æqualis $\frac{1}{8}$ & duo quæsiti numeri sunt $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{16}$ vt vero inuenias alios, pone pro nouâ radice 1 N + $\frac{1}{8}$ & iuxta hãc resolue terminos quadrato æquatos, & perge in operatione secundum præcepta superius tradita, neque despondeas animum si occurrant numeri ficti, iam diximus quomodo reduci debeant ad veros. 44

Inuenire duos numeros quorum summa faciat quadratum, & quorum quadrata simul iuncta faciant quadrato-quadratum.

Istud problema idem plane est cum superiori quo quærebatur triangulum rectangulum cuius hypotenusa & summa laterum sit quadratus aliasque fuit propositum plerisque doctissimis Mathematicis à Fermatio nostro sine solutione. Vtere igitur triangulo primitiuo supra inuento (num. 25) 169. 119. 120. quod formatur ab 5 & 12 & forma triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera erunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q. − 119 + 10 N. 24 N + 120. igitur hypotenusa 1 Q + 169 + 10 N. & summa laterum circa rectum 1 + 1 Q + 34 N. æquantur quadrato, duc summam istam laterum in 169. ergo productus 169 Q + 5746 N. + 169. cum hypotenusa 1 Q + 169 + 10 N æquantur quadratis. Ergo (per ea quæ dicta sunt num. 22) valor radicis est $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ & iuxta positiones duo numeri à quibus nascetur triangulum quæsitum 468729861028 9. 4565486027761. 1061652293520. nam & hypotenusa & quadratus & summa laterum & quadrata laterum æquantur quadrato hypotenusæ. Proindeque duo latera circa rectum sunt duo numeri quæsiti tum quia illorum summa quadratus est, tum quia horum quadrata simul iuncta faciunt quadratoquadratum. 45

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit numerus quadratus qui additus dato multiplici alterius circa rectum faciat quadratum.

46 Detur triplus pro multiplici & formetur triangulum rectangulum ab 1 N + 1 & 1. latera erunt 2 + 1 Q. + 2 N. 1 Q. + 2 N. 2 + 2 N. triplum postremi istius lateris est 6 N + 6 cui si addas medium latus, fiet summa 1 Q + 8 N + 6 æquanda quadrato. Insuper ipsum medium latus nempe 1 Q + 2 N. quadrato æquandum est. Hæc duplicata æqualitas modo communi resoluta dat $\frac{1}{4}$ pro valore radicis & iuxta positiones fiet triangulum quæsitum in integris 313. 25. 312.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius lateris circa rectum faciat quadratum.

47 Detur triplus pro multiplici & capiatur triangulum inuentum in præcedente 313. 25. 312. pro primitiuo, & quia istud triangulum formatur ab 13 & 12 forma triangulum quæsitum ab 1 N − 13 & 12. latera erunt 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. huius postremi triplum subtractum à medio, relinquit 19 + 961 − 98 N. quod est æquandum quadrato, at medium latus æquari etiam debet quadrato nempe 1 Q − 26 N + 25. En tibi æqualitatem duplicatam, ducto igitur horum postremo in $\frac{361}{19}$ iuxta ea quæ dicta sunt in numero 4. fient duo termini noui æquandi quadrato $\frac{361}{19}$ + 961 − $\frac{34718}{19}$ N & 1 Q + 961 − 98 N. horum differentia est $\frac{1805}{19}$ − $\frac{34718}{19}$ N eligantur duo hanc differentiam producentes $\frac{36}{5}$ N & $\frac{1}{5}$ N − $\frac{1805}{361}$ & fiant reliqua pro solito, inuenieturque valor radicis $\frac{25}{19}$ ergo 1 N. − 13. & 12. in integris abiecto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex quibus formatur triangulum quæsitum 5688648710058 41. 539673367418641. 17988863421048 0. dabimus infra solutionem eiusdem problematis per aliam methodum in 3. p. n. 36.

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit numerus quadratus, & in quo datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri, faciat quadratum.

48 Pone 1 N + 1 & 1 pro numeris formantibus triangulum, latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo si duplum istius posterioris 4 N + 4 tollas ab 1 Q + 2

N. relinquetur 1 Q − 2 N − 4 æquandus quadrato, sed & hypotenusa 2 + 1 Q + 2 N. æquanda est quadrato. En tibi duplicatam æqualitatem vbi valor radicis est $\frac{2}{1}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris relicto de nominatore erunt − 5 & 12. vnde formatur triangulum 169. 119 − 120, redintegra ergo operationem & pone pro numeris formantibus triangulum 1 N − 5 & 12 latera trianguli erunt 1 Q + 169 − 10 N. 1 Q − 10. N − 119. 24 N − 120. ac proinde si duplum postremi lateris detrahatur medio, residuum 1 Q + 121 − 58 N sicut & hypotenusa 1 Q + 169 − 10 N. æquabuntur quadratis, ducatur ergo residuum 1 Q + 121 − 58 N in quadratum $\frac{1}{1}$ & fient duo termini æquandi quadrato reducti ad eundem quadratum $\frac{1}{1}$ + 169 − $\frac{58}{1}$ N & 1 Q + 169 − 10 N. differentia illorum est $\frac{48}{1}$ N quam producunt $\frac{58}{1}$ & $\frac{10}{1}$ − $\frac{48}{1}$ horum producentium summæ semissis quadratus æquetur maiori duorum superiorum terminorum & fiet valor radicis $\frac{1393}{1}$ & juxta positiones triangulum quæsitum erit 193430 46113379. 18732418687921. 48218174004 00. & satisfacit quæstioni.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa rectum sit quadratus, & alterius lateris circa rectum sit quadratus & alterius lateris circa rectum datus multiplex hypotenusæ additus faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera sunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ponatur medium latus 1 Q. + 2 N. esse quadratum, postremi autem lateris duplum 4 N + 4 additum hypotenusæ facit 1 Q + 6 N. + 6 ergo duo sequentes termini 1 Q + 6 N + 6 & 1 Q + 2 æquantur quadratis, & fit valor $\frac{4}{4}$ ac proinde 1 N + 1 & 1 in integris erunt 5 & 4 vnde formatur triangulum quæsitum 41. 9. 40. hinc solues sequens problema. Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit quadratus numerus, alterius autem lateris simplum & duplum additum hypotenusæ faciat quadratum, triangulum est idem quod supra 41. 9. 40. si peteres istius lateris additi simplum & quindecuplum triangulum foret 30. 16. 34. formatum à 5 & 3. 49

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit quadratus, alterius autem lateris datus multiplex detractus hypotenusæ faciat quadratum.

Detur multiplex duplus; & assumatur pro triangulo primitiuo illud quod inuentum est in quæstione præcedenti 41. 9. 40. quodque formatur ab 5. & 4. inde ob analysin præcedentem formabitur triangulum quæsitum ab 1 N − 5 & 4. latera erunt 1 Q + 41 − 10 N. 1 Q + 9 − 10 N. 8 N − 40 sit medium latus 1 Q + 9 − 10 N. æquandum quadrato deinde duplum postremi lateris 8 N − 40. detrahatur hypotenusæ & remanet 1 Q + 121 − 26 N æquandus quadrato, ecce ergo duplicatam æqualitatem 50

inter 1 Q + 121 − 26 N & 1 Q + 9 − 10 N quæ multipliciter videtur posse solui, sed vix occurret ratio commoda ad solutionem nisi recurras ad nouam methodum explicatam num. 20. & sequentibus, reuocentur ergo illi duo termini ad eandem vnitatem quadratum ducendo posteriorem in $\frac{121}{9}$ ita fient rursus duo termini $\frac{121}{9}$ + 121 − $\frac{1210\,N}{9}$ & 1 Q + 121 − 26 æquandi, quadrato, horum terminorum differentia est $\frac{12100}{9}$ − $\frac{2240\,N}{9}$ hanc producunt $\frac{40\,N}{9}$ & $\frac{10\,N}{3}$ − $\frac{100}{9}$ horum summæ semissis quadratus æquatus priori termino dat valorem $\frac{49}{11}$ vnde si tollas 5. restabit $\frac{132}{11}$ ergo numeri à quibus formabitur triangulum quæsitum sunt 493 & 132. & ipsum triangulum quæsitum est 260473. 225625. 130152.

Hinc solues sequens problema: Inuenire triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum sit numerus quadratus & alterius lateris simplum & duplum detractum sigillatim hypotenusæ relinquat quadratum, iidem enim numeri supra dati soluunt quæstionem neque dicas hanc conditionem mox additam esse inutilem cum omni triangulo rectangulo conueniat; nam & si conueniat omni triangulo, multiplicibus tamen non conuenit vt patet in sequente 624. 576. 240 nam vnum eius latus est numerus quadratus & duplum alterius lateris detractum hypotenusæ facit quadratum, nec tamen simplum illius additum hypotenusæ quadratum facit.

Inuenire triangulum rectangulum cuius area sublata ex quadrato summæ laterum circa rectum relinquat quadratum.

51 Ponantur duo latera circa rectum 1 N & 1. ergo illorum quadrata 1 Q + 1 facient quadratum hypotenusæ, area autem trianguli erit $\frac{1N}{2}$ quæ sublata de quadrato summæ laterum circa rectum relinquit 1 Q + 1 + $\frac{1N}{2}$ æquandum quadrato in hac duplicata æqualitate fit valor − $\frac{11}{4}$ pono ergo nouam radicem 1 N − $\frac{11}{4}$ & iuxta eam resoluo omnes particulas eorum terminorum qui mox æquati sunt quadratis fiuntque noui termini quadrato æquandi 1 Q − $\frac{22N}{16}$ + $\frac{121}{256}$ & 1 Q − $\frac{11N}{8}$ + $\frac{121}{256}$, duc primum terminum in $\frac{121}{256}$ sic enim reuocabuntur duo termini prædicti ad eundem vnitatum quadratum eruntque $\frac{14641}{256}$ − $\frac{2662N}{256}$ + $\frac{121}{256}$ & 1 Q − $\frac{11N}{8}$ + $\frac{121}{256}$ æquandi quadrato differentia illorum est $\frac{14520}{256}$ − $\frac{2640N}{256}$ quam producunt $\frac{165N}{64}$ & $\frac{110N}{64}$ − $\frac{100}{64}$ & fit valor $\frac{2420}{715}$ hinc tolle $\frac{11}{8}$ ob nouam radicem & extabit valor pro primis positionibus $\frac{1089}{260}$ igitur duo latera circa rectum quæ posita sunt 1 N & 1 erunt in integris 39655. 129648. & hypotenusa 135577. En triangulum quæsitum.

Inuenire triangulum rectangulum cuius tam vnum latus circa rectum quam summa laterum circa rectum sit quadratus, & in quo dupla area detracta alterutri laterum circa rectum faciat quadratum.

52 Ponantur latera 1 N & 1 − 1 N. duplum areæ est 1 N − 1 Q. quod detractum alterutri laterum facit quadratum: 1 Q & 1 + 1 Q − 2 N. præterea summa laterum est quadratum

tum, nempe vnitas, restat ergo vt secundum latus 1 − 1 N. & insuper summa quadratorum à lateribus 1 + 2 Q − 2 N. faciant quadratum & sit $\frac{2}{3}$ pro valore radicis igitur triangulum quæsitum est $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit cubus, à quo detractâ areâ relinquatur quadratus.

Ponantur latera circa rectum 1 N & 1, sic enim vnum latus cubus erit: ex eo cubo 53
tolle aream $\frac{1}{2}$ N. residuum 1 − $\frac{1}{2}$ N æquandum est quadrato, sed & 1 Q + 1 quadrato æquari debet, in ista duplicata æqualitate valor radicis est − $\frac{2}{3}$ pono igitur nouam radicem 1 N $\frac{2}{3}$ & iuxta illam resoluo singulas particulas terminorum quadratis æquatorum fiuntque noui termini quadrato æquandi $\frac{4}{9}$ − $\frac{2}{3}$ N & 1 Q + $\frac{4}{9}$ Q − $\frac{4}{9}$ N vbi vnitatum numeri sunt quadrati qui ad eundem quadratum vnitatum reducti faciunt 1 Q + $\frac{4}{9}$ Q $\frac{4}{9}$ N & $\frac{4}{9}$ Q − $\frac{4}{9}$ N quadrato æquandos, horum differentia est 1 Q − $\frac{8}{9}$ N quam producunt 1 N & 1 N − $\frac{8}{9}$ ergo valor est $\frac{8}{9}$ vnde si tollas $\frac{2}{3}$ ob nouam radicem relinquetur valor pro primis positionibus $\frac{8}{9}$ & fit triangulum quæsitum $\frac{8}{9}$. 1. $\frac{8}{9}$.

PARS SECVNDA.

De Triplicatâ æqualitate, & eius solutionibus infinitis.

1 VVlgare est duos terminos quibusdam conditionibus affectos æquari posse quadratis: sed hactenus inauditum fuit hoc ipsum perfici de terminis tribus; asserit tamen intrepidè Fermatius non tantum hoc non esse impossibile, verum etiam facilè posse fieri, traditque regulas certas quibus id præstetur, modo adsit vnum quadratum ex parte singulorum terminorum: hoc autem facit dupliciter, primo respectu radicum & vnitatum, secundo respectu quadratorum & radicum.

Præceptum generale ad soluendas triplicatas æqualitates.

2 Si fuerint tres termini æquandi quadrato, & sit in illis idem quadratus, cape certum quemdam numerum quadratorum & radicum, pro vnâ radice, hunc multiplica per numerum radicum in vno ex terminis datis existentem ita vt productus numero vnitatum iunctus, efficiat quadratum: & juxta illam nouam radicem resolue duos alios terminos, iisque resolutis adhibe duplicatam æqualitatem vulgarem: ita efficies valorem pro tribus posterioribus terminis, hunc valorem resolue per illum certum numerum quadratorum & radicum quem accepisti, & fiet valor quem quæris pro tribus terminis prioribus qui dati sunt.

3 Exemplum esto in tribus terminis sequentibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. & 1 + 5 N. æquandis quadrato, cape pro vna radice 1 Q + 2 N. hoc enim ductum in 1 numerum radicum facit 1 Q + 2 N & hic productus junctus vnitati facit quadratum 1 + 1 Q + 2 N. à latere 1 + 1 N tum juxta eandem radicem nouam resolue duos alios terminos 1 + 2 N & 1 + 5 N. & habebis duos terminos nouos 1 + 2 Q + 4 N & 1 + 5 Q + 10 N. æquandos quadrato, id facies, per methodum vulgarem capiendo istorum terminorum differentiam 6 N + 3 Q. quam producunt 3 N & 2 + 1 N. horum producentium summæ semissis quadratus 1 + 4 Q + 4 N. æquatus maiori termino 1 + 5 Q + 10 N. dat pro valore − 6 (hic numerus fictus æquabit quadratis tres posteriores terminos) hunc resolue per 1 Q + 2 N. quibus vsus es pro noua radice, hoc est cape quadratum − 6. nempe 26. quem connecte cum duplo − 6. nempe 12. ita enim fiet + 24. pro valore radicis in tribus prioribus terminis qui dati sunt eruntque tres illi termini quadrati 25. 49. 121. si accipias 24. pro 1 N.

4 Rursus data triplicata æqualitate 4 + 2 N. 4 + 3 N. 4 + 6 N. cape $\frac{Q}{4}$ + 2 N. pro noua radice, vt eo cossico ducto in 2 fiat 1 Q + 4 N. qui iunctus 4 facit quadratum 4 + 1 Q + 4 N. operare vt supra, & fiet valor pro triplicata æqualitate data $\frac{1}{1}$.

5 Simili prorsus ratione datis tribus terminis 9 + 1 N. 9 + 3 N. 9 + 5 N. æquandis quadrato, oportebit vti resolutione, capiendo 1 Q + 18 N. pro 1 N. & fient noui tres termini, quorum primus erit quadratus indefinite, ac proinde per duplicatam æqualitatem vulgarem, inuenies valorem radicis $\frac{36}{1}$.

Si numeri vnitatum sunt quadrati diuersi, haud difficilius soluetur triplicata æqualitas.

Vt si dentur tres termini 1 + 1 N. 4 + 3 N. 9 + 2 N æquandi quadratis reuocandi 6
erunt quadrati ad eundem, & perficietur operatio, vt dictum est; facile autem reuocabuntur ad eundem quadratum si tres illi multiplicentur inter se, sic ergo stabit triplicata æqualitas præcedens 36 + 36 N. 36 + 27 N. 36 + 8 N. quia enim 1 ducta est in 36. oportebit ducere in 36. numerum radicum qui illi iungitur & quia quadratus sequens 4 ducitur in 9 vt fiat 36. oportebit etiam numerum radicum 3. qui illi nectitur ducere in 4. vt fiat 36. necesse erit numerum radicum 2 illi annexum ducere in 4. vt fiant 8 N. at in istis posterioribus terminis valor est $\frac{;;;;;}{;;;;;}$ ergo & in prioribus, ille idem valor soluit quæstionem.

Hæc eadem praxis extenditur ad numeros diminutos.

Exempli causa si dentur tres termini 1 + 1 N. 1 − 2 N. 1 + 5 N. capiendo pro vna 7
radice 1 Q. + 2 N. reuocabuntur ad istos tres 1 + 1 Q + 2 N. 1 − 2 Q − 4 N. 1 + 5 Q + 10 N. & quoniam illorum trium primus est quadratus indefinite, erunt duo reliqui æquandi quadrato & fiet valor radicis $\frac{;}{;;}$ pro posterioribus terminis, ac pro prioribus $\frac{;;}{;;;}$.

Dantur infinitæ solutiones in triplicatis æqualitatibus.

Rem totam exemplo illustrabimus, quia enim supra dixi − 6 esse valorem 1 + 2 Q 8
+ 4 N. & 1 + 5 Q + 10 N. assumo 1 N − 6 pro noua radice, iuxta quam resoluo duos terminos superiores & fiunt noui termini 5 Q + 121 − 50 N & $\frac{;;}{;;}$ + 121 − $\frac{;;;}{;;;}$ N æquandi quadrato per methodum vulgarem, & fit pro valore radicis quidam numerus, vnde si tollas 6. (ob nouam radicem 1 N − 6) restabit valor $\frac{;;;;;;;;;;}{;;;;;;;;;;}$ & quia tres termini primitus dati erant 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. & sumpta erat noua radix 1 Q + 2 N. duplum valoris mox inuenti iunctum eius quadrato, exhibebit pro triplicata æqualitate valorem $\frac{;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;}{;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;}$ modo supponas denominatorem, & satisfacit plane, nam iste numerus additus vnitati facit quadratum, cuius latus est 262207680350. supposito denominatore 14716382219. duplum eiusdem numeri additum cum vnitate facit quadratum à latere 3403653106 7. supponendo eundem denominatore 1 minquintuplum autem illius numeri junctum vnitati, quadratum est a latere 507085373410. supposito eodem denominatore.

Cum maior numerus radicum æquatur duobus alijs radicum numeris, impossibilis est solutio triplicatæ æqualitatis per hanc methodum.

Sint, verbi gratia, termini tres 1 + 2 N. 1 + 3 N. 1 + 5 N. æquandi quadratis; 9
& capiatur pro vna radice 2 Q + 2 N. vt primus terminus per eam resolutus exhibeat

quadratum 1 + 4 Q + 4 N. duo autem alij termini resoluti exhibebunt 1 + 6 Q + 6 N 1 Q + 10 N. igitur si hæc duplicata æqualitas soluatur per methodum communem prodibit valor pro posterioribus terminis — 1 qui resolutus iuxta nouam radicem 29 + 2 N dat, 0, seu negationem numeri pro numero positiuo.

20 Idem dic de quacumque aliá duplicatá æqualitate istiusmodi, vbi aduerte dixisse me solutionem in eo casu impossibilem esse per hanc methodum, nam dari possunt plurimæ æqualitates triplicatæ huius generis quæ in se non sunt impossibiles: vt patet in sequente 1 + 5 N. 1 + 16 N. 1 + 21 N. vbi valor radicis est 3 iuxta quem resoluti termini dant tres quadratos 16. 49. 64.

21 Hic etiam aduertendum est cum nostro Fermatio triplicatam æqualitatem 1 + 1 N. 1 + 2 N 1 + 3 N. esse impossibilem duobus modis, & essentialiter & methodicè: essentialiter quidem quia demonstratur non posse dari quatuor quadratos in continua proportione arithmetica quod tamen inde sequeretur, proponendo vnitatem: est quoque solutio hic impossibilis methodicè, quia licet in se foret possibilis, non posset solui per methodum allatam eo quod numerus major radicum æquatur duobus aliis radicum numeris.

22 Hæc tamen cautio intelligenda est dum numerus quadratus vnitatum est vnus & idem quadratus, quia si essent diuersi quadrati pro numero vnitatum, posset numerus maior radicum æquari duobus alijs vt patet in tribus terminis sequentibus 1 + 1 N. 9 + 2 N. 4 + 3 N. vbi radicis valor reperitur per nostram methodum $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$.

Triplicata æqualitas potest solui etiam si constet solis quadratis & radicibus, modo numerus quadratorum sit quadratus.

23 Sint exempli causa tres 1 Q + 1 N. 1 Q + 2 N. 1 Q + 5 N. æquandi quadrato, reduci potest illa æqualitas ad præcedentem constantem vnitatibus & radicibus 1 + 1 N. 1 + 2 N. 1 + 5 N. in qua ex præcedentibus valor est 24. per hunc valorem diuide vnitatem & fiet valor quæsitus $\frac{1}{24}$. Ratio huius rei est quia si illic loco 1 N. capias $\frac{1}{24}$ primus terminus qui fiet 1 Q + 1 N. erit $\frac{1}{576}$ + $\frac{1}{24}$ & secundus $\frac{1}{576}$ + $\frac{1}{24}$ tertius autem $\frac{1}{576}$ + $\frac{1}{24}$ hi tres æquari debent quadratis; duc illos in 1 Q & fient 1 + 1 N. 1 + 2 N & 1 + 5 N. æquales quadratis, etenim quadrati ducti in quadratum faciunt quadratos. Igitur reducta est triplicata æqualitas constans quadratis & radicibus, ad triplicatam æqualitatem constantem radicibus & vnitatibus debetque vnitas diuidi per valorem numeri quia $\frac{1}{24}$ sumpta est pro 1 N.

24 Sic data triplicata æqualitas 4 Q + 2 N. 4 Q + 6 N. 4 Q + 9 N. conuertetur in istam 4 + 2 N. 4 + 6 N. 4 + 9 N. & quia in posteriori valor est $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ per hunc diuidendo vnitatem, erit in priori valor $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ similiter data triplicata æqualitas 1 Q + 2 N. 4 Q + 3 N. 16 Q + 6 N. conuertetur in istam 1 + 2 N. 4 + 3 N. 16 + 6 N. in qua valor est $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ ergo si per hunc diuidas vnitatem fiet $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ pro valore prioris, denique si detur 1 Q + 1 N. 4 Q + 3 N. 9 Q + 2 N. conuertes illam in + 1 N. 4 + 3 N. 9 Q + 2 N. vbi valor est $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ igitur per hunc diuidendo vnitatem fiet $\frac{\text{illegible}}{\text{illegible}}$ pro data æqualitate triplicatá.

25 Aduerte compendiosè admodum procedi posse dum non datur idem, sed alius numerus quadratorum quam vnitas, si intactis radicibus, reducatur quadratum ad vnitatem & postea valor inuentus diuidatur per quadratum datum: ut si detur 9 Q. + 9 N. 9 Q + 24 N. 9 Q + 72 N. intactis radicibus pro 9 Q substitue 1 Q vt vides 1 Q + 9 N. 1 Q + 24 N. 1 Q + 72 N. vbi valor est 3. quo diuiso per quadratum 9. fit $\frac{1}{3}$

pro valore prioris æqualitatis, si eundem valorem 3. diuidas per 16 fiet valor $\frac{3}{16}$. pro triplicata æqualitate sequēte 16 Q + 9 N. 16 Q + 24 N. 16 Q + 82 N. & sic de aliis omnibus.

Per triplicatam æqualitatem soluuntur quadruplicatæ, quintuplicatæ & millecuplicatæ æqualitates.

Detur verbi gratia æqualitas quadruplicata sequens 64 + 20 N. 16 + 12 N. 4 + 8 N. 1 + 2 N. reductis quadratis ad eundem quadratum vt dictum est, fit noua æqualitas 64 + 20 N. 64 + 48 N. 64 + 128 N. pro 1 N cape $-\frac{48}{64}$ + 1 N. vt iuxta illam resoluti duo numeri æquales faciant quadratum & fiet tandem per methodum supra traditam, (præter 4 qui est obuius valor) 8320. qui soluet æqualitatem datam. 16

Non aliter disponi potest quintuplicata æqualitas constans diuersis quadratis & radicibus, ita tamen, vt reducti quadrati ad eundem, faciant tres numeros æquales & reliquos duos inæquales vti videre est in sequente 1 + 2 N. 4 + 8 N 16 + 32 N. 64. + 20 N. 256 + 36 N. vbi valor est 4. & $\frac{1}{4096}$ hoc eodem modo disponetur centuplicata æqualitas, & ita in infinitum. 17

Ex prædictis soluere infinities & quidem facile, quæ Diophantus & Bachetus per intricatissimas methodos soluunt.

Dentur æquandi quadrato 16 + 1 N & 16 + 2 N. pro 1 N. cape 1 Q + 8 N. vt hoc modo primus numerus fiat quadratus indefinitè 16 + 1 Q + 8 N à latere 4 + 1 N. ergo alter numerus erit 16 + 2 Q + 16 N. æquandus quadrato (fingi autem potest latus infinities) finge 4 − 2 N. & fiet valor 16. cuius quadratum cum octuplo 16 (ob 1 Q + 8 N.) pro noua radice dat valorem quæsitum 384. 18

Dentur iterum 16 − 1 N & 16 − 5 N. æquandi quadrato, cape pro noua radice 8 N − 1 Q. & iuxta illam termini resoluti sic stabunt 16 + 1 Q − 8 N. & 16 + 5 Q − 40 N. quorum prior est quadratus, igitur solus posterior æquandus quadrato, finge latus 4 − 7 N. & fit valor $\frac{4}{11}$ ergo eius octuplum multatum quadrato ipsius, (ob nouam radicem 8 N − 1 Q dat valorem quæsitum $\frac{176}{121}$. 19

Rursus, datis pro tertio casu æquandis quadrato 16 + 1 N. & 16 − 1 N. cape pro noua radice 1 Q + 8 N. vt primus terminus sit 16 + 1 Q + 8 N. quadratus igitur secundus terminus erit 16 − 1 Q − 8 N. æquandus quadrato, finge latus 4 − 2 N & fit valor $\frac{8}{17}$ cuius octuplum cum ipsius quadrato (ob nouam radicem 1 Q. + 8 N.) dat valorem quæsitum $\frac{4352}{289}$. 20

Quæstiones duodecim circa hactenus dicta in secunda parte.

Quot exempla dedimus, tot problemata præparauimus. Vnicum ex multis proferam, quod est eiusmodi. Inuenire alium numerum quam 24. cuius simplum duplum, & quintuplum additum vnitati, faciat tres quadratos, solutionem huius quæstionis habes supra sub titulo solutionum infinitarum, estque numerus quæsitus fractio cuius 21

numerator 4709567707295783972 64. & denominator 21657190561569936396 1. imò si vis quæstionem in integris proponi, sic stabit: Inuenire alium quadratum integrum quam vnitatem cui additum simplum, duplum & quintuplum cuiuspiam numeri integri faciat quadratos, sed propter hoc, subnecto alia.

Inuenire tres cubos quorum summa juncta tribus numeris eandem cum cubis proportionem habentibus faciat quadratos.

22 Cape tres priores cubos 1. 8. 27. quorum summa 36. addatur sigillatim cubis prædictis charactere radicum affectis, eruntque 36 + 1 N. 36 + 8 N & 36 + 27 N. æquandi quadrato, eligatur pro vna radice 1 Q + 12 N. vt prior numerus iuxta eam resolutus, sit quadratus à latere 6 + 1 N. absolutâ operatione inuenietur valor radicis $\frac{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot\cdot}$.

Inuenire alium numerum quam quaternarium cujus duplum, octuplum, duotrigecuplum, vigecuplum, & trigesecuplum additum quinque quadratis continuè proportionalibus, faciat quadratos.

23 Eligantur quadrati sequentes, & deuentum sit ad æqualitatem quintuplicatam quæ sic stat: 1 + 2 N. 4 + 8 N. 16 + 32 N. 64 + 20 N. 256 + 36 N. reducta illa ad eundem quadratum, erit æqualitas quæ sequitur: 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 512 N. 256 + 80 N. 256 + 36 N. vbi proinde est ac si daretur triplicata æqualitas, & fit per methodum superiorem, 1 N. æqualis $\frac{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ quæ soluet quintuplicatam æqualitatem primo inuentam.

Inuenire tres numeros quadratos quorum summa iuncta sigillatim tribus illorum lateribus faciat quadratos.

24 Eligantur tres quadrati, quorum summa sit quadratus, & tales, vt maius latus ipsorum superet reliqua duo latera: istiusmodi sunt 4. 36. 81. hi enim simul additi faciunt 121. quare tres quæsiti numeri sint 4 Q. 36 Q. 81 Q. quorum summa addita sigillatim ipsorum lateribus facit 121 Q + 2 N. 121 Q + 6 N. 121 Q + 9 N. æquandos quadratis, & fit valor radicis $\frac{\cdot\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot\cdot}$ iuxta quem resoluti numeri superiores exhibent quadratos & satisfaciunt quæstioni.

Inuenire tres quadratos diuerſos, quorum ſingulis ſi addantur tres numeri harmonice proportionales, fiant quadrati.

Hoc curandum, vt maximus trium harmonice proportionalium ſuperet duos reliquos, quare tres termini $1 + 2$ N. $4 + 3$ N. & $16 + 6$ N. æquantur quadrato, reductis illis per methodum ſuperiorem erunt $16 + 32$ N. $16 + 12$ N. $16 + 6$ N. æquandi quadrato, cape pro vna radice $\frac{12}{7} + \frac{4}{7}$ N & abſolue operationem vt ſupra diximus & fiet valor pro priori æqualitate triplicata $\frac{20736}{4761}$. 25

Inuenire tres numeros vt interuallum duorum maiorum ad interuallum duorum minorum datam habeat rationẽ, ſed & bini ſumpti quadratum conſtituant. Detur ratio tripla.

Hæc eſt quæſtio quadrageſima quinta libri quarti Diophanti quâ nulla eſt prolixior, & intricatior apud hunc authorem; cape aliquem quadratum pro ſumma medij & minoris, puta 4. ſitque medius $2 + 1$ N & minor $2 - 1$ N. horum differentia eſt 2 N. cuius triplum 6 N (quia datur ratio tripla) addatur medio & fiet major $2 + 7$ N. quare ſupereſt vt ſumma maioris & medij $4 + 8$ N. & ſumma maioris & minoris $4 + 6$ N. æquetur quadrato pro vna radice, cape $\frac{8}{7} + \frac{6}{7}$ vt hæc ducta in 6 (numerum radicum in poſteriori termino efficiat $1 Q + 4$ N. qui cum 4 facit quadratum, à latere $2 + 1$ N. hæc eadem radix noua ducta in 8. (numerum radicum in priori termino) facit productum qui additus 4. dat ſummam $4 + \frac{48}{7} + \frac{16}{7}$ N æquandam quadrato: huius quadrati poteſt fingi latus infinitis modis. Finge à latere $2 + \frac{4}{7}$ N & fit valor qui reſolutus per nouam radicem vt diximus dat valorem quæſitum $\frac{144}{119}$ & tres quæſiti numeri erunt $\frac{476}{119}$ $\frac{544}{119}$ $\frac{612}{119}$. 26

Inuenire duos numeros quorum ſumma aucta vel multata differentia eorum aut differentia quadratorum ab illis, faciat quadratum.

Sint duo illi numeri $\frac{1}{2} + 1$ N & $\frac{1}{2} - 1$. ſic enim differentia numerorum, & differentia quadratorum erit 2 N. igitur ſupereſt vt ſumma numerorum aucta & multata 2 N. æquetur quadrato, eritque ſequens duplicata æqualitas $1 + 2$ N & $1 - 2$ N. cape $\frac{8}{9} + 1$ N pro noua radice vt hac ducta in 2. & producto addito vnitati, fiat quadratus $1 + 1 Q + 2$ N. pro priore termino, igitur ſecundus terminus erit $1 - 1 Q - 2$ N. æquandus quadrato, finge latus $1 - 3$ N. & fiet valor primus $\frac{8}{9}$ pro poſterioribus terminis, hic additus dimidio ſui quadrati (ob nouam radicem ſumptam $\frac{8}{9} + 1$ N.) dabit $\frac{25}{17}$ valorem quæſitum, ergo iuxta poſitiones duo numeri quæſiti erunt $\frac{25}{17}$ & $\frac{1}{17}$. 27

Inuenire quatuor numeros, quorum tria sint quadrata, atque insuper productus duorum quorumcumque auctus vnitate faciat quadratum.

28 Inueniendi primum ex Diophanto l. 5. Q. 27. tres quadrati quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum: tales sint $\frac{1}{4}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{25}{4}$, ponatur quartus quæsitus 1 N. retentis illis tribus pro primo, secundo & tertio; certum est productum primi in secundum & secundi in tertium, & tertij in primum, fore quadratum, restat ergo, vt productus quarti in illos tres adscita vnitate faciat quadratum igitur $\frac{9N}{4}+1$ & $\frac{25N}{4}+1$ & $\frac{225N}{4}+1$ æquantur quadratis, ponatur iuxta præceptum $\frac{15}{4}+\frac{1N}{4}$ pro valore 1 N. vt numerus radicum qui est in primo termino istum multiplicans faciat 1 Q + 2 N. qui cum vnitate constituat quadratum, à latere 1 + 1 N tum reliqui numeri radicum, qui sunt in duobus aliis terminis ducantur in eundem, & producti nectantur cum vnitate, fientque $1+\frac{225}{4}+\frac{225N}{4}$ & $1+\frac{625}{4}+\frac{625N}{4}$ æquandi quadrato, ergo cum numeri vnitatum (imò & quadratorum sint quadrati) potest solui duplicata illa æqualitas per methodum vulgarem, & inuenietur valor radicis pro quarto numero quæsito.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenusa in summam laterum circa rectũ sit quadratus, atque insuper quadratum hypotenusæ iunctum alterutri ex duobus lateribus circa rectum & duplo hypotenusæ, faciat quadratum.

29 Cape triangulum rectangulum in quo tam hypotenusa quam summa laterum circa rectum sit quadratus: (vt dictum est in prima parte n. 45.) & necte singulis lateribus characterem radicum, sic enim peruenies ad æquationem, & reperies quod quæritur. Enimuero productus ex hypotenusa in summam laterum quadratus erit quare si quadratum hypotenusæ nectas cum alterutro latere circa rectum, & cum duplo hypotenusæ fiet triplicata æqualitas, quæ soluetur per ea quæ dicta sunt num. 13.

Inuenire triangulum rectangulum tale vt quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri circa rectum, & dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum.

30 Esto datus multiplex hypotenusæ, duplus: & ponatur triangulum quæsitum 3 N. 4 N. 5 N. ergo 144 Q + 3 N. 144 Q + 4 N. & 144 Q + 10 N. æquantur quadrato. Hic valor radicis per ea quæ dicta sunt supra num. 13. est $\frac{1}{144}$ igitur triangulum rectangulum quæsitum erit $\frac{9}{144}$. $\frac{16}{144}$. $\frac{25}{144}$.

Inuenire

Inuenire triangulum rectangulum tale vt productus ex hypotenusa in differentiam laterum circa rectum sit quadratus, & quadratus perimetri iuncti alterutri laterum circa rectum, vel dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum. Esto datus multiplex duplus.

Cape pro triangulo primitiuo 119. 120. 169. in quo hypotenusa & differentia laterum circa rectum est quadratus: hos numeros necte characteri radicum, & fiet summa 408. N. ergo eius quadratus iunctus cuilibet lateri circa rectum & duplo hypotenusæ dat tres numeros 166464 Q. + 119 N. 166464 Q + 120 N. 166464 Q + 338 N. æquandos quadrato, reliqua sunt facilia ex num. 13. 31

Inuenire triangulum cuius vnum latus circa rectum si ducatur in differentiam eiusdem lateris & areæ faciat quadratum & quadratus perimetri junctus alterutri circa rectum & dato multiplici hypotenusæ faciat quadratum.

Capiatur ex prima parte num. 53. triangulum rectangulum in quo vnum latus circa rectum est vnitas, & differentia illius vnitatis & area sit quadratus, tum perimetri capiatur quadratus & nectatur singulis lateribus circa rectum affectis charactere radicum & cuilibet multiplici hypotenusæ, efficieturque problema propositum ex dictis num. 13. 32

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum si ducatur in summam laterum efficiatur quadratus & quadratus perimetri iunctus cuilibet lateri ex tribus faciat quadratum.

Capiatur aliquod triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum & summa laterum sit quadratus numerus, tale est 40. 9. 41. tum singula latera affecta charactere radicum nectantur quadrato perimetri & tres numeri 8100 Q + 40 N. 8100 Q + 9 N. 8100 Q + 41 N. æquentur quadratis, eritque absolutum problema, neque dicas id repugnare iis quæ dicta sunt num. 9. & sequentibus vbi asseruimus quæstiones esse impossibiles per artem Fermatianam dum maior numerus radicum æqualis est duobus alijs radicum numeris, vnde fortasse videbitur alicui multo magis repugnare dum numerus maior superatur à duobus alijs simul sumptis: illud enim in quocumque casu inæqualitatis non est impossibile, vt laborioso analystæ planum fiet. 33

PARS TERTIA.

Complectens artem eliciendi radices infinitas ex numeris plures ſpecies habentibus, quam tres.

1 AGam hic potiſſimum de numeris continentibus quinque ſpecies quæ vocantur quadrato-quadrata, cubi, quadrata, radices, & vnitates & occaſione illorum, dicam quoque de quatuor ſpeciebus, ſiue habeant vbique ſigna poſitiua, ſiue etiam habeant intermixta negatiua: finis autem huius tractationis eſt æquare eiuſmodi numeros vel quadratis vel cubis, idque infinities: illud vero in vniuerſum dici poteſt eſſe neceſſarium, vt ſaltem vel quadratoquadratorum, vel vnitatum numerus ſit quadratus pro radice quadratâ, ſicut etiam neceſſe eſt vt cuborum vel vnitatum numerus ſit cubus, pro radice cubicâ.

Quadrato æquare numerum compoſitum ex quinque ſpeciebus in quo ſolus quadratoquadratorum numerus eſt quadratus.

2 Curandum in primis vt tam in numero æquando quam in æquante ſit idem numerus quadratoquadratorum, cuborum, & quadratorum: quod vt fiat, capietur primo latus quadratum numeri quadrato-quadratorum, vt ſit vna particula lateris quæſiti: deinde per illius duplum diuidetur numerus cuborum qui eſt in numero æquando, & quoties affectus charactere radicum, erit ſecunda particula lateris quæſiti: tertio capta differentia quadrati quod naſcitur ex iſtâ ſecundâ particulâ, & quadratorum in numero æquando exiſtentium, diuidetur per idem duplum lateris ſupradicti, vt habeatur tertia particula ex vnitatibus conſtans. Huius lateris quadratum in numero dato æquatum dabit radicem quæſitam: Vt ſi detur numerus 1 QQ + 4 C + 6 Q + 2 N + 7 æquandus quadrato, capies 1 Q + 2 N + 1 (ſic enim obſeruantur omnia præcepta mox tradita) & huius lateris quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1 æquatum numero dato exhibebit 3 pro valore radicis, juxta quam reſolutus numerus datus efficiet quadratum 256.

Quadrato æquare numerum quinque ſpeciebus conſtantem, in quo ſolus vnitatum numerus eſt quadratus.

3 Aduerte hic contra fieri ac in præcedente, nam id curandum præcipuè, vt æquales ſint inter ſe vtrinque vnitates, radices & quadrati, quare capies latus quadratum

numeri vnitatum, pro prima particula lateris, & per eius duplum diuides numerum radicum quotiensque erit secunda particula lateris; tum differentia quadratorum numeri æquandi, & eorum qui nascuntur ex radice mox inuenta, diuidatur per idem duplum latus, vt fiat numerus quadratorum in æquante ponendus, sic conficietur latus quadrati, quod si æquetur numero dato, exhibebit valorem radicis. Vt si detur numerus 10 QQ + 4 C + 19 Q + 6 N + 9 æquandus quadrato finges latus 3 + 1 N + 3 Q (sic enim omnia præcepta mox tradita obseruantur) & eius quadratum 9 + 6 N. + 19 Q + 6 C + 10 QQ æquabis numero dato fietque valor 2. iuxta quem resolutus ille numerus exhibebit 289.

Multipliciter æquare quadrato numerum ex quinque speciebus compositum in quo tam quadratoquadrata quam vnitates habent numerum quadratum.

Primo fingi potest latus tale vt vtrinque in numeris æquandis reperiantur vnitates radices & quadrato-quadrata æqualia: vt si detur æquandus quadrato 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N. + 1. finge latus 1 + 10 N + 1 Q huius quadratum est 1 + 20 N + 102 Q + 20 C + 1 QQ ergo cum tres species se elidant restabit æquatio inter − 924 & 16 C. diuides − 92 per 16. & fiet pro valore radicis $\frac{23}{4}$ iuxta quem resolutus datus numerus dabit quadratum $\frac{279841}{256}$. 4

Secundo fingi potest latus tale, vt reperiantur vtrinque æquales vnitates radices & quadrati: vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 + 10 N − 45 Q. cuius quadratum æquatum numero dato relinquet cubos & quadrato-quadratos, ergo cum sint species collaterales & proximæ fiet valor radicis $\frac{1}{11}$ iuxta quem datus numerus quadratus erit à latere $\frac{441}{121}$. 5

Tertio fingi potest latus tale, vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates, æquales vtrinque reperiantur: Vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 1. & eius quadratum relinquet quadrata & radices ad æquationem, fietque − 4. pro valore radicis iuxta quem resolutus qui datus est numerus exhibebit quadratum 81. 6

Quarto fingi potest latus tale, vt quadratoquadrati, cubi & quadrati vtrinque sint æquales: vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges latus 1 Q + 2 N + 3. & ex punctis æqualibus restabunt radices & vnitates inter se æquandæ, & fiet tandem post diuisionem 1. primo valore radicis resolutusque iuxta eum numerus datus exhibebit quadratum 36. 7

Quinto fingi potest aliud latus ab eo quod supra fictum est ita vt vnitates radices & quadrato-quadrati vtrinque reperiantur æquales: Vt si detur idem numerus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 æquandus quadrato, finges 1 + 10 N − 1 Q & fiet valor radicis $\frac{11}{7}$ iuxta quem datus numerus erit quadratus à latere $\frac{441}{49}$. 8

Sexto fingi potest latus aliud ab eo quod supra fictum est ita vt quadrato-quadrati, cubi, & vnitates sint æquales: vt dato eodem numero 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 finges 1 Q + 2 N − 1 & continget valor radicis − 3 iuxta quem resolutus superior numerus exhibebit quadratum 40. 9

Omitto reliqua latera quæ fingi possunt, vt 1 Q − 3 & 1 − 2 N 1 Q & 1 − 10 N − 1 Q & 45 Q − 10 N − 1 & − 1 − 2 N − 1 Q. quia licet dent aliquos valores, illi tamen non differunt ab iis, quos exhibuimus. 10

Quid sint radices deriuatiuæ & quomodo eruantur.

11 Duplex est genus radicum: aliæ enim sunt primitiuæ aliæ vero deriuatiuæ: primitiuæ sunt illæ quæ immediatè eruuntur ex numero dato, vt sunt illæ quas mox elicuimus: deriuatiuæ autem sunt illæ quæ ex primitiuis oriuntur: & quidem si ex primitiuis immediatè oriuntur, sunt deriuatiuæ primi gradus: si eliciũtur ex deriuatiuis primi gradus, erunt deriuatiuæ secundi gradus: si eliciuntur ex deriuatiuis secundi gradus, dicentur deriuatiuæ tertij gradus, & sic in infinitum. Aduerte autem ex radicibus fictis posse elici veras, & ex veris fictas, vti ex sequentibus manifestum erit.

Eruere radices deriuatiuas primi gradus ex quacumque primitiua.

12 Iunge 1 N. radici primitiuæ cum suo signo, siue habeat plus, siue habeat minus, illud conflatum sumatur pro radice noua & iuxta illam resoluantur singulæ particulæ componentes numerum datum: omnium illorum summa æquetur quadrato fingendo illius latus, vt dictum est valorque repertus nectatur radici primitiuæ, ita extabit radix quæsita, vt si eruenda sit radix deriuatiua primi gradus ex numero supradicto 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1. cape − 3 vnam ex primitiuis radicibus, & necte cum 1 N. vt fiat 1 N − 3. tum iuxta 1 N − 3 resolues 1 QQ & 4 C. & 10 Q. & 20 N. quibus nectes numerum vnitatum vt hic vides.

1 QQ	+ 1 QQ − 12 C + 54 Q − 108 N + 81
4 C	+ 4 C − 36 Q + 108 N − 108
10 Q	+ 10 Q − 60 N + 90
20 N	20 N − 60
1	+ 1
summa	+ 1 QQ − 8 C + 28 Q − 40 N + 4

13 Hæc summa æquari debet quadrato: finge latus 1 Q − 4 N − 2 & fiet pro valore radicis in ista summa $\frac{1}{2}$ & quia posita est noua radix 1 N. − 3 ex $\frac{1}{2}$ tolles 3. restabitque $\frac{1}{2}$ pro valore radicis in numero dato, quare iuxta istam resolutus numerus datus erit $\frac{1}{16}$ quadratus à latere $\frac{1}{4}$.

14 Eandem summam quadrato æquabis fingendo latus 1 Q − 10 N + 2. eius enim quadratum æquatum prædictæ summæ, dabit $\frac{1}{2}$ pro valore radicis in summa, vnde si tollas 3. restabit $\frac{5}{2}$ pro valore radicis in numero dato, ergo numerus datus erit $\frac{1}{400}$ quadratus à latere $\frac{1}{20}$.

15 Rursus finge latus 2 − 10 N − 1 Q & fiet valor pro summa − $\frac{1}{2}$ & tollendo 3 extabit valor radicis pro numero dato − $\frac{7}{2}$ igitur iuxta hunc valorem resolutus numerus datus exhibebit $\frac{49}{400}$. quadratus à latere $\frac{7}{20}$.

16 Quarto finge latus 2 − 10 N − 18 Q & fiet valor $\frac{1}{100}$ pro summa, vnde si tollas 3. fit valor pro numero dato $\frac{301}{100}$.

Posset etiam fingi latus 1 Q + 2 − 4 N vel 4 N − 2 − 1 Q. sed vtrinque ex illa æquatione proueniret 3 pro summa prædicta & pro numero dato proueniret 0, quod est triuolum, & ad institutum nostrum inutile.

Dixi præterea vnam ex radicibus primitiuis esse − 4. ex hac sic erues deriuatiuas re- 17
solues primo numerum datum 1 QQ + 4 C + 10 9 + 20 N + 1 iuxta nouam radicem 1 N − 4. vt factum est primitus in resolutione eiusdem numeri iuxta radicem 1 N − 3 & fiet summa 1 QQ − 12 C + 58 Q − 124 N + 81 æquanda quadrato finge latus 1 Q + 9 − 6 N & fiet valor pro numero dato $\frac{1}{2}$. Finge aliud latus 1 Q + 9 − $\frac{41N}{2}$ & fiet valor $\frac{1}{20}$. Finge tertium latus 9 − $\frac{41N}{2}$ + $\frac{441}{20}$ & fiet valor $\frac{1}{41441}$. iterum finge latus 9 − $\frac{41N}{2}$ − 1 Q & fiet valor − $\frac{1}{41}$ potuit rursus fingi latus 1 Q + 9 − 6 N. vel 6 N − 9 − 1 Q. sed inde fieret valor pro summa facta 4. & pro numero dato, 0. quod est inutile ad rem nostram.

Dictum est insuper vnam ex radicibus primitiuis numeri dati esse − $\frac{1}{2}$ igitur noua ra- 18
dix erit 1 N − $\frac{1}{2}$ iuxta quam resolutus numerus datus, vt fecimus supra dabit summam 1 QQ − 19 C + $\frac{1519}{16}$ $\frac{2151N}{8}$ + $\frac{11441}{16}$. æquandam quadrato. Finge latus 1 Q − $\frac{19}{4}$ − $\frac{151}{8}$ & fiet valor $\frac{1}{16}$. ex alio latere 1 Q + $\frac{151}{8}$ $\frac{19N}{4}$ prodibit valor $\frac{1}{16}$. ex ficto latere 1 Q + $\frac{151N}{8}$ − $\frac{361}{16}$. prodit valor $\frac{1}{1024}$. Iterum prodibit alius valor ex ficto latere $\frac{361}{16}$ − $\frac{151N}{8}$ + $\frac{11441}{1024}$.

Atque hoc quidem de radicibus primitiuis quæ habent signum minus; eodem au- 19
tem modo agendum de iis quæ habent signum plus; vt quia diximus 1 esse vnam radicem primitiuam, fingenda erit noua radix 1 N + 1. & iuxta illam resoluendus numerus datus, habebiturque summa æquanda quadrato 1 QQ + 8 C + 28 Q + 56 N. + 36. finge latus 1 Q + 6 + $\frac{1N}{2}$. & prodibit valor − $\frac{1}{4}$. finge aliud latus 1 Q − 6 − $\frac{1N}{2}$. & fiet valor − $\frac{1}{64}$. tertio si fingas latus 6 + $\frac{1N}{2}$ + $\frac{1}{64}$ exhibit valor $\frac{1}{1024}$.

Rursus vna ex primitiuis radicibus est $\frac{1}{2}$. igitur si capias pro noua radice 1 N + $\frac{1}{2}$. & 20
iuxta eam resoluas numerum datum vt dictum est n. 12. fiet summa 1 QQ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{256}$ + $\frac{1N}{128}$ + $\frac{1}{1024}$ æquanda quadrato. Finge latus 1 Q + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1N}{32}$ & fiet valor $\frac{1}{32}$ finge aliud latus $\frac{1}{32}$ − $\frac{1}{32}$ − 1 QQ & fiet valor $\frac{1}{16}$ finge aliud latus 1 Q + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1N}{32}$ & fiet valor 1. finge aliud latus $\frac{1}{32}$ + $\frac{1N}{32}$ − 1 Q. & fit valor $\frac{1}{1024}$.

Pari modo ex vltima radice primitiua habente signum plus, fiet noua radix 1 N + 21
$\frac{1}{32}$. secundum quam resolutæ particulæ numeri dati exhibebunt summam æquandam quadrato, & fingendo diuersa latera vt hactenus factum est habebuntur noui valores.

Eruere radices deriuatiuas secundi gradus & tertij & quarti, & sic in infinitum.

Sicut ex radicibus primitiuis elicuimus deriuatiuas primi gradus ita ex deriuatiuis 22
primi gradus elici possunt deriuatiuæ secundi, vt quia vna ex deriuatiuis primi gradus est $\frac{1}{2}$ capienda erit noua radix 1 N + $\frac{1}{2}$ & iuxta eam resoluendus numerus datus 1 QQ + 4 C + 10 Q + 20 N + 1 summa ex hac resolutione nata 1 QQ + 6 C + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{256}$ æquanda est quadrato, finge latus 1 Q + 3 N + $\frac{1}{4}$ eritque radix deriuatiua secundi gradus quia nascitur ex radice deriuatiua primi gradus.

Non aliter ex ista poteris eruere aliam ponendo pro noua radice 1 N − $\frac{1}{2}$ siquidem 23
iuxta eam resolutæ singulæ particulæ numeri dati faciunt 1 QQ − 38 C + $\frac{1521}{16}$ − $\frac{1521N}{8}$ + $\frac{11441}{16}$ hæc summa æquanda erit quadrato. Finge latus 1 Q − 19 N − $\frac{151}{8}$ & fiet valor pro summa $\frac{1}{16}$ vnde si tollas $\frac{1}{16}$. relinquetur valor pro numero dato $\frac{1}{16}$ estque radix deriuatiua tertij gradus quia prodit ex radice deriuatiua gradus secundi. Ita poteris elicere radicem deriuatiuam gradus quarti, quinti, sexti, & sic in infinitum.

Quadrato æquare numerum compositum ex quatuor speciebus, dum numerus vnitatum vel quadrato-quadratorum, quadratus est.

24 Sint 20 C + 5 Q + 40 N. + 16 æquandi quadrato. Finge latus 4 + 5 N. & numerus radicum & vnitatum idem fiat ex vtraque parte, & fiet 1 pro valore radicis: hoc posito inuenies radicem deriuatiuam, ponendo vt supra, pro noua radice 1 N + 1 & iuxta illam resoluendo numerum primarium 20 C + 40 N + 16. vt sæpius factum est, summa enim ex hac resolutione nata 20 C + 65 Q + 110. N + 81 æquari debet quadrato, fingendo latus 9 + $\frac{45}{11}$ N & fiet valor pro summa — $\frac{324}{121}$ & pro numero primario — $\frac{81}{121}$ tertio ex hac deriuatiua primi gradus perges ad deriuatiuam secundi gradus fingendo pro noua radice 1 N. — $\frac{9}{11}$ & juxta illam resoluendo singulas particulas numeri primarij, ita enim fiet noua summa æquanda quadrato, & finges latus quadrati $\frac{45}{11}$ — $\frac{1215}{1331}$ N & proueniet radix deriuatiua secundi gradus + $\frac{2187}{14641}$.

25 Esto jam numerus quadrato-quadratorum quadratus, & sic æquandum quadrato 1 QQ + 4 C — 3 Q + 2 N. finge latus 1 Q + 2 N. vt duo majores characteres elidantur & fiant 7 Q. æquales 2 N. ita fiet valor $\frac{2}{7}$ (propter vnitatem quæ est altera radix eiusdem numeri) ergo potest poni noua radix 1 N + $\frac{2}{7}$ vel 1 N + 1 pro radicibus deriuatiuis.

26 Tertio licet omittatur aliqua species intermedia, potest numerus compositus ex quatuor speciebus quadrato æquari: ita æquabis 16 + 24 N + 16 C + 5 QQ fingendo latus 4 + 3 Q. & fiet valor 4. Vnde pro deriuatiua poterit poni 1 N + 4 simili ratione si detur 1 QQ + 600. + 800 N + 50000. finges latus quadrati 1 Q + 300 extabitque valor 5. & poni poterit pro radice deriuatiua 1 N + 5.

Potest æquari cubo numerus compositus ex quatuor speciebus modo numerus vnitatum vel cuborum sit cubus.

27 Enimuero si vnitatum numerus cubus est sumpto eius latere cubico pro numero absoluto radicis fictæ, diuides radices quæ sunt in termino æquando per triplum quadratum prædicti lateris cubici & ita componetur radix ficta ex latere & quotiente prædicto cum signis debitis: vt si detur æquandus quadrato 2 C. + 1 Q + 3 N + 1. finges pro latere 1 + 1 N (est enim 1 latus cubicum vnitatis, 1 N. autem est quotiens natus ex diuisione 3 N. per 3. triplum quadratum vnitatis) ergo cubus illius 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatus numero dato, exhibet 2 pro valore radicis vnde per radicem deriuatiuam poteris assumere 1 N. + 2. pro noua radice.

28 Quod si numerus cuborum est sumpto eius latere diuides numerum quadratorum per triplum quadratum illius lateris & fiet altera pars eligenda: vt si detur æquandus cubo 8 C + 24 Q + 2 N + 48. finges latus 2 N + 2 (est enim 2 N latus cubicum 8 C. 2 vero est quotiens ortus ex diuisione 24 per 12 triplum quadratum numeri 2.) eius cubus 8 C + 24 Q + 24 N. + 8. æquatus dato numero exhibet $\frac{2}{7}$ pro valore radicis, vnde facile est colligere radices deriuatiuas.

Digitized by Google

Si vterque numerus tam vnitatum quam cuborum cubus est, potest triplici modo æquari cubo numerus datus.

Detur enim verbi gratia 1 C + 2 Q + 4 N. 1 æquandus cubo & capiatur 1 N + 1 pro 29
latere; hoc est latus cubicum vtriusque cubi; ergo eius cubus 1 C + 3 Q + 3 N + 1 æquatur numero dato, & fit 1 pro valore, rursus potest sumi pro latere 1 N + $\frac{1}{3}$ vt elidantur duæ species maiores restentque tantum minores inter se æquandæ, & sic habebitur valor − $\frac{4}{27}$. denique sumi potest 1 + $\frac{19}{11}$. vt restet tantum æqualitas facienda inter maiores species atque ita extabit valor − $\frac{35}{99}$ ex his porro tribus radicibus primitiuis eliciantur deriuatiuæ, vt sæpius factitatum est.

Cautio circa prædicta.

Aliquando contingit vt numerus compositus ex quatuor speciebus, quarum vna est 30
cubus, vel duæ sunt cubi, non possit cubo æquari, cum post reductionem relinquuntur tres species æquandæ inter se vel dum restat vnica species æquanda nihilo: vt si detur 1 + 3 N + 3 Q + 4 C non potest in eo casu aliter procedi quam si fingatur latus 1 + 1 N. at in isto casu relinquuntur 3 C æquales nihilo: igitur tunc non potest numerus datus æquari cubo. Item si detur 1 + 2 Q + 3 N + 1 C. inueniri tantum potest vna radix immediatè & primitus, ponendo pro latere ficto 1 N + $\frac{1}{3}$ nam si poneretur 1 N. + 1 restaret 1 Q æquale nihilo. Propter aliquam ex his rationibus non possunt æquari cubo numeri sequentes 1 − 3 Q − 3 N − 1 C 1 − 3 Q + 3 N + 1 C. vnica enim species restaret nihilo æqualis.

Quæstiones duodecim circa ea quæ dicta sunt in hac tertia parte.

Quæ hactenus dicta sunt, vberem præbent materiam ex qua tanquam ex auri fodina 31
eruere possis Thesaurum infinitum problematum: vt si quis postulet numerum, cuius vigecuplum additum decem ipsius quadratis & quatuor ipsius cubis, & vni ipsius quadrato-quadrato atque insuper vnitati faciat quadratum, velit autem numerum postulatum majorem esse octonario & denario minorem, oportebit necessario elicere primum radicem primitiuam − 3. & ex illa deriuatiuam primi gradus + $\frac{1}{3}$ inde deriuatiuam secundi gradus − $\frac{4}{27}$. atque ex hac deriuatiuam tertij gradus $\frac{19}{11}$ quæ satisfacit omnibus postulatis in problemate, vt iam supra est ostensum num. 23. sed lubet alias quæstiones soluere.

Inuenire in numeris rationalibus integris triangulum rectangulum, cuius hypotenusa & summa laterum circa rectum sit numerus quadratus.

Iam solutum est illud problema im prima parte num. 45. per duplicatas æqualitates, 32

sed quia solui potest per numerum ex quinque speciebus compositum lubet etiam illud aggredi. Formo triangulum ex 1 N + 5 & 12. per ea quæ dicta sunt loco citato: igitur latera sunt 1 Q + 10 N + 169. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120. hypotenusa ergo 1 Q + 10 N. + 169. & summa laterum 1 Q + 34 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 + $\frac{1N}{1}$ − 1 Q. & fiet valor $\frac{338N}{676}$. & iuxta positiones trianguli quæsiti latera 106 1652293520. 456548 6027761. 468729 8610289. eadem cum superioribus.

Inuenire triangulum rectangulum ita vt summa hypotenusæ & alterius lateris circa rectum relinquens aream faciat datum numerum.

33 Esto datus 4 ac primum inueniatur triangulum rectangulum ita vt quadratus semissis summæ ex hypotenusa & vno latere relinquens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum istud rectangulum ab 1 N + 1 & 1 N. ergo latera erunt 2 Q + 1 + 2 N. 1 + 2 N. 2 Q + 2 N. summa hypotenusæ & lateris sequentis est 2 Q + 2 + 4 N. huius semissis 1 Q + 1 + 2 N. cuius quadratum 1 QQ + 4 C + 6 Q + 4 N + 1. relinquens quadruplam aream 8 C + 12 Q + 4 N. facit 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 æquandum quadrato. Finge latus 1 Q + 1 − 2 N & fit quadratus 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1 qui æquatus 1 QQ − 4 C − 6 Q + 1 dat valorem $\frac{1}{2}$. ergo iuxta positiones, numeri duo à quibus formabitur triangulum, erunt $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ & sumendo solos numeratores 4 & 1. inde formabis triangulum 17. 15. 8. his necte characterem radicum vt fiant latera trianguli quæsiti 17 N. 15 N. 8 N. ergo 32 N − 60 Q æquatur 4 & fiet 1 N $\frac{1}{2}$. & trianguli quæsiti latera tria $\frac{17}{2}$ $\frac{15}{2}$ $\frac{8}{2}$ & satisfaciunt quæstioni. Hanc quæstionem omisit Diophantus post 10 & 11. libri 6.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit numerus quadratus qui iunctus dato multiplici alterius lateris circa rectum facit quadratum.

34 Iubeatur numerum quadratum triplo alterius lateris iunctum facere quadratum & formetur triangulum ab 1 + 1 N & 1 latera erunt 2 + 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. triplum postremi istius lateris est 6 + 6 N. cui si addas medium latus fiet summa 1 Q + 8 N + 6. æquanda quadrato, sicut etiam medium latus quadrato æquandum est, duc summam illam 1 Q + 8 N. + 6 in medium latus 1 Q + 2 N & fiet productus 1 QQ + 10 C + 22 Q + 12 N. æquandus quadrato, finge latus 1 Q + 5 N − $\frac{1}{2}$ ergo eius quadratum 1 QQ + 10 C + 22 Q − 15 N + $\frac{1}{4}$ illi æquatum dabit $\frac{1}{2}$, pro valore radicis, & iuxta positiones fiet triangulum quæsitum in integris 313. 25. 312. potuit inueniri solutio per duplam æqualitatem inter 1 Q + 8 N + 6 & 1 Q + 2 N.

Inuenire triangulum rectangulum cuius vnum latus circa rectum sit numerus quadratus qui multatus dato multiplici alterius circa rectum relinquat quadratum.

Iam dedimus solutionem istius problematis 1 p. n. 47. sed per aliam metho- 35
dum. Ergo jubeatur numerum quadratum multatum triplo alterius relinquere quadratum & capiatur pro triangulo primitiuo, illud quod mox inuentum est in quæstione præcedenti nempe 313. 25. 312. quod formatur ab 13. & 12. formeturque triangulum quæsitum ab 1 N − 13 & 12 erunt latera 1 Q − 26 N + 313. 1 Q − 26 N + 25. 24 N − 312. ergo huius postremi triplum subtractum ex medio relinquit 1 Q + 961 − 98 N æquandum quadrato, sed medium latus 1 Q − 26 N. + 25 est æquandum quadrato. Igitur horum duorum productus 1 QQ − 124 C + 3534 Q − 27436 N + 24025. æquandus erit quadrato, finge latus 1 Q − $\frac{\text{111111N}}{\text{111}}$ + 155 huius quadratum priori numero est æquandum & fit valor $\frac{\text{24025}}{\text{111111}}$ ergo 1 N 13 & 12 relicto denominatore erunt 23542921 & 3820440 ex his formatum triangulum erit illud quod postulatur 56886487100584l. 539673367418641. 17988863421048o. & satisfacit quæstioni.

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum detractus alteri lateri faciat etiam quadratum. Multiplex sit duplus.

Pone 1 + 1 N & 1 pro numeris vnde formatur triangulum: Ita enim latera erunt a 36
+ 1 Q + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 + 2 N. ergo 1 Q 2 + 2 N. erit quadratum & residuum dupli lateris postremi ex medio subtracti nempe 1 Q − 4 − 2 N. erit iterum quadratum & fit ex ista duplicatâ æqualitate valor − $\frac{11}{11}$ ergo 1 N + & 1 erunt − $\frac{1}{11}$ $\frac{11}{11}$ & acceptis numeratoribus solis habebis − 5 & 12. vnde formatur triangulum primitiuum 169. 119. 120. quare iteranda erit operatio & ponendi numeri ex quibus formatur triangulum 1 N − 5 & 12. ergo latera erunt 1 Q + 1691 − 10 N. 1 Q − 10 N − 119. 24 N − 120. ac proinde si duplum postremi lateris 48 N − 240 tollatur a medio, erit residuum 1 Q + 121 − 58 N æquandum quadrato, sicut & hypotenusa 1 Q + 169 − 10 N. horum duorum productus 1 QQ − 68 C + 870 Q − 11012 N + 20449 est æquandus quadrato, finge latus 143 − $\frac{\text{121N}}{\text{111}}$ + 1 Q & fit valor $\frac{\text{12321}}{\text{11111}}$. Verum lubet etiam alia via rem aggredi, reducantur illi duo termini ad eundem vnitatum quadratum & fient $\frac{\text{1691}}{\text{111}}$ + 169 − $\frac{\text{2101N}}{\text{111}}$ & 1 Q + 16 Q − 10 æquandi quadratis. Differentia illorum est $\frac{\text{111}}{\text{11}}$ − $\frac{\text{121N}}{\text{111}}$. duo producentes eligantur $\frac{\text{1N}}{\text{11}}$ & $\frac{\text{11N}}{\text{11}}$ − $\frac{\text{121}}{\text{11}}$ (per ea quæ dicta sunt in primâ parte num. 21. & sequentibus) & fiet valor $\frac{\text{121121}}{\text{111111}}$. & iuxta positiones, triangulum quæsitum erit in integris 193430461133l9. 18732418687921. 48218174004oo.

Inuenire duos numeros quorum ſumma ducta in ſummam quadratorum ab ipſis ortorum, faciat cubum.

37 Sint duo numeri quæſiti 1 N & 2 − 1 N. ergo ſumma 2 ducta in ſummam quadratorum 2 Q + 4 − 4 N facit 4 Q + 8 − N. æquandum cubo. Finge latus cubi 2 − $\frac{N}{4}$ eius cubus æquatus 4 Q + 8 − 8 N dabit − $\frac{3}{2}$. quare pono rurſus pro nouâ radice 1 N − $\frac{3}{2}$ iuxta quam reſoluo ſingulas particulas numeri ſuperioris 4 Q + 8 − 8 N & fit nouus terminus 4 Q + 125 − 44 N æquandus cubo. Finge latus cubi 5 − $\frac{11N}{11}$. ergo eius cubus 125 − 44 N + $\frac{1331N}{1331}$ − $\frac{1331C}{1331}$. æquandus eſt 4 Q + 125 − 44 N. & valor extat $\frac{1331}{1331}$ vnde ſi tollas $\frac{3}{2}$ ob nouam radicem 1 N − $\frac{3}{2}$ habebis valorem pro primis poſitionibus $\frac{1331}{1331}$ hunc tolle à 2 iuxta poſitiones & fiet ſecundus numerus quæſitus $\frac{1331}{1331}$. Aduerte primo ſolos numeratores ſoluere quæſtionem nempe 26793. & 15799. Aduerte ſecundo hinc ſolui problema ſequens. Diuidere numerum 2. in duos taliter vt ſumma quadratorum duplicata ſit cubus. Aduerte tertio indidem ſolui aliam quæſtionem, nempe inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum per quemcumque numerum multiplicata fiat cubus, vt ſi cuperes ſummam quadratorum quintuplicatam facere cubum poneres 1 N. & 5 − 1 N & procederes vt ſupra: Aduerte denique hinc ſolui pulcherrimum problema nempe. Inuenire duos numeros quorum differentiæ ſit æqualis differentia quadratoquadratorum: nam ſi capias duos numeros ſupra inuentos 26793 & 15799. & iis ſupponas pro denominatore communi, latus cubi facti ex ſumma eorum in ſummam quadratorum quod quidem latus eſt 34540 fient duo numeri quæſiti, $\frac{15799}{34540}$ $\frac{26793}{34540}$.

Inuenire duo triangula rectangula quæ habeant eandem differentiam minorum laterum & talia vt in vno eorum maius latus circa rectum æquetur hypotenuſæ alterius.

38 Formetur primum triangulum ab 1 N & 1 latera ſunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. ergo ſecundi trianguli maius latus circa rectum erit 1 Q + 1 inde ſi tollas differentiam duorum minorum laterum primi, quæ eſt 1 Q − 1 − 2 N. fiet minus latus circa rectum ſecundi 2 N + 2, reſtat igitur vt duo quadrata quæ naſcuntur ab 1 Q + 1 & 2 N + 2 ſimul iuncta faciant quadratum. Horum ergo ſumma 1 QQ + 6 Q + 8 N + 5. æquanda eſt quadrato. Finge latus 1 Q + 3. igitur quadratum illius lateris 1 QQ + 6 Q + 6 æquatur 1 QQ + 6 Q + 8 N + 5 & fit 1 N. æqualis $\frac{1}{8}$ & iuxta poſitiones numeri à quibus formatur triangulum, in integris, abjecto videlicet denominatore, ſunt 1 & 2. at primus numerus minor eſt ſecundo. Proinde in formatione trianguli occurrerent numeri ficti, quod eſt abſurdum, quare vt huic incommodo remedium adferamus redintegranda eſt operatio & formandum triangulum ab 1 N + 1 & 2, igitur latera erunt 1 Q + 5 + 2 N. 1 Q + 2 N − 3. 4 N + 4. pro primo triangulo: & pro ſecundo latere minore erunt 1 Q + 2 N + 5 & 4 N + 12. horum duorum quadrata ſimul juncta faciunt ſummam 1 QQ + 4 C + 30 Q + 116 N + 169. æquandam quadrato, huius quadrati latus fingi poteſt multipliciter, finge illud 10 + $\frac{11N}{11}$ − 1 Q eius quadratum priori ſummæ æquatum dat pro valore radicis − $\frac{121}{220}$ ergo numeri à quibus formatum eſt triangulum, juxta poſitiones, in integris abjecto denominatore erunt − 979 &

1092. vtere iis numeris per inde ac si nullus esset fictus & forma triangulum ab 1092 & 979, fientque duo triangula quæsita 2150905. 2138136. 234023. & 2165017. 2150905. 246792. & satisfaciunt quæstioni.

Inuenire duo triangula rectangula in qũorum vtroque summa laterum circa rectum sit æqualis & talia vt hypotenusa vnius sit æqualis maiori lateri circa rectum alterius.

Formetur primum triangulum ab 1 N + 1 & 1 latera erunt 1 Q + 2 + 2 N. 1 Q + 2 N. 2 N + 2. ergo hypotenusa 1 Q + 2 + 2 N. erit maius latus secundi trianguli quo sublato ex summa laterum circa rectum primi restabit 2 N pro altero latere circa rectum secundi. Igitur horum duorum laterum quadrata simul sumpta 1 QQ + 4 C + 12 + 8 N + 4 æquantur quadrato. Finge latus 1 + 2 N + 4 & eius quadratum 1 QQ + 4 C + 12 Q + 16 N + 16 æquetur priori fietque valor radicis $-\frac{1}{2}$. & cape ergo pro noua radice 1 N $-\frac{1}{2}$ & iuxta illam resolue singulas particulas numeri prædicti 1 QQ + 4 C + 12 Q + 8 N + 4. fietque nouus terminus 1 QQ − 2 C + $\frac{11Q}{4}$ − $\frac{17N}{4}$ + $\frac{17}{16}$ æquandus quadrato, finge latus $\frac{11}{8}$ − $\frac{17N}{11}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{11}{8}$ pro isto nouo termino, vnde si tollas $\frac{1}{2}$ fiet valor pro primis positionibus $\frac{7}{8}$ igitur 1 N + 1 & 1 in integris, abjecto denominatore erunt 29 & 26. a quibus formabis triangulum primum quæsitum 1517. 165. 1508. & inde nascetur secundum 1525. 1517. 156. Aliter ex $-\frac{1}{2}$ supra inuentis potuit inueniri solutio applicando illam radicem 1 N + 1 & 1. ita enim in integris fient 1 & 2 quare ponendi sunt numeri formantes triangulum 1 N − 1 & 2 & redintegranda operatio, ita enim latera primi trianguli erunt 1 Q + 5 − 2 N. 1 Q − 3 − 2 N. 4 N − 4. & latera circa rectum secundi 1 Q + 5 − 2 N & 4 N. − 12. horum quadrata simul addita 1 QQ − 4 C + 30 Q 116 N + 169 æquantur quadrato, finge latus 13 − $\frac{14N}{17}$ + 1 Q & fiet valor $\frac{17}{14}$. ergo 1 N − 1 & 2 in integris erunt 29 & 26 vt supra, vnde formabuntur eadem triangula. 39

Inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa sit numerus quadratus & datus multiplex vnius lateris circa rectum additus alteri lateri faciat quadratum.

Detur multiplex duplus & formetur triangulum quæsitum ab 1 N & 1 latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 12 N. duplum posterioris lateris 4 N addatur priori lateri circa rectum & & fiet 1 Q − 1 + 4 N æquandus quadrato sicut & hypotenusa 1 Q + 1 horum differentia est 2 − 4 N & fit valor radicis $\frac{1}{2}$. debet autem 1 N esse maior vnitate; ergo iteranda est operatio & formandum triangulum ab 1 N + 5 & 12. latera sunt 1 Q + 169 + 10 N. 1 Q − 119 + 10 N. 24 N + 120. duplum istius postremi latetis 48 N + 240 additum medio facit 1 Q + 121 + 58 N. æquandum quadrato & est etiam hypotenusa 1 Q + 16 Q + 10 N. æquanda quadrato horum duorum productus 1 QQ + 68 C + 870 Q + 1102 N + 20449 æquandus quadrato. Finge latus 143 + $\frac{1102N}{141}$ − $\frac{20449}{141}$ & fit valor radicis $\frac{141}{1102}$ ergo numeri formantes triangulũ in integris erunt 2145082341079296 & 3680455474832O. vnde triangulum ipsum non latebit. 40

Inuenire quadrato-quadratum cuius triplum additum alteri quadrato-quadrato quam vnitati, faciat quadratum.

41 Iubetur addi alteri quadrato-quadrato quam vnitati quia alioqui res esset perfacilis, nam triplum vnitatis additum vnitati facit 4. Item triplum quadratoquadratum 16 additum vnitati facit 49. pone ergo latus quadrato-quadrati quæsiti 1 N − 1 cuius quadrato-quadratum 1 QQ − 4 C + 6 Q − 4 N + 1. triplicatum & additum 1 QQ facit 4 QQ − 12 C + 18 Q − 12 N + 3 æquandum quadrato, finge latus quadrati 2 Q − 3 N + $\frac{5}{7}$. & fiet valor $\frac{11}{7}$. ergo iuxta positiones latus quadratoquadrati erit in integris 3 cuius quadrato-quadratum 81 triplicatum & additum quadrato-quadrato numeratoris 11. nempe 14641 facit 14884. quadratum à latere 122. similiter capiendo duplum 3. nempe 6. eius quadrato-quadratum triplicatum additum quadrato-quadrato 22 (hoc est dupli 11) facit 238144 quadratum à latere 488 rursus capiendo triplum 3 nempe 9 eius quadrato-quadratum triplicatum & additum quadrato-quadrato 33 (hoc est tripli 11) facit 1205604 quadratum à latere 1098. & sic in infinitum.

Inuenire triangulum rectangulum in quo quadratum hypotenusæ additum dato multiplici areæ faciat quadratum.

42 Detur duplum areæ & formetur triangulum ab 1 N & 1 latera sunt 1 Q + 1. 1 Q − 1. 2 N. quadratum hypotenusæ est 1 QQ + 2 Q + 1 cui additum duplum areæ 2 C − 2 N. facit 1 QQ + 2 C + 2 Q − 2 N + 1 æquandum quadrato finge latus 1 Q + 1 + $\frac{1}{2}$ & fiet $\frac{1}{2}$ pro valore radicis at $\frac{1}{2}$ non est maior 1 ergo non potest inde formari triangulum quin habeantur numeri fracti, quare iteranda est operatio & ponendo pro noua radice 1 N + $\frac{1}{2}$ iuxta quam si resoluantur singulæ particulæ numeri mox quadrato æquati fiet nouus terminus 1 QQ + 3 C + $\frac{11}{4}$ Q + $\frac{9}{16}$ N + $\frac{49}{256}$ quadrato æquandus finge latus $\frac{11}{16}$ − $\frac{8}{17}$ N + $\frac{2177}{4352}$ & fiet valor radicis $\frac{1377}{2992}$ huic adde $\frac{1}{2}$ ob nouam radicem, & fiet valor pro primis positionibus $\frac{4369}{2992}$ quare duo numeri à quibus formabitur rectangulum triangulum erunt in integris 6437453 & 5237280. in vnico casu problema est impossibile.

Inuenire triangulum rectangulum in quo area detracta ex quadrato vnius lateris circa rectum faciat quadratum.

43 Formetur illud triangulum ab 1 N − 1 & 4. latera sunt 1 Q + 17 − 2 N. 1 Q − 15 − 2 N. 8 N − 8. eius area 4 C − 12 Q − 52 N + 60 sublata ex quadrato secundi lateris, quod est 1 QQ − 4 C − 26 Q + 60 N + 225. relinquit 1 QQ − 8 C − 14 Q + 112 N + 165 æquandũ quadrato, finge latus 1 Q − 4 N − 15. & fit valor radicis − $\frac{41}{7}$ quare pono nouam radicem 1 N − $\frac{41}{7}$. & iuxta illam resoluo singulas particulas termini quadrato æquati, fitque nouus terminus æquandus quadrato 1 QQ − 38 C + $\frac{10329}{7}$ − 54 $\frac{1148}{7}$ N + $\frac{81225}{196}$. Finge latus 1 Q − 19 N − $\frac{541}{14}$ & fit valor $\frac{1681}{196}$ vnde si tollas $\frac{41}{14}$ ob nouam radicem, & ex residuo vnitatem, ob positionem restabunt duo numeri formantes triangulum in integris 6001 & 2280. igitur triangulum quæsitum est 41210401. 30813601. 27364560.

CLAVDII

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI,

IN DIOPHANTVM PORISMATVM,

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI duobus æqualibus numeris inæquales duo adiiciantur, erit compositorum minor ratio quàm adiectorum.

Sint æquales numeri A B. C D. quibus addantur inæquales B E maior, & D F minor. Dico minorem esse rationem A E ad C F quàm B E ad D F. Quoniam enim A B & C D sunt æquales [a] minor erit ratio ipsius A B ad maiorem B E, quàm ipsius C D ad minorem D F. igitur & componendo [b], minor est ratio A E ad B E quàm C F ad D F. Quare & vicissim [c] minor est ratio A F ad C F quàm B F ad D F. Quod demonstrandum erat.

A.....B...E
C.....D..F

[a] octaua, quinti.
[b] vigesima octaua, quinti.
[c] vigesima septima, quinti.

PROPOSITIO II.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales, planus sub extremis æquatur plano sub duobus quibuslibet ab extremis æqualiter distantibus, atque etiam quadrato medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

Sint quotlibet numeri A B C D E F continuè proportionales & numero pari, dico primo planum sub A F. æqualem esse tum plano sub B E, tum plano sub C D. Quia enim est A ad B vt E ad F ex hypothesi [a] fiet idem numerus ex primo A in quartum F qui fit ex secundo B in tertium E. Similiter quia est B ad C vt D ad E, [b] fiet idem numerus ex primo B in quartum E qui fit ex secundo C in tertium D seu idem qui fit ex A in F. Igitur plani sub A F sub B E sub C D sunt æquales. Quod erat propositum.

A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. F 64.

[a] decima nona, 7.
[b] decima nona, 7.

Deinde considerentur tantum numeri A B C D E multitudine impari. Dico planum sub A E æquari tum plano sub B D. tum quadrato ipsius C. Nam vt prius quia est A ad B vt D ad E, [c] planus sub A E æquatur plano sub B D. sed quia est vt B ad C. ita C ad D [d] planus sub B D. æquatur quadrato ipsius C. Igitur planus sub A E planus sub B D. & quadratus ipsius C æquales sunt inter se. Quod demonstrandum erat.

[c] decima nona, 7.
[d] vigesima, 7.

PROPOSITIO III.

Si tres, pluresve numeri inter se multiplicentur, idem semper procreabitur numerus, quomodocunque & quouis ordine seruato fiat multiplicatio.

Quod ostendit Euclides de duobus numeris inter se multiplicatis decimasexta 7. id in vniuersum de tribus pluribusve hic ostendetur. Tres autem, pluresve numeri inter se multiplicari dicuntur, cùm vnus ex illis ducitur in alium, tum productus in alium, & rursus productus in alium, & ita deinceps, donec omnes multiplicati sint.

Sint ergo tres numeri A B C. ductoque A in B fiat D. quo ducto in C fiat E. Rursus ordine mutato, ducatur B in C & fiat F, quo ducto in A fiat G. Denique mutato rursus ordine ducatur A in C & fiat H, quo ducto in B. fiat K. (tot enim modis ordo variari potest.) Dico tria producta E K G inter se esse æqualia. Quia enim B ductus in vtrosque A C. producit ipsos D F [a] erit A ad C vt D ad F. [b] Igitur productus ex A in F nempe G. æquatur producto ex C in D nempe ipsi E. Similiter quia idem C ductus in vtrumque A & B producit ipsos H F. erit A ad B vt H ad F. Igitur qui fit ex A in F nempe

A 2. B 3. C 4.
D 6. H 8. F 12.
E 24. K 24. G 24.

[a] decima septima 7.
[b] decima nona, 7.

G. æquatur ei qui fit ex B in H nempe ipſi K. Quamobrem conſtat tres E K G. æquales eſſe inter ſe. Quod erat propoſitum.

E 24. F 60.
A 2. B 3. C 4. D 5. & 12.
K 120. H 120.

Deinde ſint quatuor numeri A B C D. & tribus A B C inter ſe ductis fiat E quo ducto in reliquum D fiat K. Tum mutato ordine, & tribus B C D inter ſe ductis fiat F. quo ducto in reliquum A fiat H. Dico ipſos K & H æquales eſſe inter ſe, & ſemper eundem produci numerum quomodocumque aliter ordine mutato idem A B C D inter ſe multiplicentur. Quia enim ſumendo ternos A B C. tum ternos B C D. duo B C vtrique ſumptioni communes ſunt, productus ex B in C eſto G. patet ergo ex demonſtratis in tribus numeris ex G in A produci E, & ex G in D, produci F. Quare, vt E ad F ſic eſt A ad D.* Igitur qui fit ex E in D, nempe H, æquatur ei qui fit ex F in A nempe ipſi K. ſimiliter quomodocumque ſumantur tres ex iiſdem quatuor numeris, duo ex illis reperientur in qualibet alia trium ſumptione. Quare licebit eodem argumento propoſitum concludere.

* decima ſeptima 7. & decima octaua, 7.

Eodem modo ſi ſint quinque numeri, ſumendo quaternos & quaternos, productumque ex mutua quatuor numerorum multiplicatione, ducendo in reliquum, reperientur tres iidem numeri in duabus quibuslibet ſumptionibus, vnde ſumendo productum ex trium communium mutuo ductu, licebit ſimili prorſus argumento propoſitum concludere. Et ſic in ſex numeris per ea quæ in quinque demonſtrata ſunt probabitur intentum, & in ſeptem per ea quæ in ſex erunt oſtenſa. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IV.

Si fuerint quatuor numeri in proportionalitate arithmetica, erit ſumma extremorum, ſummæ mediorum æqualis. Et ſi ſumma extremorum ſit æqualis ſummæ mediorum, erunt in proportionalitate arithmetica ipſi quatuor numeri.

Arithmetica proportionalitas dicitur cùm primi & ſecundi idem eſt interuallum, quod tertij & quarti, ita tamen vt primus ſecundo, & tertius quarto comparati, ſinguli ſingulis vel æquales ſint, vel maiores; vel minores, non perturbato ordine.

A.....B
C.....
D.....G
H.....

Sint ergo arithmeticè proportionales A B ad C ſicut D G ad H. dico extremorum A B & H ſummam æquari ſummæ mediorum C & D G. etenim vel A B æqualis eſt ipſi C. vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis ergo vt ſeruetur arithmetica medietas, erit & D G. æqualis, ipſi H. Quamobrem ſi æqualibus A B & C addantur æquales H & D G. erunt duo A B & H ſimul æquales duobus C & D G ſimul. Quod eſt propoſitum.

A.....E..B
C.....
D.....F..G
H.....

Deinde excedat A B numerum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales, igitur & D G excedit H numero F G. æquali ipſi E B. per definitionem, & erit D F ipſi H æqualis. Itaque ſi æqualibus A E & C addantur æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales H & D F fient A E & H ſimul æquales ipſis C & D F ſimul, igitur ſi his ſummis æqualibus addantur rurſus æquales E B & F G. Erunt A B & H ſimul æquales ipſis C & D G ſimul. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus. D G ſecundus. C tertius. A B quartus, ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & C ſit minor quàm A B numero E B, ſintque differentiæ F G. E B æquales; dico rurſus extremorum H & A B ſummam æquari ſummæ mediorum D G & C. Nam conſideratis iiſdem numeris ordine inuerſo concludetur per proximè demonſtrata ſummam duorum A B & H. æquari ſummæ duorum C & D G. Quod eſt propoſitum.

Iam è conuerſo ſit ſumma extremorum A B & H æqualis ſummæ mediorum C & D G. Dico ipſos quatuor numeros eſſe in arithmetica medietate. Nam vel A B æqualis eſt ipſi C vel maior vel minor illo. Sit primum æqualis. Quia igitur A B & H ſimul æquantur ipſis C & D G ſimul, ſi vtrimque auferantur æquales A B. & C. remanebunt D G. & H æquales. Quare ſicut ipſorum A B & C nullum eſt interuallum, ſic & ipſorum D G. & H. Vnde conſtat propoſitum.

Deinde excedat A B ipſum C numero E B ita vt A E & C ſint æquales. Igitur ab æqualibus ſummis duorum A B & H ſimul, & duorum C & D G ſimul, auferendo æquales numeros A E & C. remanent E B & H ſimul, æquales ipſi D G. Quare ſi abſcindatur ex D G. numerus D F æqualis H, erit reliquus F G. æqualis E B. Cùm itaque A B. excedat C. eodem numero quo D G excedit H. erunt arithmeticè proportionales ipſi quatuor numeri. Quod demonſtrandum erat.

Denique concipiatur H primus D G. ſecundus. C tertius. A B quartus. Ita vt H ſit minor quàm D G numero F G. & reliquus D F ſit æqualis ipſi H. Quia ergo ab æqualibus ſummis duorum H & A B. & duorum D G, & C. auferendo æquales H & D F remanent F G & C ſimul æquales ipſi A B, ſi ab A B abſcindatur A E æqualis ipſi C reliquetur E B æqualis ipſi F G. Quare cum H deficiat à

D G. eodem numero quo C deficit ab A B. sunt arithmeticè proportionales H ad D G. sicut C ad A B. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc apparet si quatuor numeri fuerint in hac proportionalitate, & conuertendo fore eos in eadem proportionalitate.

Nam si primus excedat secundum, eodem interuallo quo tertius excedit quartum, & conuertendo, quartus deficiet à tertio, eodem numero quo secundus deficit à primo. Rursus si primus deficiat à secundo, eodem numero quo tertius à quarto, & conuertendo quartus excedet tertium, eodem interuallo quo secundus primum.

PROPOSITIO V.

Si tres numeri arithmeticè proportionales fuerint, summa extremorum æqualis est duplo medij. Et si summa extremorum sit æqualis duplo medii, ipsi tres numeri arithmeticè proportionales erunt.

A 9. B 6. C 3. D 6.

Sint, tres numeri A B C in arithmetica proportionalitate, vt A ad B ita B ad C. Dico extremorum A C summam æquari duplo medij B. Etenim sumpto D æquali ipsi B. erit ex hypothesi in arithmetica proportionalitate vt A ad B ita D ad C. (quia D idem est atque B) Igitur per primam partem præced. erit extremorum A C summa æqualis summæ mediorum B D, seu duplo ipsius B. Quod erat primò propositum.

Sit deinde summa ipsorum A C æqualis duplo ipsius B. Dico esse in arithmetica proportionalitate vt A & B ita B ad C. Nam rursus sumpto D æquali B erit ex hypothesi, summa duorum A C summæ duorum B D æqualis. Quare per secundam partem præcedentis erit in arithmetica medietate A ad B vt D ad C. hoc est A ad B vt B ad C. Quod erat secundò demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

Si sint quotlibet numeri in arithmetica medietate continui, summa extremorum æqualis est summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, atque etiam duplo medij, si multitudo numerorum fuerit impar.

A 3. B 5. C 7. D 9. E 11. F 13.

Sint quotlibet numeri A B C D E F in arithmetica medietate continui, dico summam extremorum A F æqualem esse summæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, hoc est summæ duorum B E, & summæ duorum C D. Nam ob continuitatem arithmeticæ proportionalitatis, est A ad B sicut E ad F. Igitur [a] extremorum A F summa, summæ mediorum B E æqualis est. Similiter quia est in arithmetica medietate B ad C, vt D ad E, [b] erit summa extremorum B E æqualis summæ mediorum C D. Quare cùm eadem summa duorum B E sit iam ostensa æqualis summæ duorum A F. erit vtique summa duorum A F æqualis tam summæ duorum B E. quàm summæ duorum C D & sic de aliis si plures essent numeri propositi.

[a] *quartæ huius.*

[b] *quartæ, huius.*

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. F 12. G 14.

Quod si numeri A B C D E F G sint multitudine impari, ostendemus vt prius summam extremorum A G æqualem esse summæ duorum C E. Quia verò ex hypothesi est C ad D vt D ad E. in medietate arithmetica, [c] summa duorum C E æqualis est duplo medij D. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

[c] *quintæ, huius.*

PROPOSITIO VII.

Si fuerint quatuor numeri arithmeticè proportionales, & permutando, arithmeticè proportionales erunt.

A 12. B 9. C 4. D 1.

Sit in medietate arithmetica primus A ad secundum B. sicut tertius C ad quartum D. Dico & permutando esse in eadem medietate A ad C vt B ad D. Quia enim est in hac medietate A ad B vt C ad D. erit summa extremorum A D æqualis summæ mediorum C B per primam partem quartæ huius. Igitur per secundam partem eiusdem erit in eadem medietate primus A ad C secundum, sicut tertius B ad D quartum. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIII.

Omnis numerus pariter par, dimidium par habet. Et si quis numerus dimidium par habet, is est pariter par.

a trigeſimatertia, 9.

A 24. B 12.

Eſto A numerus pariter par, cuius dimidium B. Dico B eſſe parem. Si enim B eſſet impar, a ipſe A eſſet pariter impar tantum, contra hypotheſim. Non eſt ergo B impar, ſed par. Quod eſt propoſitum.

Deinde ſit B par, dico A eſſe pariter parem, & patet ex definitione. Etenim A producitur ex binario numero pari, in parem B. Quamobrem ex omni parte patet intentum.

COROLLARIVM.

Binarius metitur omnem numerum parem, per ipſius dimidium.

PROPOSITIO IX.

Omnis numerus pariter impar tantum, dimidium impar habet.

a octaua, huius.

A 10. B 5.

Hæc conuertit trigeſimam tertiam, 9. Euclidis. Eſto A numerus pariter impar tantum, cuius dimidium B. Dico B eſſe imparem. Nam ſi B eſſet par, a ipſe A eſſet pariter par. Atqui A ſupponitur pariter impar tantum. Igitur B non eſt par ſed impar. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO X.

Omnem numerum pariter parem quaternarius metitur. Et omnem numerum quem quaternarius metitur, is pariter par eſt.

A.....C.....B
G 4. D 2.

Eſto A B numerus pariter par cuius dimidium ſit C B numerus par per octauam huius. Et ſit G. quaternarius. Dico primo G metiri ipſum A B. Nam ſumpto D binario, erit D ad G ſicut ſicut C B ad A B. & permutando erit D ad C B, ſicut G ad A B. ſed a D binarius metitur numerum parem C B. Igitur & G metitur ipſum A B. Quod demonſtrandum erat.

a coroll. octaua. huius.

Deinde quaternarius G metiatur numerum A B. Dico A B eſſe pariter parem. Nam primo parem eſſe conſtat, b quia eum metitur G numerus par. Itaque ipſius A B dimidium eſto C B. Tunc vt prius ſumpto binario D. oſtendemus eſſe D ad C B ſicut G ad A B. Sed G metitur A B ex hypoteſi. c Igitur & D metitur C B. Quamobrem A B habens dimidium par, eſt pariter par. Quod ſecundo erat oſtendendum.

b vigeſima prima, 9.

c octaua, huius.

PROPOSITIO XI.

Omnis numerus excedens binario aliquem pariter parem, eſt pariter impar tantum.

A..C.....B

Sit numerus A B excedens pariter parem C B. binario A C. Dico A B eſſe pariter imparem tantum. Nam primò eſſe parem conſtat, a quia componitur ex duobus paribus A C. C B. Deinde eſſe pariter imparem ſic probatur. Nam ſi ponatur pariter par, b metietur eum quaternarius. Sed & idem quaternarius metitur pariter parem C B. Ergo quaternarius metiens totum A B. & ablatum C B, metietur & reliquum binarium A C, maior minorem. Quod eſt impoſſibile. Quamobrem A B non eſt pariter par. Eſt igitur pariter impar tantum. Quod demonſtrandum fuit.

a vigeſima prima, 9.

b octaua, huius.

PROPOSITIO XII.

Omnis numerus pariter impar tantum, excedet aliquem pariter parem binario.

A..G.....C.D.....B

Eſto A B pariter impar tantum, dico eum excedere binario aliquem pariter parem. Quia enim A B eſt par, ſecetur bifariam in A C. C B. a eruntque A C C B impares. Quare ſi ab ipſo C B auferatur vnitas C D, reliquus D B erit par. Sit illius duplus G B. b Igitur G B erit pariter par. Quum itaque vt totus A B ad totum C B, ſic ſit ablatus G B ad ablatum D B. (nam vtrobique eſt proportio dupla) erit & reliquus A G ad reliquum C D in eadem proportione dupla. Quare cùm C D ſit vnitas, erit A G binarius. Atque ideo cùm G B ſit oſtenſus pariter par, numerus A B ſuperat pariter parem G B binario A G. Quod demonſtrandum erat.

a nona, huius.

b octaua, huius.

PROPOSITIO XIII.

Si numerus pariter par, numero pariter impari tantum addatur, erit compoſitus pariter impar tantum.

A....C.....B

Numerus pariter par A C. addatur pariter impari tantum C B. Dico compoſitum ex his A B eſſe pariter imparem tantum. Nam ſi A B ponatur pariter par, a metietur eum quaternarius. Sed idem quaternarius metitur pariter parem A C. Igitur metiens totum A B, & ablatum A C, metietur & reliquum C B. quamobrem C B erit pariter par contra hypotheſin.

a octaua huius.

b octaua, huius.

Nam positus est pariter impar tantum. Igitur A B non poterit esse pariter par. Vnde relinquetur esse pariter imparem tantum. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XIV.

Si numerus pariter par per aliquem numerum multiplicetur, productus erit pariter par.

A 8. B 3. C 24. Sit numerus pariter par A quo ducto in quemlibet numerum B fiat C. Dico C esse pariter parem. Quia enim A est pariter par, [a] metitur eum quaternarius. Quare cum A metiatur C, metietur & quaternarius, eundem C. [b] Igitur C est pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] octava, huius.
[b] octava, huius.

PROPOSITIO XV.

Si numerus pariter impar tantum, per numerum imparem multiplicetur, productus erit pariter impar tantum.

A 6. B 5. D 3. E 15. C 30. Sit A numerus pariter impar tantum, quo ducto in B. imparem numerum, producatur C. Dico C esse pariter imparem tantum. Sumatur enim D dimidium ipsius A, quo ducto in B fiat E. Euidens est, quia B ductus in vtrumque D A producit E C [a] esse E ad C sicut D ad A. Quamobrem E est dimidium ipsius C. [b] Atqui D est impar, cum sit semissis ipsius A numeri pariter imparis tantum & B etiam impar est ex hypothesi. [c] Igitur E productus ex duorum imparium mutuo ductu, & ipse impar est. [d] Quare C habens dimidium impar E, est pariter impar tantum. Quod erat demonstrandum.

[a] decima septima 7.
[b] nona, huius
[c] trigesima nona, 9.
[d] trigesima tertia, 9.

PROPOSITIO XVI.

Si pariter pares quotcumque componantur, totus pariter par erit.

A. 8. B 12. D 36. C 16. Sint pariter pares quotcunque A B C. quorum summa D. dico D esse pariter parem. Quia enim A B C. sunt pariter pares, [a] singulos illorum quaternarius metitur. Igitur & compositum ex ipsis D, idem quaternarius metietur. [b] Quamobrem erit D pariter par. Quod demonstrandum erat.

[a] octava huius.
[b] octava, huius.

PROPOSITIO XVII.

Si quotlibet numeri pariter impares tantum componantur, sit autem par illorum multitudo, totus erit pariter par. Si vero sit impar illorum multitudo, totus erit pariter impar tantum.

A 6. E 4. B 10. F 8. C 14. G 12. D 18. H 16. K 48. Sint quotcunque pariter impares tantum A B C D. & sit primum par eorum multitudo, & compositus ex ipsis K. dico K esse pariter parem. sumantur enim E F G H singuli binario minores singulis A B C D. [a] Eruntque ipsi E F G H pariter pares. Numerus autem K æquabitur composito ex ipsis E F G H & totidem binariis. At [b] compositus ex ipsis E F G H est pariter par. Necnon & totidem binarij faciunt pariter parem [c] cùm compositus ex illis habeat dimidium par, scilicet numerum multitudinis ipsorum E F G H. [d] Igitur K compositus ex duobus pariter paribus, est pariter par. Quod demonstrandum fuit.

[a] duodecima huius.
[b] decima sexta huius.
[c] octaua, huius.

A 6. E 4. B 10. F 8. C 14. G 12. D 30. Sint vero A B C pariter impares tantum, multitudine impari, quorum summa D. dico D esse pariter imparem tantum. Nam sumptis vt prius E F G binario minoribus quàm ipsi A B C. erit D æqualis composito ex ipsis E F G & totidem binariis. [e] Quia uero singuli E F G sunt pariter pares, erit & compositus ex ipsis pariter par. Summa vero totidem binariorum est pariter impar tantum, [f] quia dimidium impar habet, numerum multitudinis ipsorum E F G. Igitur [g] numerus D compositus ex duobus quorum alter est pariter par, alter pariter impar tantum, est & ipse pariter impar tantum. Quod demonstrandum erat.

[d] decima sexta, huius.
[e] duodecima, huius.
[f] decima sexta, huius.
[g] trigesima tertia, 9.
[h] decima tertia, huius.

PROPOSITIO XVIII.

Si cuiuis quadrato addatur duplum lateris illius, & præterea vnitas, fit quadratus à latere vnitate maiore.

A 16. B....C. D G 25. Sit quadratus A cuius latus B C cui addita vnitate C D fiat B D & ipsius B D quadratus esto G. dico si addatur ad A duplum sui lateris B C & præterea vnitas, fieri quadratum G. etenim [a] quadratus G. æqualis est quadratis ipsorum B C. C D. & producto bis ex B C in C D. Atqui quadratus ipsius B C est A, & quadratus C D

[a] quarta, 2.

eſt ipſa vnitas: Productus autem ex vnitate C D in B C bis, eſt duplum ipſius B C. Patet ergo quadratum G æquari quadrato A & vnitati, & duplo ipſius B C. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Eadem prorſus ratione ſi cuilibet quadrato addatur quadruplum ſui lateris & præterea 4. oſtendetur fieri quadratum lateris binario maioris. Et ſi quadrato addatur ſenuplum ſui lateris, & præterea 9. fiet quadratus lateris ternario maioris, & ſic in infinitum multiplicando latus per omnes numeros pares ordinate diſpoſitos, & aſſumendo quadratos illis collaterales ſeu quadratos ſemiſſum eorundem numerorum parium. Nec ad hoc demonſtrandum requiritur aliud quam quarta, 2.

PROPOSITIO XIX.

Si à quolibet quadrato auferatur numerus vnitate minor duplo lateris illius, relinquetur quadratus à latere vnitate minore.

A 25. B 5. C 10. D 9. E 4. F 8.

Sit A quadratus, cuius latus B cuius duplum C, vnde ablata vnitate relinquatur D & ſit E vnitate minor ipſo B. Dico ſi D auferatur à quadrato A, relinqui quadratum ipſius E. ſumpto enim F duplo ipſius E, cùm B E differant vnitate, patet eorum dupla C F differre binario. Quare idem fiet numerus ſiue auferatur vnitas ex C. ſiue addatur vnitas ad F, nempe idem D. Atqui ſi ad quadratum ipſius E addatur duplum eiuſdem E vnitate auctum nempe D.[a] fiet quadratus ipſius B nempe A. Igitur ſi ex A detrahatur D. reſiduum erit quadratus ipſius E. Quod demonſtrandum erat.

[a] *decima octaua, huius.*

PROPOSITIO XX.

Omnis numerus quadratus aut impar eſt, aut pariter par.

A 25. A 16. B 5. B 4.

Sit numerus quadratus A, cuius latus B. dico A vel imparem eſſe, vel pariter parem. Etenim vel B impar eſt, vel par. Sit primum impar. Quia ergo ex impare B in imparem B. fit A.[a] erit A impar.

[a] *vigeſima nona, 9.*

Deinde ſit B par. Quia igitur ex pari B in parem B fit A, erit A pariter par ex definitione. Quamobrem A vel impar eſt, vel pariter par. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

C. I. Nullus numerus pariter impar tantum, eſt quadratus.

Patet, cum numerus pariter impar tantum, nec impar ſit, nec pariter par.

PROPOSITIO XXI.

Quilibet quadratus impar, excedit numerum pariter parem vnitate.

A 25. C 24. B 5. D 4.

Sit A quadratus impar, cuius latus B. & ab ipſo A detracta vnitate ſuperſit C. dico C eſſe pariter parem, Sumatur D numerus vnitate minor ipſo B. Quia ergo B eſt impar (nam ſi B eſſet par, ex ductu illius in ſeipſum fieret A par contrà hypotheſim) erit D par.[b] Atqui duplum ipſius D vnà cum quadrato eiuſdem D, æquatur numero C. Quadratus autem numeri paris D,[c] eſt pariter par. Duplum quoque numeri paris D eſt pariter par (cùm fiat ex binario pari numero, in D parem:) igitur & C compoſitus ex duobus pariter paribus,[d] eſt pariter par. Quod demonſtrandum erat.

[a] *Schol. vigeſima octaua, 9.*
[b] *decima octaua, huius.*
[c] *vigeſima, huius.*
[d] *decima ſexta, huius.*

PROPOSITIO XXII.

Duorum quorumlibet quadratorum interuallum, aut impar eſt, aut pariter par.

A 25. B 9. C 16. D . . . E . . F

Sint duo quadrati A maior & B minor, quorum interuallum C. Dico C eſſe pariter parem, vel imparem. Sumatur ipſius A latus D F, & latus ipſius B ſit D E, ita vt E F ſit differentia dictorum laterum. Itaque E F vel par eſt, vel impar. Sit primum par. Cùm igitur interuallum quo quadratus A ſuperat quadratum B[a] æquetur quadrato ipſius E F & producto ex D E in E F bis, erit C æqualis quadrato ipſius E F & producto ex D E in E F bis,[b] At quadratus paris numeri E F eſt pariter par. Necnon & duplum producti ex D E in E F eſt pariter par,[c] cùm dimidium eius, nempe productus ex D E in E F parem, ſit par.[d] Igitur C compoſitus ex duobus pariter paribus, eſt pariter par. Quod erat propoſitum.

[a] *quarta, 2.*
[b] *vigeſima, huius.*
[c] *octaua, huius.*
[d] *decima ſexta, huius.*

A 25. B 4. C 21. D..E...F

Deinde sit E F impar. Tunc quia quod fit bis ex D E in E F est numerus par (habet enim dimidium quod fit semel ex DE in E F.) si ei adiiciatur quadratus imparis E F, [a] qui impar est, [b] erit C. compositus ex pari & impari, impar. Quamobrem ex omni parte patet propositum.

[a] *vigesima, huius.*
[b] *Schol. vigesima tertia, 9.*

COROLLARIVM.

Numerus pariter impar tantum, non potest esse interuallum duorum quadratorum.

Intellige vnitate indiuisibili manente, aliter enim quilibet numerus statui potest interuallum duorum quadratorum, vt ostendit Diophantus lib. 2. sed & vigesima propositio, & hæ etiam intelligendæ sunt de numeris integris, nam fracti numeri nec pares sunt nec impares.

PROPOSITIO XXIII.

Si duorum inæqualium numerorum summæ addatur & adimatur eorundem interualium, aggregatum quidem, maioris numeri, residuum vero, minoris duplum est.

E...A....B....C...D

Sint inæquales numeri A B minor & B D maior & à maiori abscindatur B C minori A B æqualis ita vt reliquus C D sit interuallum ipsorum. Dico primo, si toti A D addatur E A æqualis interuallo C D aggregatum E D esse duplum maioris numeri B D. etenim cùm æqualibus A B. B C. addantur æquales E A. C D erunt toti E B. B D æquales, atque ideo totus E D ipsius B D duplus erit. Quod erat propositum.

Dico secundo, si à toto A D auferatur interuallum C D, residuum A C minoris A B duplum esse, & patet cùm B C ipsi A B sit æqualis. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

COROLLARIVM.

Si semissi summæ duorum numerorum addatur & adimatur semissis interualli eorundem aggregatum quidem maiori numero, residuum vero minori æquale est.

PROPOSITIO XXIV.

Si quotlibet numeri continuè proportionales, in totidem alios continuè proportionales ducantur, primus in primum, secundus in secundum, tertius in tertium & ita deinceps, & producti continuè proportionales erunt.

P 16. | A 2. B 4. C 8. D 16.
Q 324. | E 27. F 18. G 12. H 8.
R 5184. | K 54. L 72. M 96. N 128.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B C D & totidem alij E F G H ductisque A in E. B in F. C in G. D in H. fiant K L M N. Dico & ipsos K L M N esse continuè proportionales. Etenim ex A in C & ex E in G fiant P Q [a] quadrati ipsorum B F sumaturque etiam R productus ex K in M. Itaque quoniam ex A in E & ex C in G fiunt K M & ex K in M fit R. patet R produci ex mutua multiplicatione quatuor numerorum A C E G. [b] Quamobrem idem R producetur quomodocunque iidem quatuor numeri inter se ducantur, nimirum si A ducatur in C. & E in G. & producti P Q inter se ducantur. Igitur ex P in Q fiet R. At productus ex mutuo ductu quadratorum P Q [c] æquatur quadrato plani sub lateribus B F & ex B in F fit L ex hypothesi. Ergo R est quadratus ipsius L, [d] ac proinde tres K L M sunt continuè proportionales. Eadem ratione ostendemus tres L M N esse continuè proportionales. Quamobrem patet & omnes K L M N esse continuè proportionales. Quod erat demonstrandum.

[a] *vigesima, 7.*
[b] *tertia, huius.*
[c] *vndecima, 8.*
[d] *vigesima. 7.*

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM.

Liber Secundus.

PROPOSITIO I.

SI numerus secetur in quotlibet partes. Quadratus totius æquatur quadratis partium, & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis.

A....D...C.....B

Numerus AB sectus sit primum in tres partes AD. DC. CB. Dico quadratum totius AB æquari quadratis partium AD. DC. CB. & numeris qui fiunt bis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, nimirum productis bis ex AD in CB ex DC in CB & ex AD in DC. Etenim concipiendo numerum diuisum in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius AB æqualis quadratis partium AC. CB. & producto bis ex AC in CB. [b] Sed productus bis ex AC in CB æquatur productis bis ex singulis AD. DC in CB. Quadratus autem ex AC. [c] æquatur quadratis partium AD. DC. & producto bis ex AD in DC. Igitur constat quadratum totius AB æquari quadratis ipsorum AD. DC. CB & numeris qui fiunt bis ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quod est propositum.

[a] quarta, 2.
[b] prima, 2.
[c] quarta, 2.

A..E...D....C.....B

Deinde secetur AB in quatuor partes AE. ED. DC. CB. Dico nihilominus sequi propositum. Nam si totus AB concipiatur diuisus in duas partes AC. CB. [a] erit quadratus totius æqualis quadratis partium AC. CB & producto ex AC in CB bis. At productus ex AC in CB bis, [b] æquatur productis bis ex singulis AE. ED. DC. in CB. Et quadratus ex AC. æquatur per iam demonstrata quadratis singulorum AE. ED. DC. & productis ex quolibet illorum in quemlibet ex aliis. Igitur quadratus totius AB æquatur quadratis singulorum AE. ED. DB. CB. & productis bis ex quolibet in quemlibet ex alijs. Quod demonstrandum erat. Similiter si numerus secetur in quinque partes, idem ostendetur assumendo quod demonstratum de sectione in quatuor partes, & sic in infinitum. Igitur ex omni parte constat propositum.

[a] quarta, 2.
[b] prima 2.

PROPOSITIO II.

Datis duobus numeris inæqualibus, productus ex mutua eorum multiplicatione vna cum quadrato semissis interualli ipsorum, æquatur quadrato semissis summæ eorundem.

Hæc propositio eadem est cum quinta, 2. Euclidis mutatis tantum verbis. Etenim sint numeri inæquales AB maior & BC minor, & totius AC semissis esto AE vel EC, & in semissi AB sumatur FE æqualis ipsi EB. Tunc ab æqualibus AE. EC. auferendo æquales FE. EB. erunt reliqui AF. BC æquales. Quamobrem FB est interuallum inæqualium numerorum AB. BC. & EB est semissis eiusdem interualli. Itaque per quintam, 2. constat quadratum ipsius EC semissis summæ æquari producto ex AB in BC. & quadrato EB semissis interualli. Quod demonstrandum erat.

A... F.. E..B... C

PROPOSITIO III.

Duorum inæqualium quadratorum interuallum, æquale est numero qui fit ex summa laterum in interuallum eorundem.

Hæc etiam non differt à sexta, 2. etenim sint inæquales numeri AC minor, & CD maior abscindatur ex CD numerus CB æqualis ipsi AC. erit ergo BD interuallum duorum AC. CD. Dico itaque quadratum ex CD superare quadratum ex AC. numero qui fit ex AD summa laterum, in BD interuallum eorundem. Cùm enim AB sectus sit bifariam in C. & ei adiectus sit BD, erit per sextam, 2. quadratus ex CD æqualis producto ex AD in BD & quadrato ex AC. Quare quadratus ex CD superat quadratum ex AC producto ex AD in BD. Quod demonstrandum fuit.

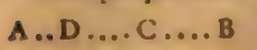
A... C... B..... D

PROPOSITIO IV.

Duorum quadratorum summa, æquatur duplo plani sub lateribus, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc

Hæc quoque aliis verbis idem pronunciat, quod septima 2. Etenim sint inæquales numeri A C

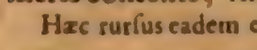


maior & C B minor, & abscindatur D C æqualis ipsi C B. ita vt A D sit interuallum ipsorum A C. C B. Dico summam quadratorum ab ipsis A C. C B. æquari duplo plani sub A C. C B. vnà cum quadrato ipsius A D. Quia enim numerus A C sectus est vtcumque in D, per septimã 2. quadratus ex A C cum quadrato ex D C. idest summa quadratorum ab ipsis A C. C B. æquatur duplo plani sub A C. D C. seu sub A C. C B. vnà cum quadrato ipsius A D. Quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO V.

Quadratus summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris contenti, vnà cum quadrato interualli eorundem.

Hæc rursus eadem est cum octaua 2. sint enim inæquales numeri A B maior, & B D minor, & abs-



cindatur C B æqualis ipsi B D, ita vt A C sit interuallum ipsorum A B. B D. Dico quadratum totius A D æquari quadruplo plani sub A B. B D. vnà cum quadrato interualli A C. Cùm enim numerus A B sectus sit vtcumque in C. per octauam 2. quadratus compositi ex A B. C B. nimirum totius A D, æquatur quadruplo plani sub A B. C B. seu sub A B. B D, cum quadrato ipsius A C. Quod demonstrandum proponebatur.

PROPOSITIO VI.

Duorum inæqualium quadratorum summa, dupla est quadrati semissis summæ laterum, & quadrati semissis interualli eorundem.

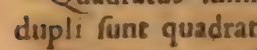
Hæc non differt à nona 2. sint enim inæquales numeri A D. D B, & totius A B. semissis esto A C. vel

C B ergo per ostensa secunda huius C D erit semissis interualli ipsorum A D. D B. Itaque dico summam quadratorum ab ipsis A D D B. duplam esse quadratorum ab ipsis C B. C D. Quod ipsum enunciat nona 2. Quamobrem constat propositum.

PROPOSITIO VII.

Quadratus summæ duorum numerorum, & quadratus interualli eorum simul, dupli sunt quadratorum ab ipsis numeris.

Hæc quoque coincidit cum decima 2. sint enim inæquales numeri A C. minor, & C D maior



& à maiori abscindatur C B minori A C æqualis, ita vt B D sit interuallum ipsorum A C. C D. Dico Quadratum totius A D cum quadrato interualli B D esse duplum quadratorum ab ipsis A C. C D. Cum enim A B sectus sit bifariam in C. & adiectus sit ei B D. per decimam 2. Quadrati ipsorum A D. B D simul dupli sunt quadratorum ab ipsis A C. C D. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Cuiuslibet numeri ex duobus quadratis compositi tam dimidium quam duplum componitur & ipsum ex duobus quadratis.

SCHOLIVM.

Colligitur manifestò hoc corollarium ex his duabus postremis propositionibus, & verum est in omni numero sine pari, sine impari, sine integro, sive fracto, cùm hæ duæ demonstrationes omnibus numeris conueniant, vt appareat, vnde constat lapsum esse Cardanum cap. 42. suæ Arithmeticæ regulæ 120. vbi hanc proprietatem numeris fractis conuenire negat. Notandus etiam error Nicolai Tartaleæ lib. 6. secundæ partis quæst. 48. vbi ait si numerus ex duobus quadratis compositus sit duplus alterius ex duobus item quadratis compositi, semper euenire vt minus latus subduplorum sit interuallum inter maius latus eorundem & minus duplorum, vt quia quadrati 64. & 4. simul sunt dupli quadratorum 25. & 9. accidit 3. latus ipsius 9. esse differentiam laterum 5. & 2. Etenim cùm vterque numerus ex duobus quadratis compositus, infinitis modis componatur ex duobus quadratis, vt ostendit Diophantus quæst. decimæ lib. 2. sanè vterque infinitis modis diuidi poterit in duos quadratos in quibus non eueniet quod semper euenire asserit Tartalea, quod vnico exemplo probare sufficiet. Quadrati 121. & 9 simul dupli sunt quadratorum 64. & 1. cùm illorum summa sit 130. horum 65. Attamen cùm latera illorum sint 11. & 3. horum 8. & 1. manifestum est, minus horum nempe 1. non esse interuallum ipsorum 8. & 3. Rursus 130. componitur ex duobus quadratis 81. & 49. At 65. componitur è duobus 49 & 16. & illorum latera sunt 9. & 7. istorum 7. & 4. vbi tamen 4. non est interuallum ipsorum 7. & 7. Verum quidem est si alter comparentur hi quadrati, euenire quod ait Tartalea nimirum si quadrati 121. & 9. comparentur ipsis 49. & 16. vel si quadrati 81. & 49. comparentur ipsis 64. & 1. Hoc igitur distinguere debuit Tartalea; sed doctrinam de numeris è duobus quadratis compositis perfectè non calluit.

Hinc etiam colligere licet. Nullum numerum pariter parem tantum componi posse ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Nam si hoc ponatur, facilè concludetur ex quibusdam propositionibus lib. 1. porism. & ex sexta huius, illius quoque dimidium componi è duobus quadratis integris & inæqualibus. Quia igitur numeri pariter paris tantum, continuè dimidium sumi potest, & dimidium dimidij donec ad binarium & ad vnitatem deueniatur per trigesimam quartam 9. Euclidis, patet sequi & ipsum binarium & ipsam vnitatem componi quoque ex duobus quadratis integris & inæqualibus. Quod est impossibile.

PROPOSITIO VIII.

Differentia medij proportionalis à quolibet quadratorum inter quos medius eſt, æquatur productis ex interuallo laterum in quodlibet latus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 28. C 49.

Sint quadrati A C. quorum latera D F, quorum interuallum E & medius proportionalis inter ipſos A C. eſto B. Dico differentiam qua B ſuperat A æquari producto ex E in D. & differentiam qua C ſuperat B æquari producto ex E in F.

a vndecima, 8. b prima, 2.

a Etenim patet ipſum B fieri ducto D in F. Quia ergo F æquatur ipſis D E ſimul, b fiet idem B ducto D in ſingulos D E. Atqui ex D. in D fit quadratus A. Igitur ſi à productis ex D in D & in E hoc eſt à numero, B auferatur productus ex D in D, nempe quadratus A, reſtabit productus ex D in E pro differentia inter ipſos A B. Similiter quia ex F in F fit C. & F æquatur ambobus D E, fiet idem C ex F in ſingulos D E. At ex F in D fit B vt dictum eſt. Igitur ſi à quadrato C. auferatur B. reſtat productus ex F in E pro differentia inter B C. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO IX.

Si à duobus quadratis, & à medio eorum proportionali auferatur ſigillatim quilibet datus numerus, & tria reſidua per differentiam laterum ſigillatim diuidantur, medius quotientum ſuperat minimum latere minoris quadrati, & ſuperatur à maximo latere maioris quadrati, & ſumma maximi & minimi ſuperat duplum medij, eorundem laterum interuallo.

D 4 E 3. F 7.
A 16 C 28. B 49.
G 10.
H 6. K 18. L 39.
M 2. N 6. P 13.

Sint A B duo quadrati, quorum latera D F. quorum interuallum E. & medius proportionalis ſit C. & ab ipſis A. C. B. auferendo ſigillatim datum quemuis numerum G. ſuperſint H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M. N. P. Dico primo N. ſuperare ipſum M. numero D, & eundem N. ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm à ſingulis A C B. ablatus ſit idem G. patet reſiduorum H K L eadem eſſe interualla quæ ipſorum A C B. c Atqui C ſuperat A. producto ex D in E. & B ſuperat C producto ex E in F. Igitur & interuallum duorum H K. eſt productus ex D in E, & interuallum duorum K. L eſt productus ex E in F. Quoniam verò diuiſis H K L. per E, prodeunt M N P. conſtat duorum M N interuallum fieri, diuiſo per E interuallo ipſorum H K. ſeu producto ex D in E. ſimiliter duorum N P. interuallum fiet, diuiſo per E interuallo ipſorum K. L. ſeu producto ex E in F. Atqui diuidendo per E productos ex E in D, & ex E in F, fiunt quotientes ipſi D F. Igitur duorum M N interuallum eſt D. & duorum N P interuallum eſt F. Quod erat propoſitum.

c oſtenſa, huius.

Deinde, dico ſummam ipſorum M P. ſuperare duplum ipſius N numero E. Nam per oſtenſa P. æquatur ipſis N F. Igitur ſumma ipſorum M P. æquatur tribus numeris M N F. At F æquatur vtrique D E. Igitur ſumma amborum M. P. æquatur quatuor numeris D E M N. Verùm per oſtenſa ambo D M æquantur ipſi N. Igitur ambo M P. æquantur duplo ipſius N, & numero E. Quod demonſtrare oportuit.

PROPOSITIO X.

Si duobus quadratis & medio eorum proportionali addatur ſigillatim idem numerus, & tres ſummæ per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, idem quod prius quotientibus accidet.

D 4. E 3. F 7.
A 16. C 28. B 49.
G 2.

H 18. K 30. L 51.
M 6. N 10. P 17.

Sint iidem qui ſuprà D E F. A C B. & ipſis A C B addatur ſigillatim numerus G, vnde fiant H. K. L. quibus diuiſis ſigillatim per E, fiant quotientes M N P. Dico primo N ſuperare ipſum M numero D, & eundem N ſuperari ab ipſo P. numero F. Etenim cùm ſingulis A C B additus ſit idem G. patet ſummarum H M L eadem eſſe interualla, quæ ipſorum A C B. Atqui C ſuperat A & aſſumantur reliqua omnia verba præcedentis demonſtrationis, & nulla quidem mutata litera propoſitum concludetur.

PROPOSITIO XI.

Si à duobus quadratis auferatur idem numerus ſigillatim, & reſidua per interuallum laterum ſigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu, adſcito numero qui à quadratis detractus eſt, quadratus euadit.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 10.
M 2. N 6. P 13.

Sint quadrati A B. quorum latera D F. & horum interuallum E & ab ipsis A B auferendo G. sigillatim supersint duo numeri, quibus diuisis sigillatim per E. fiant quotientes M P. Dico ex mutuo ductu ipsorum M P. fieri numerum qui adscito G. quadratus euadit. Sumatur N quotiens qui fit si medius proportionalis inter A B detracto G, diuidatur per E. [a] Quare N æquabitur vtrique D M. & P vtrique N F. Igitur qui fiet ex N in D. [b] æquabitur iis qui fient ex D in D & ex D in M, hoc est quadrato A & numero qui fit ex D in M. Sed quadratus A æquatur producto ex M in E adsciscenti G ex constructione. Igitur qui fit ex N in D æquatur productis ex M. in D & in E addito G. & [c] quia producti ex M in ipsos D E æquantur producto ex M in F compositum ex ipsis, patet productum ex N in D æquari producto ex M in F adsciscenti G. Rursus, quia productus ex M in P æquatur productis ex M. in N. & in F, ex quibus P ostensus est componi, addendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P addito G. æqualis productis ex M in N & in F addito G. Quare loco producti ex M in F adscito G. sumendo eum qui ostensus est æqualis, productum scilicet ex N in D. erit productus ex M in P adscito G. æqualis productis ex N in D & in M. Quare cùm D & M simul ostensi sint æquales ipsis N. [d] & ideo producti ex N in D & in M æquentur quadrato ipsius N, erit vtique productus ex M. in P adscito G. æqualis quadrato ipsius N. Quod erat demonstrandum.

a *nona, huius.*
b *prima, 2.*
c *prima, 2.*
d *secunda, 2.*

PROPOSITIO XII.

Si duobus quadratis idem numerus sigillatim addatur, & summæ per interuallum laterum sigillatim diuidantur, qui fit ex quotientum mutuo ductu multatus numero qui quadratis additus est, euadit quadratus.

D 4. E 3. F 7.
A 16. B 49.
G 2.
M 6. N 10. P 17.

Sint quadrati A B quorum latera D F, & horum interuallum E & numerus G addatur sigillatim ipsis A B. & summæ sigillatim diuidantur per E & fiant quotientes M P. Dico productum ex M in P. detracto numero G euadere quadratum. Sumatur enim N qui fit si medius proportionalis inter A & B adscito G diuidatur per E. Igitur [e] ambo D M æquantur ipsi N. & ambo N F æquantur ipsi P. [f] Quare qui fit ex N in D. æquatur productis ex D in D (seu quadrato A) & ex D in M. At quadratus A per constructionem est æqualis producto ex E in M. detracto G. Igitur productus ex N in D æquatur productis ex M in D & in E detracto G. Quia vero D E componunt F. [g] producti ex M in D & in E æquantur producto ex M in F. Quare productus ex N in D. æquatur producto ex M in F detracto G. Rursus quia productus ex M. in P æquatur productis ex M in N & in F ex quibus P componitur, detrahendo vtrimque numerum G. erit productus ex M in P detracto G. æqualis productis ex M in N & in F detracto G. Quare loco producti ex M in F detracto G, sumendo illi æqualem (vt ostensum est) productum ex N in D, erit productus ex M in P detracto G, æqualis productis ex N in D & in M. Quia vero D M æquantur ipsi N (vt ostensum est) [h] producti ex N in D & in M æquantur quadrato ipsius N. Igitur productus ex M in P. detracto G. æquatur quadrato ipsius N. Quod demonstrandum erat.

e *decima huius.*
f *prima, 2.*
g *prima, 2.*
h *secunda, 2.*

PROPOSITIO XIII.

Si à duobus quadratis auferatur datus aliquis numerus sigillatim, & residua diuidantur sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes, vna cum duplo summæ ipsorum multato supradicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet si inuicem ducantur, & producto addatur datus numerus, fit quadratus.

C 4 D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 6. G 10.
K 2. L 13. M 27.
N 36. P 64. Q 361.

Sint quadrati A B. quorum latera C E & horum interuallum D. & sit datus numerus G. quo detracto sigillatim ex ipsis A B, & diuidendo residua per D fiant quotientes K L, & horum summæ duplum multatum ipso D sit M. Dico tres K L M. præstare quod proponitur. Etenim à medio proportionali cadente inter A & B detrahendo G, & residuum per D diuidendo, fiat quotiens H. Et primò ducto K in L & producto addendo G. fiat N. Dico N esse quadratum. Etenim N est quadratus ipsius H [i] vt suprà demonstratum est. Secundò ducto K in M & producto addendo G. fiat P. dico P esse quadratum. [k] Quia enim summa duorum K L æquatur duplo ipsius H, & numero D. duplum ipsorum K L. æquabitur quadruplo H & duplo D. Quare auferendo D vtrimque, duplum ipsorum K L detracto D. nempe numerus M æquatur quadruplo H, & ipsi D semel sumpto. Vnde qui fit ex K in M æquatur producto ex K in H quater & in D semel. Igitur addito vtrimque numero G. productus ex K in M addito G, (nempe P.) æquatur productis ex K in H quater, & in D semel adscito G. At numerus qui fit ex K in D adscito G æquatur ipsi A per constructionem. Igitur P æquatur ipsi A & producto quater ex K in H. Quamobrem [l] cùm A sit

i *undecima, huius.*
k *nona, huius.*
l *nona, huius.*

a *quinta, huius.* quadratus interualli duorum K H. patet numerum qui fit quater ex K in H. adſcito A a eſſe quadratum ſummæ duorum K H. Igitur P eſt talis quadratus.

Denique ducto L in M & producto addendo G, ſi fiat Q. ſimili prorſus argumento oſtendemus Q eſſe quadratum ſummæ duorum H L. Igitur ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO XIV.

Si duobus quadratis addatur ſigillatim quilibet datus numerus, & ſummæ ſigillatim diuidantur per interuallum laterum, duo quotientes, vna cùm duplo ſummæ illorum multato dicto interuallo, exhibent tres numeros, quorum bini quilibet ſi inuicem ducantur, & a producto detrahatur datus numerus, fit quadratus.

C 4. D 3. E 7.
A 16. B 49.
H 10. G 2.
K 6. L 17. M 43.
N 100. P 256. Q 729.

Sint quadrati A B. quorum latera C E, & horum interuallum D. & ipſis A B addendo ſigillatim G, fiant numeri qui diuiſi ſigillatim per D, dent quotientes K L. quorum duplum multatum numero D. ſit M. Dico tres K L M. efficere quod proponitur.

Nam primo ducto K in L. & à producto auferendo G ſuperſit N. & ſumatur H quotiens qui fit ſi medius proportionalis cadens inter A & B auctus numero G diuidatur per D. b Conſtat igitur N. eſſe quadratum ipſius H.

b *duodecima, huius.*

Secundo ducto K in M & à producto detrahendo G ſuperſit P. c Quoniam ergo K L ſimul æquantur duplo ipſius H & numero D. patet duplum ipſorum K L detracto G. nempe numerum M. æquari quadruplo ipſius H, & numero D. Quare qui fit ex K in M. æquatur ei qui fit ex K in H quater, & in D ſemel. Ergo detracto vtrimque G. numerus qui fit ex K in M detracto G nimirum P. æquatur eis qui fiunt ex K in H quater, & in D ſemel detracto G. At numerus qui fit ex K in D detracto G æquatur ipſi A per conſtructionem. Igitur P. æquatur ipſi A & producto ex K in H quater. Quoniam igitur A d eſt quadratus interualli ipſorum K H. numerus qui fit ex K in H quater adſcito A e eſt quadratus ſummæ duorum K H. Igitur P. eſt talis quadratus.

c *decima huius.*

d *decima huius.*

e *quinta, huius.*

Denique ducto L in M & à producto detrahendo G ſuperſit Q. ſimili prorſus argumento probabitur Q eſſe quadratum ſummæ amborum H L. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Differentia quælibet duorum quadratorum à medio eorum proportionali, eſt media proportionalis inter eundem quadratum, & quadratum interualli laterum.

H 3 K 2. L 5.
M 4.
G 6. D 10.
A 9. B 15. C 25.

Sint quadrati A C. & medius eorum proportionalis B. ſintque H L. quadratorum latera, quorum interuallum K. cuius quadratus M. Et differentiæ ipſius B à quadratis A C. ſint G D. Dico G eſſe medium proportionalem inter A & M. Itemque D inter C & M. Etenim differentia G f fit ex K in H. Quamobrem G g eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum H K. nempe inter A & M. Similiter differentia D. fit ex K in L. Igitur D eſt medius proportionalis inter quadratos ipſorum K L. nempe inter M & C. Quamobrem conſtat propoſitum.

f *octaua, huius.*

g *undecima, 8.*

PROPOSITIO XVI.

Datis duobus quadratis ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habentur tres numeri, quorum bini quem producunt mutuo ductu, is ſi adſumat productum ex quadrato interualli laterum, ſiue in amborum ſummam, ſiue in reliquum, quadratum facit.

Sint dati quadrati A B. & ſit E quadratus interualli laterum ſumaturque C duplus ſummæ ipſorum A B E. Dico tres A B C. præſtare quod proponitur.

D 15. E 4. F 8.
A 9. B 25. C 76.

H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304.	Z 1936.	

Primò, enim ducatur A in B & fiat H. ducaturque E in ſummam ipſorum A B & fiat K, ſitque L ſumma ipſorum H K. Dico L eſſe quadratum. Sumatur D medius proportionalis inter ipſos A B. h qui vtique fit ex mutua laterum multiplicatione. i Igitur H qui fit ex A in B eſt quadratus ipſius D. k Sed & ſumma quadratorum A B. æquatur duplo ipſius D & ipſi E. Igitur productus ex E in ſummam ipſorum A B. puta K. æquatur duplo producti ex D in E. & quadrato ipſius E. Quare addito H quadrato ipſius D, ſumma L æquabitur quadratis ipſorum D E. & duplo producti ex D in E. l Ergo L quadratus eſt cuius latus eſt ſumma ipſorum D E.

h *vndecima, 8.*

i *vigeſima, 7.*

k *quarta, huius.*

l *quarta, 2.*

Quod erat propoſitum.

Secundò, ducatur E in reliquum C vnde fiat M. & amborum H M summa esto N. Dico N. esse quadratum. Sumatur F duplum ipsius E. Quia ergo C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex E in C. puta M. æqualis duplo producti ex F in A B. & duplo quadrati ipsius E. Et quia A B simul, vt ostensum est, æquantur ipsi D bis, & E semel productus ex E in A B bis. æquatur producto ex E in D quater, & duplo quadrati ipsius E. Quare totus productus ex E in C. puta M æquatur producto ex E in D quater, & quadruplo quadrati ipsius E seu quod idem est duplo producti ex D in F. & quadrato ipsius F. Quare addito H quadrato ipsius D. fiet N æqualis quadratis ipsorum D F & duplo producti ex D in F. [a] Ac proinde N est quadratus latus habens summam ipsorum D F. [a] *quarta, 2.*
Quod erat intentum.

Tertiò, ducatur A in C. & fiat G. ducaturque E in summam ipsorum A C. & fiat P. sitque amborum G P. summa Q. Dico Q esse quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipsorum A B E. erit productus ex A in C puta G. æqualis duplo quadrati ipsius A, duplo producti ex A in B seu duplo quadrati ipsius D, & duplo producti ex A in E. At duplum quadratorum ab ipsis A D [b] æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & quadrato interualli ipsorum. Quia vero interuallum hoc [c] est medium proportionale inter A & E, [d] quadratus illius æquatur producto ex A in E. Igitur G. æquatur quadrato summæ ipsorum A D, & triplo producti ex A in E. Rursus productus ex E in A C puta P. ostendetur æqualis triplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B, & duplo quadrati ipsius E. Quare Q compositus ex ipsis G P. æquatur quadrato summæ amborum A D. sextuplo producti ex E in A, duplo producti ex E in B. & duplo quadrati ipsius E. & loco eius qui fit bis ex E in A B. sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E vt ostensum est in secunda parte, erit Q æqualis quadrato summæ ipsorum A D. quadruplo producti ex E in A D, & quadruplo quadrati ipsius E. & loco quadrupli ex E in A D sumendo duplum ex F in A D, & loco quadrupli quadrati ipsius E sumendo quadratum ipsius F. fit Q æqualis quadrato summæ A D, & quadrato F. & duplo producti ex F in A D. [e] Quare Q est quadratus summæ ipsorum A D F. [e] *quarta, 2.*
Quod erat propositum.

[b] *septima, huius.*
[c] *decima quinta, huius.*
[d] *vigesima, 7.*

Quartò, ducatur E in B. & fiat R. quo addito ad G. fiat S. Dico S. esse quadratum. Quia enim vt ostensum est, G continet quadratum summæ ipsorum A D, & triplum producti ex A in E. huic addendo R productum ex E in B. fiet S. continens quadratum summæ ipsorum A D. triplum producti ex E in A. & productum ex E in B. Quare loco producti ex E in A B. sumendo duplum producti ex E in D cum quadrato ipsius E. patet S æquari quadrato summæ amborum A D, & quadrato ipsius E, & duplo producti ex E in A D. A C [f] proinde S. quadratus est summæ ipsorum A D E. [f] *quarta, 2.*
Quod erat intentum.

Quintò, ducatur B in C & fiat T. ducaturque E in summam ipsorum B C & fiat V. & summa ipsorum T V esto X. Dico X esse quadratum. Quia enim C æquatur duplo ipsorum A B E, erit productus ex B in C. puta T. æqualis duplo quadrati ipsius B. duplo producti ex B in A, & ex B in E. Et loco producti bis ex B in A. sumendo illi æqualem duplum quadrati ipsius D. Tum pro duplo quadratorum ab ipsis B D. [g] sumendo quadratum summæ amborum B D cum quadrato interualli eorundem, & pro hoc quadrato interualli ipsorum B D, [h] sumendo productum ex B in E, fiet totus T æqualis quadrato summæ amborum B D, & triplo producti ex B in E. Rursus autem productus ex E in B C puta V, æqualis est triplo producti ex E in B duplo producti ex B in A, & duplo quadrati ipsius E. Quare X compositus ex vtroque T V æquatur quadrato summæ amborum B D, sextuplo producti ex E in B. duplo producti ex E in A & duplo quadrati ipsius E. Itaque loco eius qui fit bis ex E in A B sumendo illi æqualem quadruplum producti ex E in D, vnà cum duplo quadrati ipsius E, erit X æqualis quadrato summæ ipsorum B D quadruplo producti ex E in B D. & quadruplo quadrati ipsius E. Quare rursus loco quadrupli ex E in B D, sumendo duplum ex F in B D, & loco quadrupli quadrati ipsius E, sumendo quadratum ipsius F. fiet X æqualis quadrato summæ ipsorum B D, & quadrato ipsius F, & duplo producti ex F in B D. [i] Proinde X quadratus est summæ ipsorum B D F. Quod erat propositum.

D 15.	E 4.	E 8.	
A 9.	B 25.	C 76.	
H 225.	H 225.	G 684.	G 684.
K 136.	M 304.	P 340.	R 100.
L 361.	N 529.	Q 1024.	S 784.
	T 1900.	T 1900.	
	V 404.	Y 36.	
	X 2304	Z 2936.	

[g] *septima, huius.*
[h] *decima quinta, huius.*
[i] *quarta, 2.*

Denique ducatur E in A & fiat Y. quo addito ad T fiat Z. Dico Z esse quadratum. Quia enim, vt ostensum est, T continet quadratum summæ ipsorum B D & triplum producti ex B in E. huic addendo Y productum ex E in A fiet Z. continens quadratum summæ ipsorum B D, triplum producti ex E in B & productum ex E in A. Quare loco producti ex E, in A B sumendo duplum producti ex E in D vnà cum quadrato ipsius E, patet Z æquari quadrato summæ amborum B D. & quadrato ipsius E. & duplo producti ex E in B D. A C [k] proinde Z quadratus est, cuius latus componitur ex summa ipsorum B D E. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

[k] *quarta, 2.*

PROPOSITIO XVII.

Datis duobus quadratis, ſi ſumatur duplum ſummæ illorum, & quadrati interualli laterum: habebuntur tres numeri, quibus ſi addatur ſigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producunt mutuo ductu, detracto eo qui fit ex quadrato interualli laterum, ſiue in ſummam amborum, ſiue in reliquum remanet quadratus.

D 15.	E 4.		
A 9.	B 25.	C 76.	
F 8.	F 8.	F 8.	
G 561.	G 561.	N 1428.	N 1428.
H 336.	L 200.	P 404.	R 132.
K 225.	M 361.	Q 1024.	S 1296.
	T 2772.	T 2772.	
	V 468.	Y 68.	
	Z 2304.	Z 2704.	

Sint duo quadrati A B. & quadratus interualli laterum E. & duplum ipſorum A B E. eſto C. addaturque ſingulis A B C. duplum ipſius E puta F. Dico tres A F. B F. C F. præſtare quod dictum eſt.

Primo enim ducatur A F in B F & fiat G. Ductoque E in reliquum C F. fiat H, quo detracto ex G, maneat K. Dico K eſſe quadratum. [a] Quia enim ducere A F in B F idem eſt, atque ducere A in B & F in F & vtrumque A B in F. patet G continere productum ex A in B. & productum ex F in A B, (ſeu ex E bis in A B.) & quadratum ipſius F, ſeu quadratum ipſius E quater. Rurſus, quia C continet duplum ipſorum A B E. productus ex E in C F, puta H. continet productum ex E in A B bis, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto H ex G. reliquus K æquatur producto ex A in B, [b] ſeu quadrato medij proportionalis D. Quod erat propoſitum.

[a] *prima, 2.*

[b] *vigeſima, 7.*

Secundo, ducatur E in ſummam ipſorum A F. B F, & fiat L. quo detracto rurſus ex G. ſuperſit M. Dico M eſſe quadratum. Nam vt oſtenſum eſt, G continet productum ex A in B, & productum ex E bis in A B. & quadruplum quadrati ipſius E. At productus ex E in A. F. B F, puta L. continet productum ex E in A B. & ex E in ſui quadruplum, ſeu quadruplum quadrati ipſius E. Igitur detrahendo L ex G reliquus M manet æqualis producto ex A in B. & producto ex E in A B. Quamobrem M. quadratus eſt per primam partem præcedentis, cuius latus eſt ſumma amborum D E. Quod erat propoſitum.

Tertiò, ducatur A F in C F. & fiat N. tum ducatur E in ſummam ipſorum A F C F & fiat P. quo detracto ex N. ſuperſit Q. Dico Q. eſſe quadratum. Quia enim ducere A F in C F idem eſt atque ducere A in C. & F in F. ac demum F in ipſos A C. patet N. continere productum ex A in C. & productum ex F in F ſeu ex E in ſeipſum quater, & productum ex F in A C. ſeu ex E bis in A C. Rurſus productus ex E in A F. C F puta P. continet productum ex E in A C. ſemel, & ex E in ſeipſum quater. Quare detracto P ex N. reliquus Q manet æqualis producto ex A in C & producto ex E in ipſos A C. Quare Q. quadratus eſt per tertiam partem præcedentis cuius latus componitur ex ipſis D A F. Quod erat intentum.

Quartò, Ducatur E in reliquum B F & fiat R quo detracto ex eodem N. maneat S. Dico S. quadratum eſſe. Quia enim ducto E in A F. C F fit P. & ducto eodem E in B F fit R. patet P ſuperare R. producto qui fit ex E in interuallum quo A F. C F ſuperant B F. Atqui loco ipſius C. ſumendo duplum ipſorum A B E. Interuallum quo A F. C F ſuperant B F reperitur continere A ter. F bis. B ſemel. Igitur P ſuperat R producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Porrò quia P Q ſimul conficiunt eundem N. quem & R S. ſimul conficiunt, [c] ſunt in arithmetica medietate P ad R. vt S. ad Q. Igitur S. ſuperat Q producto ex E in A ter, in F bis, in B ſemel. Et loco producti ex E in A B ſemel, [d] ſumendo productum ex E in D bis, & in ſeipſum ſemel, fiet interuallum quo S ſuperat Q æquale producto ex E bis in ipſos D A F. & quadrato ipſius E. Quare cùm Q oſtenſus ſit quadratus, cuius latus componitur ex ipſis D A F. & quadrato Q addendo quadratum ipſius E & duplum producti ex ipſo E in latus ipſius Q. fiat S. [e] Vtique S. quadratus eſt latus habens compoſitum ex ipſis D A F E ſeu ex D A & triplo ipſius E. Quod erat propoſitum.

[c] *quarta, 1. poriſm.*

[d] *quarta, huius,*

[e] *quarta, 2.*

Quintò, Ducatur B F in C F. & fiat T. tum ducatur E in ſummam ipſorum B F. C F. & fiat V. quo detracto ex T ſuperſit X. Dico X eſſe quadratum. Quia enim T producitur ex B F. in C F. patet T continere productum ex B in C, & productum ex F in F, ſeu ex E in F bis, & productum ex F in B C, ſeu ex E bis in B C. At productus ex E in B F. C F. ſeu V. continet productum ex E in B C. ſemel, & ex E in F bis. Igitur detracto V. ex T. reliquus X. continet productum ex B in C. & productum ex E in B C. Quare X quadratus eſt per quintam partem præcedentis, cuius latus componitur ex ipſis B D F. Quod erat propoſitum.

Denique ducatur E in reliquum A F & fiat Y. quo detracto ab eodem T. ſuperſit Z. Dico & ipſum Z quadratum eſſe. Quia enim ex E in B F. C F fit V. & ex eodem E in A F fit Y, patet V ſuperare

Y producto qui fit ex E in interuallum quo B F. C F superant A F. Sed eodem quo suprà, ductu vtentes inueniemus hoc interuallum continere ipsum B ter. F bis. A semel. Quare V. superat Y. producto ex E in B ter, in F. bis, in A semel. Et loco producti ex E in A B semel, sumendo illi æqualem productum [a] ex E in D bis, & in seipsum semel fiet interuallum quo V superat Y æquale producto ex E in ipsos D B F bis, & quadrato ipsius E. Quoniam vero V X. simul, æquantur ipsis Y Z simul, [b] sunt in æquali differentia V Y. & Z X. Ergo interuallum quo Z. superat X. æquatur duplo producti ex E in ipsos D B F. & quadrato ipsius E. Quamobrem cùm X ostensus sit quadratus, cuius latus componitur ex ipsis B D F. patet ad ipsum X. addendo quadratum ipsius E. & duplum producti ex ipso E in latus ipsius X, [c] compositum Z esse quadratum cuius latus constat ex ipsis D B F E seu ex D B & triplo ipsius E. Quare ex omni parte constat propositum.

[a] *quarta, huius.*
[b] *quarta, 1. perism.*
[c] *quarta, 2.*

PROPOSITIO XVIII.

Si planus sub duobus numeris contentus, ducatur in compositum ex ipsis, idem fiet numerus, atque si quadratus primi ducatur in secundum & quadratus secundi ducatur in primum.

D 12. E 18.
A 2. B 3.
C 6.

Sint duo numeri A B. & planus sub ipsis contentus C. quo ducto sigillatim in ipsos A. B. fiant D E. patet ergo [d] summam ipsorum D E. æqualem esse producto ex C in compositum ex ipsis A B. Hanc igitur summam dico æqualem esse producto ex quadrato ipsius A in B, & ex quadrato ipsius B in A. Nam sumptis tribus numeris A. B & A rursus, [e] idem gignetur numerus quomodocunque & quouis ordine inter se ducantur. Quare ducto A in A & producto, nempe quadrato ipsius A ducto in B. fiet idem D, qui fit ducto A in B & producto C in A. Eodem argumento probabitur numerum E fieri ducto quadrato ipsius B in A. Quamobrem constat propositum.

[d] *prima, 2.*
[e] *tertia, 2. perism.*

PROPOSITIO XIX.

Si numerus secetur in duas partes, cubus totius æqualis est cubis partium, & numero qui fit ter ex toto numero in planum sub partibus comprehensum.

A...C..B
D.....G....K.....M

Sit numerus A B sectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis partium A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum sub ipsis A C. C B comprehensum. Sumatur D M quadratus ipsius A B. [f] qui cùm sit æqualis quadratis ipsorum A C. C B & plano bis sub ipsis comprehenso, esto D G quadratus ipsius A C. & G K quadratus ipsius C B. & K M planus bis sub A C. C B contentus. Itaque patet ex definitione cubi ex toto A B in totum D M produci cubum ipsius A B. [g] Ergo idem cubus producetur ductis singulis partibus ipsius A B in singulas ipsius D M. Ducto autem A C in suum quadratum D G. fit cubus ipsius A C. & ducto C B in suum quadratum G K. fit cubus ipsius C B. Ergo iam habemus cubos partium. Restat vt ducamus A C in G K, & C B in D G, tum vtrumque A C. C B in K M. [h] Atqui ducere ipsos A C. C B in K M. idem est atque ducere totum A B in K M. Quare cùm K M. sit planus bis sub partibus A C. C B contentus, patet ducere A C. C B in K M. idem esse atque ducere totum A B in planum bis sub partibus comprehensum. Rursus autem ducere A C in G K, & C B in D G, [i] idem est atque ducere totum A B in planum sub partibus comprehensum. Quamobrem harum omnium multiplicationum producta simul, (seu cubus totius A B) æquantur cubis ipsorum A C. C B, & numero qui fit ter ex toto A B in planum sub ipsis A C. C B. comprehensum. Quod erat ostendendum.

[f] *quarta, 2.*
[g] *sebol. prima, 2.*
[h] *prima, 2.*
[i] *decima octaua, huius.*

PROPOSITIO XX.

Si numerus secetur in duas partes, cubus totius æqualis est cubis partium, & numeris qui fiunt ex qualibet parte in quadratum alterius ter.

A...C..B

Sit numerus A B sectus in duas partes A C. C B. Dico cubum totius A B æquari cubis ipsorum A C. C B, & numeris qui fiunt ter ex quadrato ipsius A C in C B, & ex quadrato ipsius C B in A C. Etenim [k] cubus totius A B æquatur cubis ipsorum A C. C B, & numero qui fit ter ex A B in planum sub A C. C B. Sed numerus qui fit ex A B in planum sub A C. C B. [l] æquatur productis ex qualibet parte in quadratum alterius. Quare numerus qui fit ter ex A B in planum sub partibus, æquatur eis qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Igitur cubus totius A B æquatur cubis partium & numeris qui fiunt ter ex qualibet parte in quadratum alterius. Quod demonstrandum erat.

[k] *decima nona, huius.*
[l] *decima octaua, huius.*

PROPOSITIO XXI.

Duorum cuborum interuallum, æquatur cubo interualli laterum, & numero qui fit ter ex eodem interuallo laterum in planum ſub lateribus comprehenſum.

A..:.D..B....C
E 216. F 64.

Sint inæquales numeri A B. B C. quorum interuallum D B, ita vt A D. B C. ſint æquales. Et cubus ipſius A B eſto E, cubus autem ipſius B C ſit F. Dico interuallum ipſorum E F. æquari cubo ipſius D B. & numero qui fit ter ex D B in planum ſub A B. B C. Etenim [a] cubus totius A B, nimirum E æquatur cubis partium A D D B & numero qui fit ter ex A B in planum ſub A D. D B. quare cùm A D ſit æqualis B C. & ideo cubus ipſius A D ſit F. patet E æquari ipſi F & cubo ipſius D B & numero qui fit ter ex A B in planum ſub A D. D B. Sumptis autem tribus numeris A B. A D. D B. [b] idem producetur numerus quouis ordine ij inter ſe ducantur. Quare idem numerus qui fit ex A B in planum ſub A D. D B. fiet etiam ex D B in planum ſub A B. A D. ſeu ſub A B. B C. Quamobrem cubus E æquatur cubo F, cubo ipſius D B, & numero qui fit ter ex D B in planum ſub A B. B C. Itaque à cubo E auferendo cubum F, remanet interuallum cuborum æquale cubo interualli laterum D B, & numero qui fit ter ex eodem D B in planum ſub lateribus A B. B C comprehenſum. Quod demonſtrandum erat.

a *decima nona, huius.*

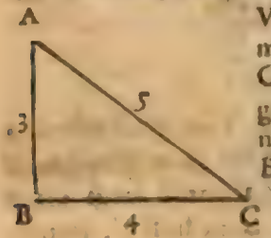
b *tertia, 1. Porism.*

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI IN DIOPHANTVM PORISMATVM

Liber Tertius.

DEFINITIO I.

TRiangulum rectangulum in numeris constitui dicitur, cùm tres exhibentur numeri, ita vt maioris quadratus, quadratis reliquorum simul sumptis æqualis sit.



Vt tres numeri 3. 4 5. dicuntur constituere triangulum rectangulum quia maioris 5. quadratus 25. æqualis est quadratis 9. & 16. reliquorum 3. & 4. Cuius rei ratio pendet à quadrageſima ſeptima, 1. Euclidis. Nam verbi gratia, ſi ſit triangulum rectangulum A B C. cuius angulus rectus B. demonſtrauit Euclides quadratum lateris A C. æquari quadratis ipſorum A B. B C.

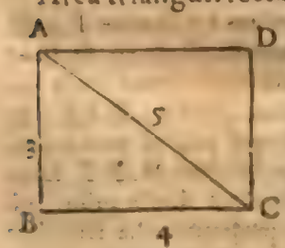
DEFINITIO II.

Maius latus trianguli rectanguli, dicitur hypotenuſa. Reliqua duo, latera circa rectum, & horum alterum, baſis: alterum vocatur Cathetus ſeu perpendiculum.

Sic in ſuperiore diagrammate A C vocatur hypotenuſa ſeu ſubtendens, quia ſubtendit angulum rectum. Reliqua vero latera A B. B C dicuntur latera circà rectum, quia rectum angulum comprehendunt. Et horum alterum, puta B C dicitur baſis, alterum A B dicitur perpendiculum, ſi triangulum concipiatur inniti lateri B C. vel è conuerſo B C dicetur perpendiculum, & A B baſis, ſi triangulum ipſi A B niti concipiatur.

DEFINITIO III.

Area trianguli rectanguli eſt ſemiſſis plani contenti ſub lateribus circa rectum



Sic poſitis lateribus circa rectum A B. B C. 3. & 4. cùm planum ſub ipſis ſit 12. erit area trianguli rectanguli A B C. numerus 6. Et ratio eſt euidens. Nam ſi perficiatur parallelogrammum rectangulum A B C D. patet eius aream fieri ducto latere A B in B C. Quamobrem cùm triangulum A D C. triangulo A B C ſit æquale, manifeſtum eſt ipſum A B C. eſſe dimidium totius parallelogrammi, atque adeo eius aream eſſe dimidium producti ex A B in B C.

DEFINITIO IV.

Similia triangula rectangula dicuntur, quæ latera habent proportionalia.

Cum ſcilicet eſt hypotenuſa vnius ad hypotenuſam alterius, ſicut baſis ad baſim, & perpendiculum ad perpendiculum, qualia ſunt triangula 3. 4 5. & 12. 16. 20.

DEFINITIO V.

A duobus planis ſimilibus formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex eorum ſumma, & eorundē interuallo, & duplo medij proportionalis, conſtant latera trianguli.

Sic à planis ſimilibus 3. & 12. dicetur formari triangulum. 15. 9. 12. quia 15. eſt ſumma planorum ſimilium, 9. interuallum eorundem, 12. duplum medij proportionalis.

DEFINITIO VI.

A duobus quibuſcunque numeris formari dicitur triangulum rectangulum, cùm ex aggregato & ex interuallo quadratorum ab ipſis, & ex duplo plani ſub ipſis numeris contenti, conſtant latera trianguli.

Sic à duobus numeris 2. & 3. formari dicitur triangulum 13. 5. 12. Quia 13. eſt aggregatum quadratorum ab ipſis 2. & 3. & 5. eſt eorundem quadratorum interuallum, & 12. eſt duplum plani ſub 2. & 3. contenti. Hos autem duos modos formandi triangulum rectangulum legitimos eſſe demonſtrabimus hoc libro, propoſitione tertia & quinta.

OBSERVATIO D. P. F.

A Tribus numeris in proportione Arithmeticâ poſſumus formare triangulum, ſi ſecundum hanc definitionem ſextam formemus illud à medio & differentiâ, Nam ſolidum ſub tribus ductum in differentiam faciet aream dicti trianguli, atque ideo ſi differentia ſit vnitas, ſolidum ſub tribus erit area trianguli.

DEFINITIO VII.

A duobus datis triangulis rectangulis, tertium efformari dicitur, cùm productus ex hypotenuſa 1′. in hypotenuſam 2′. fit hypotenuſa 3′. At aggregatum productorum ex baſi 1′. in baſim 2′. & ex perpendiculo 1′. in perpendiculum 2′. fit alterum latus circa rectum 3′. Denique productorum ex baſi 1′. in perpendiculum 2′. & ex baſi 2′. in perpendiculum 1′. minus de maiori ſubtrahendo, fit alterum latus 3′.

Sic datis duobus triangulis 5. 4. 3. & 13. 12. 5. fiet tertij hypotenuſa productum ex 5. & 13. nempe 65. alterum latus circa rectum erit aggregatum numerorum 48 & 15. qui fiunt ex baſi in baſim & ex perpendiculo in perpendiculum. Tertium vero latus erit quod relinquitur auferendo productum ex 4. in 5. nempe 20. à producto ex 3. in 12. nempe à 36. Erunt igitur latera omnia tertij trianguli. 65. 63. 16. Hic modus etiam demonſtrabitur infrà, propoſitione decima.

PROPOSITIO I.

Si latera trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicentur aut diuidantur, fit aliud triangulum rectangulum ſimile priori.

Hanc & ſequentem propoſitionem omnibus triangulis ſimilibus in vniuerſum applicatam demonſtrauit Euclides libro ſexto ſed ex propriis numerorum principiis eruto demonſtrationis medio, libet hîc vtramque triangulis rectangulis ſingulariter applicare. Sint triangulí rectanguli latera circa rectum A B, & hypotenuſa G. & horum quadrati D E F, ita vt F ſit æqualis ambobus D E. ductoque eodem numero G in ipſos A B C. fiant H. K. L. quorum quadrati M. N P. Dico H K L conſtituere triangulum rectangulum ſimile priori, nimirum quadratum P. ambobus M N. eſſe æqualem, & latera H K L. eſſe proportionalia lateribus A B C. & quidem hoc vltimum patet [b] cùm fiant H K L. ex eodem G in ipſos A B C. Primum autem probatur. [c] Quia enim rationes ipſorum D E F ad ipſos M N P ſunt duplicatæ rationum ipſorum A B C ad ipſos H K L, cùm vt oſtenſum eſt, ſit A ad H, vt B ad K & vt C ad L, erit etiam D ad M vt E ad N. & vt F ad P. & permutando erit D ad F vt M ad P. & E ad F vt N ad P. Cùm ergo ſit D primus ad F ſecundum, ſicut M tertius ad P. quartum, & rurſus ſit E quintus ad F ſecundum, ſicut N ſextus ad P quartum; [d] Erunt & D E ſimul, primùs ſcilicet & quintus ad F ſecundum, ſicut M N ſimul, nimirum tertius & ſextus ſimul ad P quartum. Sed D E ſimul æquantur ipſi F ex hypotheſi. Ergo & M N ſimul æquantur ipſi P. [e] Quare H K L conſtituunt triangulum rectangulum ſimile priori. Quod demonſtrandum erat. Eadem porro diuiſionis ratio eſt quæ multiplicationis vt manifeſtum eſt. Igitur conſtat propoſitum.

[a] *definitio prima.* A 3. B 4. C 5. D 9. E 16. F 25. G 2. H 6. K 8. L 10. M 36. N 64. P 100.

[b] *decima ſeptima* 17.

[c] *vndecima*, 8.

[d] *vigeſima quarta*, 5.

[e] *definitio prima.*

PROPOSITIO II.

Areæ ſimilium triangulorum rectangulorum ſunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Sint latera triangulorum rectangulorum ſimilium. A B C. D E F. & ſint A & D hypotenuſæ B C.

K 48. G 24.
A 10. B 8. C 6.
D 5. E 4. F 3.
L 12. H 6.

E F latera circa rectum, ductoque B in C fiat K. cuius semissis numerus G. [a] area scilicet trianguli A B C. similiter ducto E in F fiat L, cuius semissis H. area trianguli D E F. Cum ergo similia sint triangula, [b] erit A ad D vt B ad E & vt C ad F. Dico itaque esse aream G ad aream H in duplicata ratione lateris B ad latus E, vel lateris C ad latus F. Cùm enim plani K L habeant latera proportionalia, [c] erunt plani similes, & erit K ad L in duplicata ratione lateris B ad latus E vel C ad F. Sed quia G est dimidium ipsius K, & H est dimidium ipsius L, est G ad H vt K ad L. Igitur & G ad H est in duplicata ratione laterum B C. ad latera E F. Quod demonstrandum erat.

[a] *defin. 3.*
[b] *defin. 4.*
[c] *decima octaua, 8.*

SCHOLIVM.

[m] *Quia igitur sumpto denominatore rationis cuiuslibet, eius quadratus est denominator rationis duplicatæ illius, sequitur sumpto denominatore rationis laterum, eius quadratum esse denominatorem rationis arearum, vt in proposito paradigmate, quia rationis inter latera denominator est 2. rationis inter areas denominator est 4. quadratus ipsius 2. & sic de alijs.*

PROPOSITIO III. *Problema 1.*

A duobus similibus planis numeris, triangulum rectangulum efformare.

A 3. B 6. C 12.
D 9. E 12. F 15.

Sint duo plani similes A C à quibus oporteat formare triangulum rectangulum. [d] Sumatur B medius proportionalis ipsorum A C. Et sit amborum A C. summa F, interuallum D & duplum ipsius B esto E. Patet tres D E F efformatos esse ab ipsis A B C vt traditum est definitione quinta. Dico itaque tres D E F constituere triangulum rectangulum. Quia enim F est summa amborum A C [e] erit quadratus ipsius F æqualis quadruplo plani sub A & C. & quadrato interualli ipsorum A C, qui est quadratus ipsius D, [f] At quadruplum plani sub A & C. æquatur quadruplo quadrati ipsius B. cùm A B C ponantur proportionales, [g] & quadruplum quadrati ex B, est quadratus dupli ipsius B, nimirum ipsius E. Igitur quadratus ipsius F est æqualis quadratis ipsorum D E. [h] atque adeo D E F constituunt triangulum rectangulum. Quod erat propositum.

[d] *decima octaua, 8.*
[e] *quinta 2. porism.*
[f] *vigesima, 7.*
[g] *Schol. quarta, 2.*
[h] *defin. 2.*

COROLLARIVM.

Summa duorum planorum similium constituit hypotenusam trianguli rectanguli.

Hinc patet quemlibet numerum statui posse hypotenusam trianguli rectanguli, cùm quilibet numerus diuidi possit in duos datam rationem seruantes, atque adeo infinitis modis componi possit ex duobus planis similibus, vnde & erui potest canon ad diuidendum quemlibet quadratum in duos quadratos infinitis modis, vt docebimus ad octauam 2. Diophanti.

PROPOSITIO IV.

Cuiuslibet trianguli rectanguli hypotenusa componitur ex duobus planis similibus.

D 100. E 64. F 36.
A 10. B 8. C 6.
G..... H.. K.. L..... M

Sit hypotenusa trianguli rectanguli A & latera circa rectum B C. & ipsorum A B C quadrati D E F. ita vt D ipsis E F sit æqualis. Dico A componi ex duobus planis similibus. Vel enim A est par, vel impar. Sit primum par. Ergo & D par est, [i] & pariter par. Igitur non erit ipsorum E F alter par, alter impar, alioquin [k] compositus ex ipsis D esset impar, contra id quod ostensum est. Non erit etiam vterque ipsorum E F impar, [l] nam sic vterque ipsorum excederet pariter parem vnitate, atque adeo compositus ex ipsis D. excederet pariter parem binario, [m] & esset pariter impar tantum, at ostensus est pariter par. Reliquitur ergo vtrumque E F esse parem. Quare & vterque B C. par est. Itaque sumatur ipsi A æqualis G L atque adeo par, & addatur ei L M æqualis alteri laterum circa rectum puta C erit igitur & L M par. [n] Quare totus G M par etiam erit. Secetur ergo bifariam in K & ipsi K L sumatur æqualis H K. ita vt reliquus G H. reliquo L M seu C. sit æqualis, Cùm ergo G L componatur ex duobus G K. K L. [o] erit quadratus totius G L, seu D. æqualis quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato interualli G H qui est F. At idem D. est æqualis [p] quadratis E F ex hypothesi. ergo quadrati E F æquantur quadruplo plani sub G K. K L. & quadrato F. Quare ablato vtrimque F. remanet E æqualis quadruplo plani sub G K. K L. Quamobrem planus sub G K K L æquatur quadranti ipsius E, seu quadrato semissis ipsius B [q] & ipse semissis ipsius B est medius proportionalis inter G K. & K L. vnde sequitur ipsos [r] G K. K L. esse planos similes. Quamobrem A æqualis G L. componitur ex duobus planis similibus. Quod erat propositum.

[i] *vigesima prima 1. porism.*
[k] *Schol. vigesimæ tertiæ, 9.*
[l] *vigesima prima 1. porism.*
[m] *vndecima, 1. porism.*
[n] *vigesima prima 9.*
[o] *quinta, 2. porism.*
[p] *vigesima 7.*
[q] *vigesima 8.*

D 169. E 144. F 25.
A 13. B 12. C 5.
G.....H....K....L.....M

Iam vero ſit A impar, atque ideo & D impar. Igitur ex ipſis E F alterum parem, alterum imparem eſſe neceſſe eſt. Nam ſiue vterque ponatur par, ſiue vterque impar, a erit compoſitus ex ipſis D par, contra hypotheſim. Sit ergo E par. F impar. Igitur & B par erit, & C impar. Itaque ſumpto G L æquali ipſi A, & ideo impare, addatur ei L M impari C. æqualis. b erit ergo totus G M par. Quare ſecetur bifariam in K & ipſi K L. ſumatur æqualis H K, ita vt G H remaneat æqualis ipſi L M. Tunc, vt prius oſtendemus, quadratum ex G L. ſeu D æquari quadruplo plani ſub G K. K L. & quadrato interualli G H qui eſt F. & tandem quadratum E æquari quadruplo plani ſub G K. K L. atque ideo planum ipſum ſub G K. K L æquari quadrato ſemiſſis ipſius B. Vnde ſequitur ipſos G K. K L eſſe planos ſimiles. Quamobrem A componitur ex duobus planis ſimilibus. Quod erat oſtendendum.

vigeſima prima & vigeſima ſecũda 9.

b ſchol. vigeſime tertiæ 9.

SCHOLIVM.

Hinc patet qui ſint illi plani ſimiles ex quibus componitur hypotenuſa trianguli. Nam ſi hypotenuſa addatur & adimatur vtrumlibet laterum circa rectum, ſemiſſes ſumma, & interualli exhibebunt planos illos ſimiles.

Vnde rurſus collige ſi hypotenuſa ſit numerus par, eam ſemper bis componi ex duobus planis ſimilibus integris. Nam tunc vt oſtenſum eſt, vtrumque latus circa rectum eſt par, quare vtrumlibet addatur & adimatur hypotenuſæ, erunt ſummæ & interualla numeri pares, & eorum ſemiſſes in integris habebuntur. Sic poſita hypotenuſa 10. ſi ei addas & adimas 6. fiet ſumma & interuallum 16. & 4. quorum ſemiſſes 8. & 2. ſunt plani ſimiles ex quibus 10. conſtat. Rurſus ſi eidem 10. addas & adimas alterum latus 8. fit ſumma & interuallum 18. & 2. quorum ſemiſſes 9. & 1. ſunt alij duo plani ſimiles ex quibus 10. componitur.

Si vero hypotenuſa ſit impar, cùm vt oſtenſum eſt, alterum laterum circa rectum ſit par, alterum impar. Componetur hypotenuſa ſemel tantum ex integris duobus planis ſimilibus, qui habentur ſi ei addatur & adimatur latus illud quod eſt impar, & ſummæ & interualli ſemiſſes ſumantur; ſed ſi hypotenuſæ addatur & adimatur latus par, tam ſumma quàm interuallum impar erit, atque adeo ſemiſſes eorum non habebuntur in integris.

PROPOSITIO V. *Probl. 2.*

A duobus quibuſcumque inæqualibus numeris triangulum rectangulum formare.

A 2. B 5.
C 4. D 10. E 25.
F 29. G 21. H 20.

Sint duo numeri inæquales A B à quibus oporter formare triangulum rectangulum. Sint ipſorum A B quadrati C E. & productus ex A in B. eſto D. Tunc duorum C E ſumma eſto F, & eorundem interuallum G. & ſit H duplum ipſius D. Dico F. G. H eſſe triangulum rectangulum quæſitum. Nam ipſos F G H formari ab ipſis A B vt traditum eſt definitione ſexta manifeſtum eſt. Reſtat probandum eoſdem F G H conſtituere triangulum. Quoniam ergo C E ſunt plani ſimiles, & D medius eorum proportionalis, patet ab ipſis C E formatos eſſe F G H, atque adeo F G H conſtituere triangulum rectangulum per tertiam huius. Quare conſtat propoſitum

SCHOLIVM.

Inæquales numeros eſſe oportet. Alioquin ſi æquales eſſent, quadrati quoque eorum eſſent æquales, & haberi non poſſet latus circa rectum quod eſt interuallum quadratorum. Cæterum patet modum hunc formandi triangulum à duobus quibuſcumque numeris non differre ab eo qui traditus eſt propoſitione tertia, ſi loco laterum ſumantur ipſa quadrata & ab ipſis concipiatur formari triangulum.

PROPOSITIO VI.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur quadratis ſummæ extremorum, & interualli mediorum. Itemque quadratis ſummæ mediorum, & interualli extremorum.

H 8. K 1.
A 2. B 4. C 3. D 6.
G 7. L 4.

Sint A B C D quatuor numeri proportionales, ſit videlicet A ad B vt C ad D. & ſit extremorum ſumma H, mediorum interuallum K. Rurſus ſit mediorum ſumma G. interuallum extremorum L. Dico quadratorum à ſingulis A B C D aggregatum æquari tum quadratis ipſorum H. K. tum quadratis G L. Quia enim c quadratus H æqualis eſt quadratis partium A & D & duplo plani ſub A & D ſeu plani ſub B & C. duplum autem plani ſub B & C cum quadrato inter-

c quarta 2.

ualli eorum K [a] æquatur quadratis ipsorum B C. Manifestum est quadratos singulorum A B C D æquari quadratis ipsorum H K. Eadem prorsus ratione, quia quadratus abs G. æquatur quadratis partium B. C. & plano bis sub B & C. seu sub A & D. & planus bis sub A & D vnà cum quadrato interualli eorum L. æquatur quadratis ipsorum A D, sequitur quadratos abs G & L æquari rursus quadratis à singulis A B C D. Quamobrem constat propositum.

[a] decima nona, 7.
[b] quarta, 2. porism.

PROPOSITIO VII.

Si numerus ex duobus inæqualibus quadratis compositus; ducatur in alium compositum quoque ex duobus inæqualibus quadratis, qui non sint proportionales iis ex quibus prior componitur, producetur numerus qui componetur bis ex duobus quadratis.

C 65.
A 5. B 13.
D 1. E 4. F 4. G 9.
H 1. K 2. L 2. M 3.
N 2. P 4. Q 3. R 6.

Sit A compositus ex duobus quadratis inæqualibus D E. itemque B compositus ex alijs quadratis inæqualibus F G. qui non sint proportionales ipsis D E ductoque A in B. fiat C. Dico C componi bis ex duobus quadratis. Etenim quadratorum D. E. F. G latera sunto H K L M. ductoque L. in ipsos H K fiant N P. & ducto M in eosdem H K fiant Q R. Erit igitur tam N ad P quàm Q ad R sicut H ad K. Quare ipsi N. P. Q. R. sunt proportionales. Quia verò ducere A in B [d] idem est ac ducere singulos DE in singulos F G. At ex singulis quadratis D E in singulos quadratos F G. fiunt quadrati quatuor quorum latera sunt ipsi N. P. Q. R. qui fiunt ex singulis lateribus H K in singula latera L M. patet C æqualem esse quadratis ipsorum N. P. Q. R. [e] sed quadrati ipsorum N. P. Q. R. æquantur tum quadrato summæ extremorum N R. & quadrato interualli mediorum P Q. tum quadrato summæ mediorum P Q. & quadrato interualli extremorum N R. Igitur & C æquatur tum quadrato summæ extremorum, & quadrato interualli mediorum; tum quadrato summæ mediorum, & quadrato interualli extremorum, ac proinde componitur bis ex duobus quadratis. Quod erat demonstrandum.

[c] decima septima 7.
[d] Schol. prima, 2.
[e] sexta, huius.

SCHOLIVM.

Hìc duæ veluti conditiones apponuntur. Prima vt vterque A B componatur ex quadratis inæqualibus. Secunda vt quadrati componentes A non sint proportionales componentibus B. Quarum conditionum vt necessitas appareat, ponatur alter ipsorum puta B componi ex quadratis æqualibus F G. Igitur & latera L. M. erunt æqualia. Quare ipsi N & Q. qui fiunt ex eodem H in L & in M. æquales erunt, similiter æquales erunt ipsi P R cùm fiant ex eodem K in æquales numeros L. M. Patet igitur extremorum N R summam æquari summæ mediorum P Q & vtrorumque etiam idem esse interuallum. Quare C. non exinde componetur bis ex duobus quadratis, sed tantum semel, nimirum ex quadrato summæ extremorum, vel mediorum, & ex quadrato interualli eorundem.

C 136.
A 17. B 8.
D 16. E 1. F 4. G 4.
H 4. K 1. L 2. M 2.
N 8. P 2. Q 8. R 2.

C 100.
A 5 B 20.
D 1. E 4. F 4. G 16.
H 1. K 2. L 2. M 4.
N 2. P 4. Q 4. R 8.

Iam verò quadrati D E sint proportionales quadratis F G. Ergo & latera erunt proportionalia, eritque H ad K. sicut L ad M. [f] Quare planus sub extremis H M, puta Q. æqualis erit plano sub mediis nempe ipsi P. Quamobrem cùm mediorum P. Q. nullum sit interuallum, non poterit concludi numerum C. componi ex duobus quadratis, eò quod æqualis sit quadrato summæ extremorum N R, & quadrato interualli mediorum P Q. Sed tantum ostendi poterit C componi semel ex duobus quadratis, quia æquatur quadrato summæ mediorum P Q & quadrato interualli extremorum N. R. Sed & hinc constat ipsum C esse quadratum, æqualem scilicet quadrato summæ extremorum N R. Quod & ipsum aliunde arguitur. Quia enim est D ad F vt E ad G, erit & vterque D E simul seu A ad vtrumque F G simul seu ad B sicut D ad F. Quare cùm D F sint quadrati, est A ad B in ratione quadrati ad quadratum [h] ac proinde A B sunt plani similes, & ex eorum mutuo ductu productus C est quadratus.

[f] decima nona, 7.
[g] duodecima, 7.
[h] vigesima sexta, 8.
[i] prima, 9

Attamen in propositionis conditione dixi potius quadratos ex quibus A componitur non debere esse proportionales quadratis componentibus B. quàm A B non debere esse planos similes. Quia plani similes non omnino excludendi erant, sed tantum quatenus ex quadratis proportionalibus componuntur; nam si dentur plani similes qui componantur ex quadratis minime proportionalibus, ij optimè satisfacient proposito quales sunt 5. & 125. quorum ille componitur ex quadratis 1. & 4. iste verò ex quadratis 4. & 121. qui non sunt illis proportionales. Vnde nihil obstat quo minus per hanc propositionem concludamus productum ex 5. in 125. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ex 225. & 400. Itemque ex 576. & 49.

PROPOSITIO VIII.

Si duorum triangulorum rectangulorum latera circa rectum proportionalia fuerint, ſimilia erunt triangula. Sed & ſi fuerit hypotenuſa primi ad alterum latus eiuſdem, ſicut hypotenuſa 2. ad alterum illius latus, ſimilia erunt ipſa triangula.

Demonſtratur hoc ab Euclide in omnibus triangulis lib. 6. prop. ſexta & ſeptima. Sit triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenuſa A. Itemque triangulum rectangulum D E F cuius hypotenuſa D. & primo ſit B ad E ſicut C ad F. Dico triangula eſſe ſimilia. Sumantur G H K quadrati ipſorum A B C. Itemque L M N. quadrati ipſorum D E F. Cùm ergo ſit B ad E vt C ad F, erit & H ad M vt K ad N [a] cum vtraque ratio ſit eiuſdem rationis duplicata. [b] Igitur & antecedentes ſimul H K ſeu G. ad conſequentes ſimul M N. ſeu ad L. erunt vt H ad M vel K ad N. Quare cùm ſit G ad L vt H ad M vel vt K ad N. [c] erit & A ad D vt B ad E & vt C ad F. Atque ideo tota triangula ſimilia erunt ex definitione. Quod erat propoſitum.

G 25. H 16. K 9.
A 5. B 4. C 3.
D 10. E 8. F 6.
L 100. M 64. N 36.

[a] *vndecima, 8.*
[b] *duodecima, 7.*
[c] *vndecima, 8.*

Deinde ſit A ad D vt B ad E. Dico rurſus ſimilia eſſe triangula. Etenim quia eſt A ad D vt B ad E, erit & G ad L vt H ad M. Quare permutando erit G ad H vt L ad M. & diuidendo erit K ad H vt N ad M. & rurſus permutando erit K ad N vt H ad M. Igitur eſt & C ad F vt B ad E vel vt A ad D. Ac proinde ſimilia ſunt triangula. Quod erat demonſtrandum

PROPOSITIO IX.

A proportionalibus numeris formata triangula, ſimilia ſunt.

Sint proportionales numeri A B. C D. quorum quadrati E F. G H [a] à quibus formentur triangula rectangula, ſit videlicet K. ſumma ipſorum E F, at L eorundem interuallum, M duplum medij proportionalis. Similiter ſit N. ſumma ipſorum G H. At P eorundem interuallum. Q duplum medij proportionalis. Dico triangula K C M. N P Q. eſſe ſimilia. Quia enim eſt A ad B vt C ad D. erit & E ad F vt G ad H & componendo erit vterque E F ſimul, nempe K ad F. ſicut ambo G H, nempe N. ad H. Rurſus quia eſt E ad F vt G ad H, diuidendo & conuertendo, erit F ad L, ſicut H ad P. Cùm ergo ſit K ad F vt N ad H, & rurſus F ad L, vt H ad P. erit ex æquo K ad L. vt N ad P. [c] Quamobrem ſimilia erunt triangula K L M. N P Q. Quod erat propoſitum. Eademque erit demonſtratio ſi formentur triangula à planis ſimilibus proportionalibus vt traditum eſt prop. tertia. Nam ſi ponantur huiuſmodi plani E F. G H. ab eis formata erunt triangula K L M. N P Q. quæ oſtendentur ſimilia vt prius.

E 4. F 1. G 36. H 9.
A 2. B 1. C 6. D 3.
K 5. L 3. M 4. N 45. P 27. Q 36.

[a] *quinta, huius.*
[c] *octaua huius.*

PROPOSITIO X. *Problema 3.*

A datis duobus triangulis non ſimilibus, efformare alia duo.

Sit triangulum rectangulum A B C. & aliud non ſimile D E F, à quibus oporteat efformare alia duo; ducatur baſis A in baſim D, & perpendiculum B in perpendiculum E & fiant H G. Tum ducatur baſis D in perpendiculum B & baſis A in perpendiculum E & fiant K L. Deinde additis K & L ſimul fiat M. & ex duobus H G minor de maiore auferatur & ſuperſit N. Similiter addantur H G. & fiat Q & ex ipſis K L minor de maiore detrahatur, & ſuperſit P. Denique ducatur hypotenuſa C. in hypotenuſam F & fiat R. Dico M N R. & P Q R eſſe quæſita triangula. Primum enim ea formata eſſe conſtat à datis triangulis, vt traditum eſt definitione ſeptima, ſi videlicet latera A D. vel B E nunc vt baſes nunc vt perpendicula conſiderentur. Igitur reſtat ſolum probandum M N R conſtituere triangulum rectangulum, itemque P Q R. Ducatur C in ipſos D E & fiant T V. Cùm ergo idem C ductus in ſingulos D E F fecerit ipſos T V R / patet T V R conſtituere triangulum rectangulum, & quadratum ab R æquari quadratis abs T, & V. Similiter quia idem D ductus in ſingulos B A C, producit ipſos K H T, conſtituunt & hi triang. rect. & quadratus abs T æquatur quadratis abs K & H. Rurſus quia idem E ductus in ſingulos A B C, producit ipſos L G V, conſtituunt & hi triang. rect. & quadratus ab V æquatur quadratis abs L. & G. Quare cùm quadratus ab R ſit oſtenſus æqualis quadratis abs T & V, erit quadratus ab R æqualis quadratis à ſingulis K H L G [g] Quoniam verò ex eodem D in ipſos B A producuntur K H. erit K ad H vt B ad A. Similiter quia ex E in eoſdem B A fiunt G L. erit G ad L vt B ad A, ac proinde erit K ad H vt G ad L. Quamobrem [h] aggregatum quadratorum à ſingulis K H L G. ſeu quadratus ad R. æquatur quadrato ſummæ extremorum ſeu quadrato ab M. & quadrato interualli mediorum ſeu quadrato ab N. Quare M N R conſtituunt triang. rectang. Rurſus idem aggregatum

A 5. B 12. C 13.
D 3. E 4. F 5.

K 36 H 15. | T 39.
L 20. G 48. | V 52.

M 56. N 33. | R 65.
P 16. Q 63.

[f] *prima, huius.*
[g] *decima ſeptima 7.*
[h] *ſexta, huius.*

quadratorum à singulis K H. L G. seu quadratus ab R æquatur quadrato summæ mediorum seu quadrato abs Q & quadrato interualli extremorum seu quadrato abs P. Quamobrem & ipsi P Q R. constituunt triang. rectang. Itaque ex omni parte constat propositum.

SCHOLIVM.

A 6. B 8. C 10.
D 3. E 4. F 5.

K 24. H 18.
L 24. G 32.

M 48. N 14. R 50.
P — Q 50.

Data duo triangula non debent esse similia, alioquin ab illis vnicum tantum efformabitur triangulum. Nam si sit A ad B vt D ad E, a erit planus sub extremis L. æqualis plano sub medijs K. Quamobrem ipsorum K L. interuallum P. nullum erit, nec formari poterit triangulum P. Q. R. Sed tantum ex summa ipsorum K L fiet latus M. & ex interuallo ipsorum H G. fiet latus N. vnde constituetur vnicum triangulum M N R. Caterum Q. æqualis erit ipsi R.

a *decima nona, 7.*

PROPOSITIO XI. *Probl.* 4.

Inuenire tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus sit in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum.

H 100.
R 10. V 12. T 48.

A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.

P 1200. M 48.
Q 4800. N 432.

Exponatur triang. rect. A B C. cuius hypotenusa A perpendiculum B. basis C. [b] Deinde ab ipsis A & B formetur aliud triang. rect. ita vt hypotenusa D sit summa quadratorum, perpendiculum E sit duplum producti multiplicationis & basis F sit interuallum quadratorum, nimirum quadratus ipsius C. Denique ab ipsis A C. formetur etiam tertium triangulum, cuius hypotenusa G. sit summa quadratorum, perpendiculum K duplum producti, & basis L differentia quadratorum, nempe quadratus ipsius B. Dico tria hæc triangula præstare quod requiritur. Ducto enim E in K fiat P. quo ducto in B fiat Q. similiter ducto C in L fiat M, quo ducto in F fiat N. Dico Q solidum sub perpendiculis, ad N solidum sub basibus habere rationem quadrati ad quadratum. Sumatur R duplum ipsius A. & ex B in C fiat V. quo ducto rursus in B fiat T. Quia ergo sumptis tribus numeris B C. & B rursus, [c] idem fit numerus quouis ordine inter se ducãtur, ducto autem B in C & producto V in B fit T. At ducto B in B & producto L in C. fit M. sunt vtique T & M æquales. Quia vero ex B in A bis, seu ex B in R fit E, & ex C in R fit K. consideratis quatuor numeris B. R. C. R. idem fiet numerus quouis ordine inter se ducantur. Sed ducto B in R. vnde fit E, & ducto C in R vnde fit K, & demum ducto E in K producitur P. Igitur si ducatur R in R vnde fit H, & B in C. vnde fit V. ac demum V ducatur in H. fiet idem P. Cum igitur idem V ductus in H & in B producat ipsos P T seu P M. [d] erit H ad B sicut P ad M. [e] Quare qui fit ex mutuo ductu mediorum B P. nempe solidus Q. fit etiam ex ductu extremorum H M. Cùm igitur ex eodem M in ipsos H & F fiant solidi Q N. erit Q ad N. sicut H ad F. Quare cùm H & F sint quadrati, erit Q ad N in ratione quadrati ad quadratum. Quod demonstrandum erat.

b *quinta, huius.*

c *tertia, 1. Porism.*

d *decima septima, 7.*

e *decima nona, 7.*

SCHOLIVM.

Notatu dignissimum est iisdem prorsus manentibus triangulis, solidos Q N quadrupliciter variari posse prout latera circa rectum nunc fient bases, nunc perpendicula, & omnibus tamen modis ratio solidi ad solidum erit qua quadratus ad quadratum, quod miraculo simile videtur.

H 100.
A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.

Q 4800. N 432.

H 100.
A 5. C 3. B 4.
D 41. E 40. F 9.
G 34. K 30. L 16.

Q 3600. N 576.

Primus casus est, qui in demonstratione exhibetur, quo probatum est esse Q ad N. sicut H ad F.

Secundus est cùm reliquis omnibus inuariatis manentibus B sit basis, & C perpendiculum. Et tunc solidus sub ipsis C E K nempe Q. ad solidum sub B F L seu ad N est in ratione quadrati H ad quadratum L. quod iisdem prorsus argumentis probatur. Itaque in his duobus casibus solidus ad solidum est vt quadratus H ad quadratum F, vel ad quadratum L, prout solidus N. fit à producto ex quadratis F L in latus ipsius F vel in latus ipsius L.

A 5. B 4. C 3.
D 41. F 9. E 40.
G 34. K 30. L 16.

Q 1080. N 1920.

Tertius casus est cùm primi & tertij trianguli lateribus in eadem dispositione manentibus, secundi latera transponuntur, & fit E basis F perpendiculum. Et tunc solidus Q ad solidum N. se habet vt quadratus F ad quadratum L. Quod ita probatur. Quia E K producuntur ex eodem duplo ipsius A in ipsos B C. patet esse B ad C vt E ad K. [f] Igitur ex B in K idem fit numerus qui fit ex C in E. Quare cùm producto ex B in K ducto in F fiat Q. Et producto ex C in E

f *decima nona, 9.*

decima ſeptimæ. ducto in L. fiat N. patet eodem numero ducto in ipſos F & L. fieri ipſos Q. & N.ª Quare eſt Q ad N vt F ad L. Quod erat propoſitum.

R 10.
A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. L 16. K 30.
Q 560. N 810.

Quartus denique caſus eſt cùm lateribus 1. & 2. trianguli eodem loco manentibus, mutantur latera tertij, & ſit L perpendiculum K baſis. Tuncque ſolidus Q ad ſolidum N. ſe habet vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F. Quod ſic probatur. Quia ex ij in R fit E. ſi conſtituerentur quatuor numeri B. R. B L.ª idem fiet numerus quotis ordine inter ſe ducantur. Igitur cùm ducto B in R, & producto E in B, & producto rurſus in L. fiat Q ſolidus, idem ſolidus fiet ducto R in B. & producto, quadrato ſcilicet ipſius B ducto in L ſibi æqualem, & rurſus producto, quadrato ſcilicet ipſius L ducto in R. Quare Q ſit ex R in quadratum ipſius L. Eodem prorſus argumento probatur ſolidum N. fieri ex R in quadratum ipſius F. Proinde patet eſſe Q ad N. vt quadratus ipſius L ad quadratum ipſius F.

b tertiæ, 7. Porifm.

Vnde colligas in hac caſu Q ad N eſſe non ſolum in ratione quadrati ad quadratum, ſed & in ratione quadratoquadrati ad quadratoquadratum, cùm L. F ſint quadrati ac per conſequens quadrata eorum ſint quadratoquadrati quorum latera ipſi B. C.

Supereſt vt moneam lucere loco cuiuſlibet ſic inuentorum triangulorum; aliud ſimile ponere, & eadem manenti ſemper quæ prius, ratio ſolidi ad ſolidum, quod vnica demonſtratione omnibus caſibus conueniente demonſtrari poteſt, hac arte. Loco trianguli G L K ſumatur triangulum illi ſimile T. V. X. & latera homologa intelligantur eadem ratione diſpoſita, & ſolidus ſub ipſis B E V eſto Y. ſolidus ſub ipſis C F X eſto Z. Dico eſſe Y ad Z ſicut Q ad N. Quia enim idem productum ex B in E ductum tum in L tum in V. producit ſolidos Q Y. erit Q ad Y ſicut L ad V. Similiter quia idem productum ex C in F ductum in ipſos K X producit N. & Z. erit N ad Z ſicut K ad X. ſed eſt L ad V vt K ad X ex hypotheſi ob ſimilitudinem triangulorum. Igitur eſt etiam Q ad Y vt N ad Z. & permutando eſt Q ad N. vt Y ad Z. Quod demonſtrandum erat.

A 5. B 4. C 3.
D 41. E 40. F 9.
G 34. L 16. K 30.
T 17. V 8. X 15.
Q 2560 N 810.
Y 1280. Z 405.

PROPOSITIO XII. *Probl.* 5.

Inuenire duo triangula rectangula, vt planus ſub perpendiculis, ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato, vel cubo, vel quadratoquadrato, vel quadratocubo, vel cubocubo.

D 6.
A 5. B 4. C 3.
E 13. F 5. G 12.
H 52. K 20. L 48.
M 108. N 80. F 192.
Q 36. K 20. R 16.
S 144. N 80. T 64.
V 576. X 320. Y 256.

Exponatur quodlibet triang. rect. A B C. ita vt D duplum perpendiculi C ſit maius baſi B. & ab ipſis formetur triangulum H K L. ita vt H ſit aggregatum quadratorum, baſis K ſit interuallum eorundem & perpendiculum L. ſit duplum producti ex B in D. Deinde ſingula latera H K L. diuidantur per baſim B & fiat aliud triangulum ſimile E F G.

e quintæ huius.

d prima huius.

Dico primo haberi duo triangula A B C. E F G. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus quadrato numero. Etenim ducto C in G fiat Q. & quia ducto B in F fit K ex conſtructione, auferatur K ex Q. & ſuperſit R. Dico R eſſe quadratum. Quia enim D eſt duplus ad C. productus bis ex B in D nempe L æquatur quadruplo producti ex B in C. Quare diuiſo L per B quotiens G eſt quadruplus ad C. Cùm ergo ex C in G fiat Q. erit Q quadruplus quadrati ipſius C. ſeu æqualis quadrato ipſius D. Proinde cum K ſit interuallum quo quadratus ex D. nempe Q ſuperat quadratum ex B patet auferendo K ex Q reſiduum R eſſe quadratum ipſius B. Quod erat propoſitum.

Dico ſecundo haberi duo triangula A B C, H K L. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero cubo. Etenim ducto C in L fiat S. & ducto B in K fiat N. quo detracto ex S. ſuperſit T. Dico T eſſe cubum. Quia enim ex eodem C in ipſos G L fiunt Q S. erit Q ad S vt G ad L. Rurſus, quia ex eodem B in ipſos F K, fiunt K N. erit K ad N vt F ad K. Quare cum ob ſimilitudinem triangulorum ſit F ad K vt G ad L. erit & Q ad S. vt K ad N. Ideo cum ſit vt totus Q ad totum S. ſic ablatus K ad ablatum N. erit & reliquus R ad reliquum T. in eadem ratione. Sed rationis F ad K ſeu G ad L denominator eſt B ex conſtructione. Igitur & rationis R ad T idem B denominator erit, ac proinde ex B in R fiet T. Igitur cum ex B in ſuum quadratum R. fiat T. erit T cubus ipſius B. Quod erat propoſitum.

Rurſus ſi B ducatur in triangulum H K L, & fiat aliud ſimile M N P. Dico haberi duo triangula A B C. M N P. ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadratoquadrato. Etenim ſi C ducatur in P vnde fiat V. & B ducatur in N vnde fiat X quo detracto ex V relinquatur Y. Dico Y eſſe quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento oſtendemus eſſe

T ad

T ad Y sicut K ad N vel L ad P. Quare cùm rationis K ad N vel L ad P denominator sit B ex constructione; erit idem B denominator rationis T ad Y ac proinde ex B in suum cubum T fiet Y. Quare Y erit quadratoquadratus ipsius B. similiter, si B ducatur rursus in triangulum M N P. fiet aliud simile quod cum triangulo A B C exhibebit duo triangula ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus numero quadratocubo. nimirum quadratocubo ipsius B. Et si rursus B ducatur in vltimum triangulum, fiet aliud quod cum ipso A B C duo exhibebit triangula, ita vt planus sub perpendiculis superet planum sub basibus cubocubo ipsius B. Igitur ex omni parte constat propositum.

PROPOSITIO XIII. *Probl. 6.*

Inuenire duo triangula rectangula vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus, faciat quadratum, uel cubum, vel quadratoquadratum, vel quadratocubum, vel cubocubum.

D 10.
A 13. B 12. C 5.
E 20 ½. F 3 ½. G 20.
H 244. K 44. L 240.
M 2928. N 528. P 2880.

Q 100. K 44. R 144.
S 1200. N 528. T 1728.
V 14400. X 6336. Y 20736.

Exponatur triang. rect. A B C. ita vt D duplum basis C. sit minus perpendiculo B. Et ab ipsis B D formetur aliud triangulum H K L vt supra, cuius omnia latera diuidantur per B & [a] fiat triangulum simile E F G. Dico primo duo triangula A B C. E F G huiusmodi esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratum. Etenim ducto C in G fiat Q. cui addatur K productus ex B in F ex constructione & fiat R. dico R esse quadratum. Quia enim D est duplus ad C. & ex B in D bis fit L, idem L fiet ex B in quadruplum ipsius C. Quare cùm diuidendo L per B fiat G. erit G quadruplus ipsius C. proinde Q productus ex C in G æquabitur quadruplo quadrati ipsius C, seu quadrato ipsius D. cùm ergo K sit interuallum quo quadratus B superat quadratum ex D nempe ipsum Q. addendo Q. & K summa R. erit quadratus ipsius B Quod erat propositum.

[a] *quinta huius*
[b] *prima huius.*

Dico secundo duo triangula A B C. H K L. talia esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat cubum. Nam ducto C in L, fiat S. ductoque B in K fiat N quo addito ad S. fiat T. Dico T esse cubum. Etenim quia ex eodem C in G & in L. fiunt Q S. & ex eodem B. in ipsos F K fiunt K N. erit Q ad S. vt G ad L. & erit K ad N. vt F ad K. sed est F ad K. vt G ad L. ob similitudinem triangulorum, ergo est & Q ad S vt K ad N. Quare & erunt antecedentes simul nempe R ad consequentes simul nempe ad T vt N. sed B est denominator rationis K ad N ex constructione, ergo & rationis R ad T. Quamobrem ex B in R fiet T. vnde cum R sit quadratus ipsius B vt ostensum est, erit T cubus eiusdem B. Quod erat propositum.

Rursus si B ducatur in triangulum H K L. & fiat aliud simile M N P. Dico tertio duo triangula A B C. M N P. huiusmodi esse vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratoquadratum. Etenim si C. ducatur in P & fiat V, & B ducatur in N. & fiat X. quo addito ad V fiat Y. Dico Y esse quadratoquadratum. Nam eodem quo prius argumento ostendemus esse T ad Y, sicut N ad X. Quare cum ex B in N fiat X, necesse est etiam ex B in T fieri Y. ac proinde cùm T ostensus sit cubus ipsius B, erit N quadratoquadratus eiusdem B. Similiter si B ducatur rursus in triangulum M N P. fiet aliud simile quod cum triangulo A B C. ostendetur esse hujusmodi vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat quadratocubum ipsius B. Ac demum si B ducatur rursus in vltimum triangulum, fiet aliud, quod cum ipso A B C, ostendemus esse huiusmodi, vt planus sub perpendiculis cum plano sub basibus faciat cubocubum ipsius B. Igitur ex omni parte constat propositum.

SCHOLIVM.

In hoc & in precedenti problemate accidit vt inuenta duo triangula si per eundem numerum vtraque multiplicentur aut diuidantur, producant alia duo idem præstantia, quod vnico exemplo sufficiet probare. Multiplica per 3. triangula 13. 12. 5. & 20 ½. 3 ½. 20. fient alia duo, 39. 36. 15. & 61. 11. 60. vbi vides planum sub basibus 900. cum plano sub perpendiculis 396. efficere quadratum 1296. à latere 36. perpendiculo scilicet primi trianguli. Demonstratio facilis est, & ideo eam tibi relinquo indagandam.

PROPOSITIO XIV. *Probl. 7.*

Inuenire tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis, ad solidum sub perpendiculis se habeat vt quadratus ad quadratum.

D 6.
A 5. B 4. C 13.
E 13. F 5. G 12.
H 65. K 63. L 16.

M 4225. N 576.

Exponatur triang. rectang. quodcumque A. B. C. ita vt D duplum perpendiculi C. ſit matus baſi B.[a] & ab eo formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis ſuperet planum ſub baſibus numero quadrato. Tum à duobus hiſce triangulis[b] formetur tertium H K L. ita vt H ſit productus ex A in E At K baſis fiat addito producto ex G in B. ad productum ex F in C. Denique perpendiculum L fiat auferendo productum ex F in B. à producto ex G in C. Dico tria hæc triangula ſatisfacere propoſito, nimirum M ſolidum ſub hypotenuſis ad N ſolidum ſub perpendiculis eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Quia enim ex A, in E fit H ex conſtruct. patet ſolidum M factum ex H in H eſſe quadratum ipſius H. Quia vero vt probatum eſt 12. huius ex C in G fit quadratus ipſius D. At L. eſt quadratus ipſius B. ex conſtruct. & per 12. huius. Patet ſolidum N. qui fit ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum cuius latus ſcilicet eſt productus ex B in D. Quare cum vterque M & N. ſit quadratus, patet propoſitum.

a *duodecima, huius.*
b *decima huius.*

D 10.
A 13. B 12. C 5.
E 20 1/2. F 3 1/2. G 20.
H 264 1/2. K 221 1/2. L 144.

Aliter expoſito triangulo A B C. ita vt D duplum perpendiculi ſit minus baſi B[c] formetur aliud E F G, ita vt planus ſub perpendiculis cum plano ſub baſibus faciat quadratum. Et ab ipſis duobus[d] efformetur tertium H K L. ita vt hypotenuſa H fiat ex A in E. baſis K ſit, quod reſtat à producto ex B in G detrahendo productum ex C in F. Denique perpendiculum L. ſit ſumma productorum ex B in F & ex C in G.[e] Erit igitur L quadratus ipſius B. Quare cum conſtet etiam per decimam tertiam ex C in G produci quadratum ipſius D. patet ſolidum ſub ipſis C G L. productum ex quadrato in quadratum, eſſe quadratum, cuius ſcilicet latus eſt productus ex B in D. At ſolidus ſub hypotenuſis, vt prius oſtendetur æqualis quadrato ipſius H. Igitur cùm vterque ſolidus ſit quadratus, conſtat abundè propoſitum.

c *decima tertia, huius.*
d *decima huius.*
e *decima tertia, huius.*

SCHOLIVM.

Quæ hactenus tradita ſunt, ſatis ſuperque ſufficiunt ad abſolutam Diophantæorum problematum enodationem. Cæterum placuit his ſubnectere ſequentia Theoremata non inutilia de triangulis rectangulis, quæ protulit primus Franciſcus Vieta in libris zeteticorum, quamuis ea ſyntheticè minimè demonſtrarit.

PROPOSITIO XV.

In triangulo rectangulo, quotlibet laterum circa rectum, eſt medium proportionale inter aggregatum & interuallum alterius lateris & hypotenuſæ. Et è conuerſo, ſi fuerint tres inæquales numeri, quorum vnus ſit medius proportionalis inter ſummam & interuallum aliorum, conſtituent triangulum rectangulum ipſi tres numeri.

A 3. B 4. C 5.
D 2. G 16. E 8.

Sit triangulum rectangulum A B C. & alterius lateris A & Hypotenuſæ C interuallum ſit D. aggregatum E. Dico reliquum latus B eſſe medium proportionale inter ipſos D E. ſumpto enim G. quadrato ipſius B, patet ex hypotheſi quadratum ex A cum quadrato G æquari quadrato ipſius C. Quare G eſt interuallum quo quadratus ex C. ſuperat quadratum ex A.[f] Quamobrem G fiet ex D in E, ex interuallo ſcilicet in ſummam.[g] Igitur B eſt medius proportionalis inter D & E. Quod demonſtrandum erat.

f *tertia, 2.*
g *vigeſima, 7.*

E conuerſo ponatur B medius proportionalis inter D E interuallum & ſummam ipſorum A C. Dico tres A B C conſtituere triang. rect. Quia enim ſunt proportionales D B E,[h] ex D in E fiet G quadratus ipſius B.[i] Atqui ex interuallo D in ſummam E fit interuallum quadratorum ex A & C. Conſtat ergo G eſſe interuallum quo quadratus ex C ſuperat quadratum ex A. Ac ideo G ſeu quadratus ex B cum quadrato ex A æquatur quadrato ex C. Quamobrem A B C conſtituunt triangulum rectangulum. Quod demonſtrandum erat.

h *vigeſima, 7.*
i *tertia, 2. poriſm.*

PROPOSITIO XVI.

In triangulo rectangulo quadratus vnius laterum circa rectum, æquatur quadrato interualli inter alterum latus & hypotenuſam, vnà cum duplo producti ex eodem interuallo in idem latus, & è conuerſo.

A 4. B 3. C 5.
G 4. D 2.

Sit triang. rect. A B C. & ſit D interuallum inter hypotenuſam C. & latus B, & ipſius D duplus eſto G. Dico quadratum alterius lateris A æquari quadrato ipſius D, & producto ex G in B. Quia enim B D ſimul æquantur ipſi C.[k] erit quadratus ex C. æqualis quadratis ipſorum B D, & duplo producti ex B in D. hoc eſt quadratis ex B & D, & producto ex G in B. At rurſus ex hypotheſi quadratus ex C æquatur quadratis ipſorum A B. Igitur quadrati ex A & B. æquantur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Quare ablato

k *quarta, 2.*

vtrimque communi quadrato ex B. remanet quadratus ex A æqualis quadrato ex D, & producto ex G in B. Quod demonstrandum erat.

Conuersum eadem facilitate ostendetur. Sit enim quadratus ex A. æqualis quadrato ex D interualli ipsorum B C. & producto ex G in B. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt prius quadratus ex C æquatur quadratis ex B & D & producto ex G in B. Ergo loco quadrati ex D & producti ex G in B. sumendo quadratum ex A illis æqualem, erit quadratus ex C æqualis quadratis ex A & B. Ac proinde A B C constituent triang. rect. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVII.

In triangulo rectangulo, si duplum interualli lateris vnius & hypotenusæ ducatur in hypotenusam, fit numerus æqualis quadrato reliqui lateris, vna cum quadrato eiusdem interualli; & è conuerso.

A 4. B 3. C 5. G 4. D 2.

Sit eadem figura quæ prius, dico productum ex G in C æquari quadratis ipsorum A D. [a] Quia enim quadratus ex A æquatur producto ex G in B & quadrato ex D, si addatur vtrimque quadratus ex D, erunt quadrati ex A & D simul æquales producto ex G in B & duplo quadrati ex D. sed quia G est duplus ad D, productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D. ergo quadrati ex A & D æquantur productis ex G in B & in D, [b] seu producto ex G in C qui componitur ex ipsis B D. Quod erat propositum.

[a] *decima sexta, huius.*

[b] *prima, 2.*

E conuerso ponantur quadrati ex A & D æquales producto ex G in C. dico ipsos A B C constituere triang. rect. [c] Quia enim productus ex G in C. æquatur productis ex G in B & in D. & productus ex G in D æquatur duplo quadrati ex D, constat quadratos ex A & D æquari producto ex G in B & duplo quadrati ex D. Quare auferendo vtrimque communem quadratum ex D. remanet quadratus ex A æqualis producto ex G in B & quadrato ex D. [d] Quamobrem A B C constituunt triang. rect. Quod demonstrandum erat.

[c] *prima, 2*

[d] *decima sexta, huius.*

PROPOSITIO XVIII.

Si duplum compositi ex vno latere & hypotenusa ducatur in hypotenusam, productus æquatur quadrato eiusdem compositi, & reliqui lateris quadrato. Et è conuerso.

Sit triang. rect. A B C. & sit H summa lateris B & hypotenusæ C. & sit K duplum ipsius H. dico

A 4. B 3. C 5. K 16. H 8.

productum ex K in C. æquari quadratis ipsorum A H. [e] Nam quadratus ex H æquatur quadratis partium B. C. & producto bis ex B in C. Quare addendo vtrimque quadratum ex A. Quadrati ex A & H æquantur quadratis singulorum A B C & producto bis ex B in C. Quia vero K continet bis vtrumque B C. ducere C in K idem est ac ducere C in seipsum, & in B bis. Ergo productus ex K in C. æquatur duplo quadrati ex C, & producti ex B in C. Proinde loco vnius quadrati ex C. sumendo quadratos illi æquales ex A & B. fiet productus ex K in C. æqualis quadratis singulorum A B C. & producto bis ex B in C. hoc est quadratis ipsorum A. H. Quod erat ostendendum.

[e] *quarta, 2.*

E conuerso si ponantur quadrati ex A & H. æquales producto ex K in C. Dico A B C constituere triang. rect. Nam vt prius ostendemus quadratos ex A & H. æquari quadratis singulorum A B C & duplo producti ex B in C. vnde sequitur ex hypothesi productum ex K in C. æquari quadratis singulorum A B C. & producto bis ex B in C. At vt prius productus ex K in C ostendetur æqualis duplo quadrati ex C & producti ex B in C. Igitur & quadrati singulorum A B C, cum duplo producti ex B in C. æquabuntur duplo producti ex B in C & duplo quadrati ex C. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex B in C. & quadratum ex C semel, remanent quadrati ex A & B æquales quadrato ex C. Ac proinde A B C constituunt triangulum rectangulum. Quod demonstrandum fuit.

SCHOLIVM.

His subiicere libet aliud non iniucundum, neque inutile theorema, quod ipsi commenti sumus.

PROPOSITIO XIX.

In triangulo rectangulo quadratus summæ laterum æqualis est numero qui fit bis ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi; & è conuerso.

D 12.
A 3. B 5. C 4.
E 8. F 9.

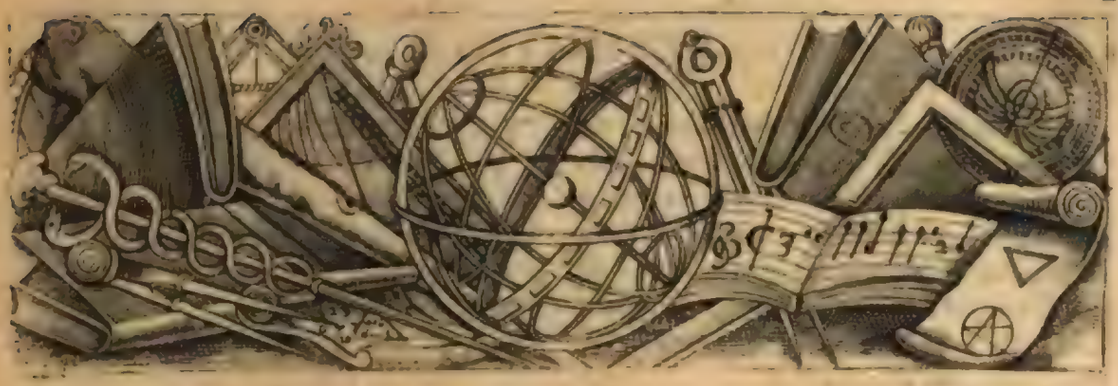
Eſto triangulum rectangulum A B C. cuius hypotenuſa B. ſumma laterum D. aggregatum ipſorum A B ſit E, & F aggregatum ipſorum B C. Dico quadratum ipſius D. æquari duplo producti ex E in F. [a] Etenim quadratus ex D. æquatur quadratis ſingulorum A B C & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At ex hypotheſi quadratus ipſius B æquatur quadratis ipſorum A C. Quare loco quadratorum ex A & C. ſumendo quadratum ex B. erit quadratus ex D æqualis duplo quadrati ex B, & duplo producti ex A in C. & ex B in ipſos A C. Rurſus autem quia E continet ipſos A B. & F continet ipſos B C. duplum producti ex E in F continet bis quadratum ipſius B, & duplum productorum ex A in C. & ex B in ipſos A C. Igitur duplum producti ex E in F æquatur quadrato ex D. Quod erat demonſtrandum.

a *prima, 2 poriſm.*

Deinde ſint tres numeri A B C. quorum ſumma D. & aggregatum ipſorum A B ſit E, & aggregatum ipſorum B C. ſit F. & duplum producti ex E in F æquetur quadrato ex D. Dico ipſos A B C. conſtituere triangulum rectangulum. Nam vt prius [c] quadratus ex D. æquatur quadratis ipſorum A B C. & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex alijs. At duplum producti ex E in F æquatur duplo quadrati ex B & duplo producti ex quolibet in quemlibet ex aliis. Quare auferendo vtrimque duplum producti ex quolibet in quemlibet ex alijs, manet duplum quadrati ex B æquale quadratis ſingulorum A B C. & rurſus auferendo vtrimque quadratum ex B, remanet adhuc quadratus ex B. æqualis quadratis ipſorum A C. Ac proinde A B C. conſtituunt triangulum rectangulum. Quod erat oſtendendum.

b *prima, 2 poriſm.*

FINIS.



DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM.

LIBER PRIMVS.

CVM animaduerterem te (obseruandissime mihi Dionysi) studio discendi explicationem quæstionum earum quæ in numeris proponuntur teneri; aggressus sum eius rei viam rationemque fabricari, ex ipsisque fundamentis, quibus tota res nititur, initio petito, naturam ac vim numerorum constituere. Quod negotium vt videatur fortasse difficilius (quippe ignotum adhuc) cùm animi incipientium ad bonam de re dextrè conficienda spem concipiendam nequaquam sint procliues: tamen cùm tua alacritas, tum mea demonstratio efficiet, vt facilè id comprehendas. Celeriter enim addiscunt, quorum ad discendi cupiditatem doctrina accedit.

ΤΗΝ ἔυρεσιν τῆς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς προβλημάτων, πιωότατέ μοι Διονύσιε, γινώσκων σε σπουδαίως ἔχοντα μαθεῖν, ὁρμᾶσθαι τὴν μέθοδον ἐπειράθην, ἀρξάμενος ἀφ' ὧν συνίστησι τὰ πράγματα στοιχείων, λαβεῖν τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν. ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστι, δυσέλπιστοι γὰρ εἰς κατόρθωσίν εἰσιν αἱ τῆς ἀρχομένων ψυχαί, ὅμως δ' ἀνυπαλλάκτως σοι γενήσεται διὰ τὴν σὴν προθυμίαν, καὶ τὴν ἐμὴν ἀπόδειξιν. ταχεῖα γὰρ εἰς μάθησιν ἐπιθυμία προσλαβοῦσα διδαχήν.

In primum Librum Diophanti Commentarij.

QVÆCVNQVE ante primam quæstionem præmisit Diophantus, ea definitionum & principiorum locum obtinent. Sed velut ad altiora festinans, hæc mira breuitate perstrinxit, vt non tam ea explicare voluisse videatur, quàm indicare, tyronésque admonere, vt nonnisi horum cognitione iam probè instructi ad hosce libros euoluendos accedant. Quod sanè non obscuris verbis professus est, definitione decima vndecimáque, cum ait eum qui hoc negotij suscipit in additione, subductione, & multiplicatione specierum iam exercitatum esse debere, necnon in æquationibus ritè præparandis apprimè versatum. Sed & Xilander hîc mutus est, & istarum definitionum obscuritatem minimè dissimulans, vt laborem eas explicandi declinet, lectorem ad suam Algebram amandat. Scholiastes autem Græcus, more suo, multa, sed ea plerunque futilia, vel à scopo Diophanti prorsus aliena nobis obtrudit. Ego media incedens via, quæ obscuriora videntur breuiter enodanda suscepi, nec tamen inutilia, vel trita & passim obuia persequi statui, præsertim cùm omnia quæ his definitionibus continentur, in omnibus quotquot à quocunque authore extant de logistica, libris, reperiantur. Cæterum est quod moneam in Græco sine vlla distinctione hasce definitiones haberi, quas ego distinguendas numeris putaui, vt sic facilius explicari, citarique commodius possint.

DEFINITIO I.

ΑΛΛΑ καὶ πρὸς τοῖς δηλωσομένοις σοι πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὑπαρξιν. τυγχανόντων δή τινων ἐν τούτοις, ὧν μὲν τετράγωνοί εἰσιν οἱ ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος, ὁ δὲ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὧν δὲ κύβοι εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ὅτι τὰς αὐτῷ πλευρὰς πολλαπλασιαθέντως· ὧν δὲ δυναμοδυνάμεις εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ δυναμοκύβοι εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ὅτι τὰς ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβους πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ κυβοκύβοι εἰσὶν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτοὺς πολλαπλασιαθέντων, ἐκ τε τῶν τούτων ἔστι συνθεῖσθαι, ἢ ὑπεροχῆς, ἢ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ λόγου τῆς πρὸς ἀλλήλους, ἢ καὶ ἑκάστου, ἢ καὶ ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευράς· συμβαίνει πλείστοις πλείστα προβλήματα ἀριθμητικὰ λύεσθαι δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδεχθησομένην ὁδόν.

VERVM etiam præter hæc intelligenti tibi omnes numeros compositos esse è quadam multitudine vnitatum, liquet eos augmentum in infinitum capere. Cùm ergo in his quidam sint quadrati, qui fiunt numero aliquo in se multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur; aliqui cubi qui existunt quadratis in sua multiplicatis latera; alij rursus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in seipsos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrati in cubos ab eodem profectos latere ducti procreant; quidam denique cubocubi qui cubis in seipsos ductis nascuntur: vsuuenit, vt ex horum vel compositione, vel quo præstant alij alijs, vel multiplicatione, vel ratione inter se, aut cuiuslibet, quorumlibetve ad sua latera, plurimæ nectantur arithmeticæ quæstiones, quæ soluantur tamen, si ea quam commonstrabimus via incedas.

IN DEFINITIONEM I.

QVAMVIS species, vel (vt alij vocant) potestates, quibus velut elementis vtitur logistica in infinitam multitudinem excrescant, nec earum certus sit & determinatus numerus, tamen Diophantus de quinque prioribus tantum tractationem instituit, quæ sunt Quadratus, cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus & cubocubus, ratus scilicet has sufficere ad implicatissimas quasque quæ hactenus excogitatæ sunt, quæstiones dissoluendas. Harum igitur hic affert definitiones. Et Quadratum quidem cubúmque definit vt Euclides. Reliquas verò tres, per ipsam nominum impositionem. Nam quadratoquadratum vocat, numerum qui fit ex quadrato in quadratum, ideſt in seipsum. Quadratocubum verò, qui fit ex quadrato in cubum ab eodem profectum latere. Denique cubocubum qui fit ex cubo in cubum, hoc est in seipsum. Vbi aduertendum à recentioribus omnibus quotque ante Diophantum editum logistices rudimenta tradidere, Quadratocubum vocari nunc superſolidum, nunc surde ſolidum, nunc etiam Primum Relatum. Cubocubum verò, ab iisdem dici Quadratocubum, quia videlicet est quadrati cubus, vel cubi quadratus, quod adnotasse operæ pretium duxi, nequem in authoribus legendis nominum ambiguitas remoretur.

DEFINITIO II.

ΚΑΛΕΙΤΑΙ οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆ σημεῖον τὸ Δ^Υ ἐπίσημον ἔχον υ, Δ^υ. ὁ δὲ (ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιαθέντος) κύβος· καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον κ^Υ ἐπίσημον ἔχον υ, κ^υ. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δ^λ ἄλφα δύο, ἐπίσημον υ, Δ^Υ Δ^υ, δυναμοδύναμις. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν ἀπ' αὐτῆς αὐτῷ πλευρὰν κύβον πολλαπλασια-

APPELLATVR igitur Quadratus, Dynamis, & est illius nota Δ^Υ superscriptum habens $\bar{\upsilon}$ sic $\Delta^{\bar{\upsilon}}$. Qui autem fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est κ^{Υ}, superscriptum habens $\bar{\upsilon}$ hoc pacto $\kappa^{\bar{\upsilon}}$. Qui autem fit ex quadrato in seipsum multiplicato, quadratoquadratus est, cuius nota est geminum Δ^Υ habens superscriptum $\bar{\upsilon}$, hac ratione $\Delta^{\Upsilon}\Delta^{\bar{\upsilon}}$. Qui fit quadrato in cubum qui ab

eodem latere profectus est, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius δ̄κ̄ superscriptum habens ῡ sic δκ̄ῡ. Qui ex cubo in se ducto nascitur, cubocubus vocatur, & est eius nota geminum κ̄ superscriptum habens ῡ, hoc pacto κκ̄ῡ. Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius ς̄. Est & aliud signum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota μ̄ superscriptum habens ō sic μ̄ō

δύντος, δυναμόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ δ̄κ̄. ὑπόσημον ἔχον τὸ υ, δκ^υ. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο κ̄κ̄, ὑπόσημον ἔχοντα υ, κκ^υ. ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ ς̄. ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀνταπόδοτον τῶν ἀορίστων ἢ μονάς, καὶ ἔστιν αὐτῆ σημεῖον τὸ μ̄, ὑπόσημον ἔχον τὸ ō μ̄ō.

IN DEFINITIONEM II.

HÆc ad verbum exprimenda esse arbitratus sum potiùs quàm cum Xilandro nescio quid aliud comminisci. Quamuis enim in reliqua versione nostra notis ab eodem Xilandro excogitatis libenter vsus sim, quas tradam infrà. Hic tamen ab ipso Diophanto longiùs recedere nolui, quòd hac definitione notas explicet quibus passim libris istis vtitur ad species omnes compendio designandas, & qui has ignoret ne quidem Græca Diophanti legere possit. Porrò quadratum Dynamin vocat, quæ vox potestatem sonat, quia videlicet quadratus est veluti potestas cuiuslibet lineæ, & passim ab Euclide, per id quod potest linea, quadratus illius designatur. Itali, Hispanique eadem ferè de causa Censum vocant, quasi dicas redditum, prouentúmque, quòd à latere seu radice, tanquam à feraci solo quadratus oriatur. Inde factum vt Gallorum nonnulli & Germanorum corrupto vocabulo zenzum appellarint. Numerum autem indeterminatum & ignotum, qui & aliarum omnium potestatum latus esse intelligitur, Numerum simpliciter Diophantus appellat. Alij passim Radicem, vel latus, vel rem dixerunt, Itali patrio vocabulo Cosam. Cæterùm nos in versione nostra his notis N. Q. C. QQ. QC. CC. designabimus Numerum, Quadratum, Cubum, Quadratoquadratum, Quadratocubum, Cubocubum. Nam quod ad vnitates certas & determinatas spectat, eis notam aliquam adscribere superuacaneum duxi, quòd hæ seipsis absque vlla ambiguitate esse satis indicent. Ecquis enim cùm audit numerum 6. non statim cogitat sex vnitates? Quid ergo necesse est sex vnitates dicere, cùm sufficiat dicere, sex? Demum legendum in Græco censeo, πλῆθος μονάδων ἄλογον, flagitante sententia, potius quàm ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, vt habetur in codice manu exarato, & per multitudinem vnitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum & indeterminatum, seu potius ignotum, quémque statim opponit ἀορίστῳ seu vnitatibus certis & determinatis.

DEFINITIO III.

ENimvero sicut partes numeris cognomines, similem ipsis numeris denominationem sortiuntur (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans dicitur) ita nunc quoque denominatis numeris partes cognomines, ipsis numeris similem habent denominationem, nam à numero pars numerica dicitur; à quadrato, quadratica; à cubo cubica; à quadratoquadrato, quadratoquadratica; à quadratocubo, quadratocubica; à cubocubo, cubocubica. Habebit autem quælibet pars à sibi cognomine numero notam, & literam superscriptam quæ speciem à specie distinguat.

ΩΣΠΕΡ δὲ τῷ ἀριθμῷ τὰ ὁμώνυμα μόρια παρώνυμα καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς· τὸ μὲν γὰρ τρίτον, τὸ δὲ δ^ον τὸ τέταρτον. οὕτως καὶ τῶν νῦν ἐπονομαζόντων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρώνυμα τοῖς ἀριθμοῖς. τοῦ μὲν ἀριθμοῦ τὸ ἀριθμοστὸν, τοῦ δὲ δυνάμεως τὸ δυναμοστὸν, τοῦ δὲ κύβου τὸ κυβοστὸν, τοῦ δυναμοδυνάμεως τὸ δυναμοδυναμοστὸν, τοῦ δὲ δυναμοκύβου τὸ δκ^ον. τοῦ δὲ κυβοκύβου τὸ κυβοκυβοστόν. ἕξει δὲ ἕκαστον αὐτῶν ὅλη τὴ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον γράμμα ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

IN DEFINITIONEM III.

QVAM malè acceperint hanc definitionem Græcus Scholiastes, & Xilander, si vacat, videre poteris. Manifestum tamen est nil aliud velle Diophantum, quàm vt fractionibus Algebricis notæ specierum à quibus sumunt denominationem, adscribantur, docens ipsas fractiones non minus à qualibet specie denominari, quàm numerum quemlibet vnitatum integrum. Hoc autem huiusmodi similitudine explicat. Quemadmodum, inquit, fractio quælibet absoluta ab aliquo numero sumit denominationem, velut triens à ternario, à quaternario quadrans, & sic de alijs; ita & quælibet fractio Algebrica à specie cuius nota ei affixa est, denominationem mutuatur, verbi gratia $\frac{1}{2}$ N. dicetur semissis vnius Numeri, $\frac{1}{3}$ Q. dicetur triens vnius Quadrati, $\frac{1}{4}$ C. dicetur dodrans vnius Cubi, & sic de alijs, vt superuacaneum sit in re manifesta diutius immorari. Porrò Xilandri coniecturam secutus, duobus in locis loco παρομοίων, reposui παρονύμων.

DEFINITIO IV.

ΕΚΘΕΜΕΝΟΣ οὖν ἐστὶ τὴν ἐκάστου τ' ἀριθμοῦ ἐπανυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτῶν μεταβλήσομαι. ἔσονται δὲ οἱ καταφανεῖς διὰ τὸ προδιηλάδθαι χρόνον ἀπὸ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν οὖν ἐπὶ ς' πολλαπλασιαδεὶς, ποιεῖ δύναμιν. ὅτι δὲ δύναμις, κύβον. ὅτι δὲ δύναμις κύβον, δυναμοδύναμιν. ὅτι δὲ δυναμοδύναμις, δυναμόκυβον. ὅτι δὲ δυναμόκυβος, κυβόκυβον. δύναμις δὲ ὅτι μὲν δύναμιν [ποιεῖ δυναμοδύναμιν.] ὅτι δὲ κύβον, δυναμόκυβον. ὅτι δὲ δυναμοδύναμις, κυβόκυβον. κύβος δὲ ὅτι κύβον, κυβόκυβον.

PROINDE cùm tibi singulas numerorum denominationes exposuerim, ad eorum multiplicationes me confero, quæ tibi facilè patebunt, cùm per ipsam nominum impositionem, ferè sint iam ante declaratæ.

Ergo numerus in numerum multiplicatus, quadratum producit; in quadratum, cubum, in cubum, quadratoquadratum; in quadratoquadratum, quadratocubum; in quadratocubum, cubocubum. Quadratus verò in quadratum, gignit quadratoquadratum; in cubum, quadratocubum; in quadratoquadratum, cubocubum. Cubus autem in cubum ductus, cubocubum producit.

IN DEFINITIONEM IV.

HIC specierum multiplicationes explicat, quarum aliquæ quidem ex definitione prima, & ipsa nominum impositione manifestæ sunt, reliquas verò demonstrare facile est, tali expedito theoremate.

Quadratus, Cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus, & Cubocubus vnà cum communi eorum latere sunt ab vnitate continuè proportionales.

Sit vnitas A, quodlibet latus B. cuius quadratus C. cubus D. quadratoquadratus E. quadratocubus F. & cubocubus G. Dico A B C D E F G, esse continuè proportionales. Quia enim [1] ex B in B, fit C. erit ex definitione multiplicationis A ad B, vt B ad C. similiter quia [2] ex B. in C, fit D. erit eadem de causa A ad B, vt C ad D. Quare ipsi A B C D. sunt continuè proportionales. Rursus [3] quia ex C in seipsum fit E, erit ex definitione multiplicationis A ad C, sicut C ad E. Quare cùm inter A & C. cadat vnus medius proportionalis B, [4] cadit etiam vnus in eadem ratione inter C & E, sed in ratione A ad B, vel B ad C, ostensus est C ad D. Igitur D est ille medius, ac proinde est C ad D, vt D ad E. Rursus [5] quia ex C. in D producitur F, erit A ad C, vt D ad F. Quare rursus cùm inter A C cadat medius proportionalis B, [6] cadit & vnus medius in eadem ratione inter D & F. Vnde cùm in illa ratione ostensus sit esse D ad E, erit E ille medius, & idcirco erit D ad E, vt E ad F. Denique [7] quia ex D in seipsum fit G, erit A ad D, vt D ad G. vnde sicut inter A & D cadunt duo medij proportionales B C, [8] sic & inter D G cadent duo in eadem ratione. Sed in eadem ratione ostensi sunt esse D ad E, & E ad F. Igitur E F sunt illi medij, ac proinde est E ad F, vt F ad G. & omnes A B C D E F G. sunt continuè proportionales. Quod demonstrandum erat. Hinc porro specierum multiplicatio demonstratur. Primo enim ex Numero B in seipsum fieri quadratum C, itémque ex Numero B in quadratum C. fieri cubum D, patet ex definitione prima. Secundò ex Numero B. in cubum D, fieri quadratoqua-

Definit. 1. A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Definit. 1.

Definit. 1.

8. ostani.

Definit. 1.

8. ostani.

Definit. 1.

8. ostani.

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

dratum E probatur. Quia enim per præcedens theorema ipſi A B C D E ſunt continuè proportionales, erit A ad B, vt D ad E. Quare qui ſub extremis A E continetur, æquatur ei qui ſub mediis B D. ſed ex vnitate A in E fit ipſemet E. ergo idem E fiet ex B in D. quod erat propoſitum. Tertiò dico ex Numero B in ſuum quadratoquadratum E fieri quadratocubum F, quia enim eſt A ad B vt E ad F, numerus qui fit ex A in F, nempe ipſe F æquatur ei qui fit ex B in E. Quòd erat propoſitum. Quartò dico ex Numero B in ſuum quadratocubum F, fieri cubocubum G. Nam vt prius cùm ſit A ad B. vt F ad G. fiet idem G ex A in G, vel ex B in F. Quod erat intentum. Quinto ex quadrato C in ſeipſum, fieri quadratoquadratum E, patet ex definitione prima, ſicut & ex eodem quadrato C in cubum D fieri quadratocubum E. Sextò ex quadrato C in quadratoquadratum E fieri cubocubum G ſic probatur. Quia ob continuam proportionalitatem, vt A ad C, ſic eſt E ad G, idem G fiet ex A in G, vel ex C in E. Quod erat propoſitum. Denique ex cubo D in ſeipſum, fieri cubocubum G. patet ex definitione prima. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum. 19. ſeptimi.

DEFINITIO V.

OMNIS numerus in partem ſibi cognominem multiplicatus, vnitatem producit.

Πᾶς ἀριθμὸς ὅτι τὸ ὁμώνυμον αὐτῷ μόριον πολλαπλασιαθεὶς, μονάδα ποιεῖ.

IN DEFINITIONEM V.

HIC præclarè nugatur Scholiaſtes, cùm putat in hac definitione loqui Diophantum de fractionibus abſolutis, & nulla ſpeciei alicuius nota affectis, quaſi docere velit ex $\frac{1}{3}$ in 3. vel ex $\frac{1}{4}$ in 4. fieri vnitatem, quod quid ad logiſticam conferat, non video, ſed ſanè vulgò Arithmeticorum notum eſt, atque ipſis lippis & tonſoribus, vt geometrica demonſtratione, opus non fuerit ad id confirmandum. Cæterum non id voluit Diophantus, ſed potius fractiones Algebricas illas, in quibus vnitates per aliquam ſpeciem diuiſæ intelliguntur, ductas in ſpeciem à qua denominantur, producere vnitates abſolutas, vt ſi $\frac{1}{N}$ ducatur in 4. N. fient 2. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{1}{Q}$ ducantur in 6. Q. fient 4. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{1}{C}$ ducantur in 10. C. fient 2. vnitates. Et hanc eſſe Diophanti mentem ex definitione octaua manifeſtè colligitur. Cùm enim ibi multiplicationes huiuſmodi fractionum tradat, non docet quid producatur ſi fractio ducatur in ſpeciem à qua denominatur, quia ſcilicet id iſta definitione iam comprehenderat.

DEFINITIO VI.

ENIMVERÒ cùm vnitas immutabilis ſit, ſempérque maneat ſpecies quælibet in eam multiplicata, eandem generat ſpeciem.

Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἰσώσης ἀεὶ τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἴσαι.

IN DEFINITIONEM VI.

NON melius accepit hanc definitionem Scholiaſtes, quàm præcedentem & ſequentes duas, quod ſemel atque iterum monuiſſe ſufficiat. Exiſtimauit enim in iſtis quatuor definitionibus Diophantum loqui de numeris & fractionibus abſolutis, quod à ſcopo illius prorſus alienum eſt. Hic itaque docet Diophantus, vnitates ductas in ſpeciem quamlibet, ipſammet ſpeciem producere, vt ſi 2. ducantur in 3. N. fient 6. N. Et ſi 4. ducantur in 5. Q. fient 20. Q. & ſic de aliis. Cauſam autem aſſignare videtur, quòd vnitates abſolutæ, vnitatis ipſius naturam ſapiant. Quemadmodum ergo vnitas in quemlibet numerum ducta, producit ipſum eundem numerum, ſic & vnitates in quamlibet ſpeciem multiplicatæ, eandem ſpeciem gignunt.

DEFINITIO VII.

AT partes denominatæ ſi inter ſe multiplicentur, partes producunt ipſis numeris cognomines. Verbi gratia pars numerica in partem numericam ducta, quadraticam gignit; in quadraticam,

Τὰ δὲ ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς. οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ὅτι τὸ ἀριθμοστὸν, δυναμοστὸν ποιεῖ. ὅτι δὲ δυναμοστὸν κυβοστόν. ὅτι δὲ κυβοστὸν, δυναμοδυναμοστόν.

ὅτι δὲ δυναμοδυναμοστὸν, δυναμοκυβοστόν. ὅτι δὲ δυναμοκυβοστὸν, κυβοκυβοστὸν, καὶ τὰ τοῦτο ὁμοτύμως συμβλήσεται. δυναμοστὸν δὲ ὅτι μὲν ἀριθμοστὸν, κ̄ ποιεῖ. ὅτι δὲ δυναμοστὸν, δδ̄. ὅτι δὲ κυβοστὸν, δκ̄. ὅτι δὲ δδ̄, κκ̄. τὸ δὲ κυβοστὸν, ὅτι μὲν ἀριθμοστὸν, ποιεῖ δδ̄. ὅτι δὲ δ̄, δκ̄. ὅτι δὲ κ̄, κκ̄. τὸ δὲ δυναμοδυναμοστὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοστὸν, δκ̄ ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοστὸν, κκ̄. τὸ δὲ δυναμοκυβοστὸν, ἐπὶ ἀριθμοστὸν, κυβοκυβοστόν.

cubicam; in cubicam, quadratoquadraticam; in hanc, quadratocubicam; in hanc cubocubicam; idque communicata denominatione continget. Pars verò quadratica, in partem numericam, partem cubicam facit; in quadraticam, quadratoquadraticam; in cubicam, quadratocubicam; in quadratoquadraticam, cubocubicam. Pars autem cubica in numericam, partem facit, quadratoquadraticam; in quadraticam, quadratocubicam; in cubicam, cubocubicam. Sed pars quadratoquadratica in numericam, partem facit quadratocubicam; & in quadraticam, cubocubicam. Denique pars quadratocubica in numericam, partem gignit cubocubicam.

IN DEFINITIONEM VII.

HÆc definitio à quarta pendet. Quemadmodum enim ibi numerorum integrorum à speciebus denominatorum multiplicationes docuit, ita & hîc fractionum ab iisdem speciebus denominatarum multiplicationes tradit, quarum eadem est prorsus ratio. Nam sicut verbi gratia 2. N. in 3. N. faciunt 6. Q. ita $\frac{1}{2}$ N. in $\frac{1}{3}$ N. facit $\frac{1}{6}$ Q. & sicut 3. N. in 4. Q. faciunt 12. C. sic $\frac{1}{3}$ N. in $\frac{1}{4}$ Q. faciunt $\frac{1}{12}$ C. & sic de aliis. Itaque quæ demonstrata sunt ad definitionem quartam, hîc etiam locum habent.

DEFINITIO VIII.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ἐπὶ μὲν δύναμιν, ἀριθμὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν, ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον. ἐπὶ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν; ἐπὶ κυβόκυβον, δυναμόκυβον. δυναμοστὸν ἢ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν δύναμιν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κύβον. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμοδύναμιν. κυβοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δύναμιν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβον. δυναμοδυναμοστὸν δὲ ἐπὶ μὲν ς̄, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δύναμιν. δυναμοκυβοστὸν ἢ ἐπὶ μὲν ς̄ δυναμοδυναμοστόν. ἐπὶ δύναμιν, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοστόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμόν. τὸ δὲ κυβοκυβοστὸν ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοκυβοστόν. ὅτι δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοστόν. ὅτι δὲ κύβον, κυβοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοστόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοστόν.

RVRSVS fractio numerica in quadratum ducta, numerum gignit; in cubum, quadratum; in quadratoquadratum, cubum; in quadratocubum, quadratoquadratum; in cubocubum, quadratocubum. Fractio verò quadratica in numerum ducta, Fractionem numericam producit; in cubum, numerum; in quadratoquadratum, quadratum; in quadratocubum, cubum; in cubocubum, quadratoquadratum. Fractio cubica ducta in numerum, fractionem quadraticam gignit; in quadratum, fractionem numericam; in quadratoquadratum, numerum; in quadratocubum, quadratum; in cubocubum, cubum. Fractio quadratoquadratica in numerum ducta, producit fractionem cubicam; in quadratum, fractionem quadraticam; in cubum, fractionem numericam; in quadratocubum, numerum; in cubocubum, quadratum. Fractio quadratocubica in numerum ducta, fractionem facit quadratoquadraticam; in quadratum, fractionem cubicam; in cubum, fractionem quadraticam; in quadratoquadratum, fractionem numericam; in cubocubum, numerum. Fractio cubocubica in numerum ducta, fractionem gignit

quadratocubicam; in quadratum, fractionem quadratoquadraticam; in cubum, fractionem cubicam; in quadratoquadratum, fractionem quadraticam; in quadratocubum, fractionem numericam.

IN DEFINITIONEM VIII.

TANGIT hic aliud genus fractionum, quæ fiunt cùm numerus à specie inferiori denominatus diuisus intelligitur, per numerum ab altiori specie denominatum, vt si vnitates per Numeros diuidantur, fit fractio Numerica, qualis est $\frac{1}{\gamma N}$. Et si vnitates per quadratos diuidantur, fit fractio quadratica, vt $\frac{1}{\delta Q}$, & sic de aliis. Differunt ergo re fractiones istæ ab iis de quibus actum est superiore definitione, quamuis vtrasque iisdem nominibus appellet Diophantus. Nam in illis speciei denominatio afficit Numeratorem, in istis denominatorem, verbi gratia si dicas $\frac{1}{3}$ N. intelligis 2. N. diuidi per 3. At si dicas $\frac{1}{3N}$ intelligis 2. diuidi per 3. N. vtramque tamen fractionem Diophantus ἀριθμοστὸν vocat, similiter $\frac{1}{3}$ Q. & $\frac{1}{3Q}$ vocat δυναμοστὸν communi nomine, & sic de aliis. Ratio verò multiplicandi fractiones istas, tota pendet à ratione diuidendi species inter se. Porro diuisio multiplicationi contraria est, quamobrem, vt monet Diophantus definitione decima, cognitis specierum multiplicationibus, cognoscuntur & diuisiones: sicut enim verbi gratia Numerus in Numerum ductus producit Quadratum, ita si Quadratus per Numerum diuidatur, orietur Numerus; & sicut ex Quadrato in Cubum fit Quadratocubus, ita si Quadratocubus per Cubum diuidatur, orietur Quadratus, & rursus si Quadratocubus per quadratum diuidatur, orietur Cubus, & sic de alijs. Hinc patet si fractio numerica $\frac{1}{3N}$ ducatur in 2. Q. fieri numerum, nam fit seruata vtraque denominatione $\frac{1}{3N}$ quia verò diuidendo Quadratum per numerum, oritur numerus, hoc idem est atque $\frac{1}{3}$ N. Simili argumento rationem reddes omnium quæ hac definitione complectitur Diophantus.

DEFINITIO IX.

MINVS per minus multiplicatum, producit plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota est litera ↓ decurtata, & deorsum vergens, sic ↓.

ΛΕΙΨΙΣ δὲ λεῖψιν πολλαπλασιαθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ δὲ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ↓ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον ↓.

IN DEFINITIONEM IX.

ΥΠΑΡΞΙΝ & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus vsitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem vt significet Plus nulla vtitur nota, sed conjunctione tantùm copulatiua. Nos vero in versione nostra, eos qui ante nos Latinè scripserunt, imitati; Plus hoc signo denotabimus +. Minus verò isto −. Ceterum si cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat, Plus, & huius rei demonstrationem requirat, legat Petrum Nonium parte 2. suæ Algebræ, cap. 4.

DEFINITIO X.

DECLARATIS ergo multiplicationibus, manifestæ sunt etiam partitiones propositarum specierum. Æquum itaque est eum qui hoc negotij suscipit, in additione, subductione, & multiplicatione quæ speciebus accidunt, exercitatum esse, nimirum qua ratione species quæ adsunt, quæque desunt non eiusdem multitudinis, alijs adiicias speciebus quæ vel adsunt, vel itidem adsunt atque desunt. Et quomodo à speciebus quæ adsunt, & aliis quæ desunt, auferas alias quæ vel adsint, vel itidem adsint atque desint.

ΚΑΙ τὸ πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνιῶντων, φανερά ἐστιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς ἂν ἔχοι ἐπαρχόμενον τῆς προγματείας, συνθέσει, καὶ ἀφαιρέσει, καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γεγυμνάσθαι. καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα, καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἤτοι καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι. καὶ πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν, καὶ ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρέσεις ἑτέρα ἤτοι ὑπάρχοντα, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

IN DEFINITIONEM X.

ADDITIONEM, ſubductionem, multiplicationem, & diuiſionem ſpecierum, cùm diuerſimodè per Plus & Minus copulantur, non perſequitur Diophantus, ſed ſupponit in his jam exercitatum eum qui libros iſtos aggrediatùr. Nec ego in re facili diutius immorabor, vide, ſi libet, authores omnes qui logiſticam ſcriptis mandarunt, vt Nicolaum Tartaleam, Petrum Nonium, Chriſtophorum Clauium, aliósque paſſim.

DEFINITIO XI.

ΜΕΤΑ δὲ ταῦτα ἐαν ἀπὸ προβλήματός τινος γίνηται ὕπαρξις εἰδῶν τῶν αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρου τὰ μερῶν, δίησιν ἀφαιροῦν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν τὸ εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐαν δέ που ἐν ἑτέρᾳ ὑπαρξει, ἢ ἐν ἀμφοτέραις ἐνελλείψῃ τινὰ εἴδη, δίησιν προσθετέαν τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέραις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη συνυπάρχοντα γένηται. καὶ πάλιν ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὸ εἶδος καταλειφθῇ. πεφιλοτιμήθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποτάξεσι τῶν προτάσεων, ἐαν ἐνδέχηται, ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ ποιοῦτον λύεται. νῦν δὲ ὅτι τὰς προτάσεις χωρήσομεν ὁδὸν πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῷ ἀριθμῷ, καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, διὰ τοῦτο βραδέως βιβαζομένων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτά, καὶ ὅταν ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, ἐδοκίμασα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρέσεις, ἐς μέλισσα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς, ἀπὸ ἁπλουστέρων ὀλισχολιώτερα διελεῖν, ὡς προσῆκεν. οὕτω γὰρ εὐόδευτα γένηται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀγωγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τὸ προγυμνασίας αὐτῷ ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγυμνωμένης.

DEINDE ſi in aliqua quæſtione tractanda eædem ſpecies adſint ex vtraque parte non æquali multitudine, auferenda ſunt ſimilia à ſimilibus, donec vna ſpecies vni ſpeciei æqualis remaneat. Quod ſi in vtraque parte, vel in altervtra deſint quædam ſpecies, quædam adſint, quæ deſunt vtrinque addenda ſunt, dum ſpecies eædem vtrinque inueniantur; rurſumque vtrimque auferenda ſimilia à ſimilibus, tantiſper dum ab vtraque parte vna ſpecies relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionum poſitionibus, quoad detur, conabere efficere, vſque dum vna ſpecies vni ſpeciei æqualis deprehendatur. Poſterius autem tibi commonſtrabimus quomodo quæſtio explicetur, etiam cùm duæ ſpecies vni æquales relinquuntur. Nunc verò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis via abundè pateat, ob materiam ab ipſis ſpeciebus collectam. Cùm autem plurimi ſint numeri, & mole ingentes, atque ideo tardè comprehendantur ab iis qui huic ſtudio incumbunt, nec valent memoria; ſtatui quæ ex iis ita decerpi poſſunt, ita vt maximè in tractationis principio elementorum partes ſuſtineant, primo loco proponere, & à ſimplicioribus ad perplexiora progredi. Sic enim incipientibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim incluſa.

IN DEFINITIONEM XI.

ÆQVATIO, eſt vnicum medium quo vtitur Logiſtica ad quæuis ſoluenda problemata, tali artificio ignotam quantitatem, notæ alicui comparando, vt tandem inter eas æqualitatem deprehendat, & ſic in agnitionem ignotæ perueniat. Vt autem docet hic Diophantus, non quælibet æquatio ſtatim apta eſt ſoluendæ propoſitæ quæſtioni, ſed magna interdum indiget præparatione quò fiat ſimpliciſſima, ita vt ſi fieri poteſt vna tantum ſpecies vni ſpeciei, vel duæ, vni æquales reperiantur. Totum verò negotium præparationis æquationum in eo conſiſtit, vt defectus communiter addantur, & ſimilia à ſimilibus auferantur, & ſi vtraque æquationis pars altioris gradus

ſpecies

ſpecies contineat, fiat hypobibaſmus, ſeu deſcenſus quidam, vel depreſſio characterum, vt vocat Xilander, omnia diuidendo per infimæ ſpeciei denominationem. Quæ omnia vt vnico exemplo confirmem, ſint 2. C. +3. N. æquales 9. N.-4. Q. Quia ergo deficiunt ex altera parte 4. Q. addantur vtrimque 4 Q. fient 2 C. +3. N. +4 Q. æquales 9. N. quia verò ſimiles ſpecies, nempe Numeri vtrimque reperiuntur, auferantur vtrimque 3. N. remanent igitur 2. C. +4. Q. æquales 6. N. Denique quia ſpecies altioris gradus ex vtraque parte reperiuntur, quæ omnes depreſſionem pati poſſunt, diuidatur vtraque pars per infimam ſpeciem quæ hic eſt 1. N. Fient ergo 2. Q. +4. N. æquales 6. vnitatibus. Et tunc demum æquatio cenſebitur ritè præparata. Præterea Paraboliſmum addit Franciſcus Vieta in libello aureo cui titulus. Iſagoge in artem Analyticen, cuius præſertim vſus eſt in æquationibus compoſitis, qualis eſt illa quam exhibuimus, quique fit diuidendo ſingulas æquationis partes per vnitates altioris ſpeciei, vt in dato exemplo diuidendo eas per numerum Quadratorum, qui eſt 2. fiunt 1 Q. +2 N. æquales 3. ſed hac methodo non vtitur Diophantus, qui æquationes compoſitas reſoluit abſque huiuſmodi reductione numeri altioris ſpeciei ad vnitatem, vt ſuo loco docebimus. Porrò hæc omnia tribus tantum nituntur principijs, nimirum.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent ſunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.

Si æqualia per eundem numerum diuidantur, fiunt æquales quotientes.

Hæc breuiter cum Diophanto attigiſſe ſufficiat, qui plura deſiderat, legat Vietam libro citato, vbi breuiter; ſed accurratè more ſuo iſta perſequitur.

Cæterum æquatione ritè præparata, quomodo ea reſoluenda ſit, vt ignota quantitas innoteſcat, non tradit Diophantus, & cum hic polliceatur ſe daturum regulas quomodo explicetur quæſtio, cùm duæ ſpecies, vni æquales reperiuntur, in libris eius qui extant huiuſmodi regulæ non continentur, ita vt videatur regulas omnes Algebræ quas vocat, ſuppoſuiſſe, vt pote notas (nam iis paſſim vtitur in his libris) vel alio opere edito qui ad nos minimè peruenit, eas tradidiſſe. Equidem regulis ſimplicibus tantum (cùm ſcilicet vna ſpecies vni ſpeciei æquatur) in tribus prioribus libris vtitur: in ſequentibus verò ad compoſitas etiam nonnunquam deuoluitur. Simplices vnica regula comprehenduntur quæ talis eſt.

Facto hypobibaſmo ſi opus ſit, ita vt vnitates alicui ſpeciei æquales remaneant, diuidantur vnitates per numerum à ſpecie denominatum, orietur valor illius ſpeciei.

Vt ſi 3. N. æquentur 12. vbi nullo eſt opus hypobibaſmo, diuide 12. per 3. fit 4. valor vnius numeri. At ſi 2. æquentur 10. N. Facto hypobibaſmo 2. N. æquantur 10. vnde facta diuiſione, prodit 5. valor vnius numeri. Quod ſi 2. C. æquentur 18. N. facto hypobibaſmo, 2. Q æquantur 18. vnde diuidendo 18. per 2. fit 9. valor vnius quadrati, & extracta radice fit 3. valor Numeri. Et ſic de aliis. Huius regulæ fundamentum totum eſt Regula aurea proportionum, ſeu trium, in qua tertius terminus eſt vnitas, vnde ſola diuiſione opus eſt. Nam verbi gratia in vltimo exemplo, dico per regulam trium, ſi 2. Q. æquantur 18. cui numero æquatur 1. Q? vnde patet diuiſo 18. per 2. quotientem 9. eſſe valorem Quadrati. De compoſitis regulis agemus ad propoſitionem 33. libri huius, vbi earum fundamentum tangit Diophantus. Nam piget diutius immorari in re facili, & vulgo etiam Logiſtarum notiſſima.

QVÆSTIO I.

PROPOSITVM numerum in duos numeros partiri, quorum datum ſit interuallum. Eſto datus numerus 100. interuallum verò 40. oportet inuenire numeros. Statuatur minor 1. N. Maior ergo erit 1. N. & 40. vnitates. Igitur vterque ſimul erit 2. N. + 40. Dabantur autem eſſe 100. Proinde vnitates 100. æquales ſunt 2. N. +40. Aufero ſimilia a ſimilibus, nimirum aufero 40. vnitates, & à 100. & à 2. N. +40. relinquuntur 2. N. æquales vnitatibus 60. Ergo alter numerorum eſt 30. Ad poſitiones. Erit minor quidem vnitatum 30. maior verò vnitatum 70. & demonſtratio eſt manifeſta.

ΤΟΝ ὑποταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπαρχῇ τῇ δοθείσῃ. ἔστω δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ $\bar{ρ}$. ἡ δὲ ὑπαρχὴ μονάδες τεσσαράκοντα, δεῖσαι εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. ὑπαρχὴ ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἔστω, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμὸς ἐκ μονάδων μ̄ συναμφοτέρων ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ δύο, μονάδες $\bar{μ}$. δέδονται δὲ μονάδες $\bar{ρ}$. μονάδες ἄρα $\bar{ρ}$. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶ μονάσι $\bar{μ}$, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια ἀφῃρῆσθω· ἀπὸ μὲν $\bar{ρ}$ μονάδες $\bar{μ}$, καὶ ἀπὸ τοῦ δύο ἀριθμοῦ καὶ ἑνὸς $\bar{μ}$ μονάδων ὁμοίως μονάδες $\bar{μ}$. λοιποὶ ἄρα ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάδι ξ. ἑκατέρου ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ μονάδων λ̄. ἐπὶ τὰς ὑποθέσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων τριάκοντα. ὁ δὲ μείζων μονάδων $\bar{ο}$. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, & nihil continet quod lectorem morari debeat. Verba autem illa ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις, quæ longa periphrasi vertit Xilander, & aliquando etiam perperam, vt suo loco monebimus, ego passim interpretatus sum, Ad Positiones: vel etiam retento Græco vocabulo. Ad Hypostases. Semper enim inuento valore numeri, propositionem his verbis absoluit Diophantus, quia videlicet vt propositæ quæstionis habeatur perfecta solutio, oportet valorem numeri ad positiones applicare, vt hoc loco, Cum inuenerimus valorem Numeri esse 30. quia Minor pars propositi numeri posita erat 1. N. erit ea 30. Maior verò quæ posita erat 1. N. + 40. erit vtique 70. & sic numerus 100. diuisus est in duas partes 30. & 70. quarum interuallum 40. vt requirebatur. Poterant etiam positiones aliter institui hac arte. Ponatur maior pars 1. N. erit ergo minor 1. N. −40. harum aggregatum est 2 N.−40. quod æquari debet numero 100. Quare addendo vtrimque 40. fiunt 2. N. æquales 140. vnde fit 1 N. 70. Ad hypostases. Erit maior pars 70. Minor 30. vt priùs. Ex vtraque autem operatione elicitur huiusmodi Canon.

Dato numero diuidendo, adde vel adime datum interuallum, semissis summa majorem partem; semissis residui, minorem exhibebit.

Qui Canon à nobis syntheticè demonstratus est propos. 23. lib. 1. porismatum Aliter etiam rursus poterant institui positiones. Statuatur interuallum quæsitarum partium 2. N. Maior verò pars esto 50. + 1 N. minor 50 − 1 N. sic enim vtraque simul conficit 100. & interuallum ipsarum est 2. N. quod æquatur numero 40. Quare fit 1. N. 20. Ad positiones. Maior pars quæ posita erat 50 + 1 N erit vtique 70. Minor verò quæ posita erat 50 − 1 N. erit 30. & hinc rursus elicietur alius Canon.

Semissi dati numeri diuidendi, adde vel adime semissem dati interualli, summa & residuum quæsitas exhibebunt partes.

Porro ex vtroque Canone manifestè colligitur, si solutio in integris contingere debeat, necesse esse vt Numerus diuidendus, & datum interuallum, sint simul pares numeri, vel simul impares, nam si alter sit par, alter impar; tam eorum summa, quam quod restat minorem de maiori subtrahendo, erit impar numerus. Quare nec summæ nec residui semissis in integris haberi poterit. Quod tangere voluit Scholiastes. Denique moneo eodem artificio datum quemlibet numerum diuidi in quotlibet partes, quarum interualla data sint. Verbi gratia. Numerus 100. diuidendus sit in tres partes, ita vt mediæ suprà minimam excessus sit 20. maximæ supra mediam excessus sit 24. Ponatur minima 1 N. erit ergo media 1 N + 20. maxima verò 1. N. + 44. Harum summa est 3 N. + 64. æqualis 100. Quare auferendo vtrimque 64. remanent 3 N. æquales 36. & fit 1 N. 12. Ad positiones. Erit minima pars 12. Media 32. Maxima 56. Hinc quoque si placet eliciemus hunc Canonem.

Aufer à numero diuidendo summam interuallorum cuiuslibet partis supra minimam, residuum partire in numerum multitudinis partium, orietur minima pars.

Vnde constat, vt quæstio sit possibilis, summam interuallorum cuiuslibet partis suprà minimam, minorem esse debere numero diuidendo. Cæterùm duobus alijs modis institui possunt positiones, pro vt media vel maxima pars statuetur 1 N. & hinc rursus formari alij Canones, quæ omnia industriæ tuæ relinquo.

QVÆSTIO II.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. δεδιτετάχθω δὴ ὁ ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τριπλασίονι. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμὸς τριῶν ἐστιν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίων. δεῖ δὲ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι μονάσιν ξ. ἀλλ' οἱ δύο συνιόντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ἴσοι μονάσιν ξ. ὁ ἀριθμὸς ἄρα μονάδων ιε̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μονάδων ι. ὁ δὲ μείζων μ̄ μῑ.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in ratione data. Constitutum sit numerum 60. partiri in duos numeros in ratione tripla. Statuatur minor 1. N. igitur maior erit 3. N. & est maior minoris triplus. Superest vt ambo simul æquentur vnitatibus 60. sed ambo compositi sunt 4 N. Proinde 4 N. æquales sunt vnitatibus 60. est ergo 1. N. vnitatum 15. Quamobrem minor est 15. maior autem 45.

IN QVAESTIONEM II.

ALITER etiam institui possunt positiones. Statuatur maior 1. N. Ergo minor $\frac{1}{3}$ N. horum summa 1 $\frac{1}{3}$ N. æqualis est 60. & fit 1. N. 45. Tantus ergo est major, minor verò 15. vt prius. Ex vtraque operatione formatur hic Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum. Quotiens diuiſus ſigillatim in ſumptos numeros, exhibebit quæſitas dati numeri partes.

Minimos numeros ſumendos eſſe ait Xilander. Sed neceſſe non eſt, niſi facilitatis gratia, quia minores numeri commodius tractantur.

Poteſt & hæc quæſtio extendi ad diuiſionem dati numeri in quotlibet partes, datas rationes ſeruantes, eritque eadem prorſus operatio, & idem Canon, vt ſuperuacaneum ſit id exemplis illuſtrare.

QVÆSTIO III.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in data ratione, & data differentia. Conſtitutum ſit numerum 80. in duos partiri, ita vt maior minoris triplus ſit, & adhuc 4. vnitates ſuperaddat. Statuatur minor 1 N. erit igitur maior 3 N. +4. & ſic maior minoris triplus eſt, & adhuc quatuor vnitates ſuperaddit. Reſtat vt ambo ſimul æquentur vnitatibus 80. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 4 N. +4. Igitur 4 N.+4. æquales ſunt vnitatibus 80. Aufero ſimilia à ſimilibus. Relinquuntur ergo vnitates 76. æquales 4. N. & fit 1 N. 19. Ad poſitiones. Erit igitur minor numerus 19. Maior autem 61. ad triplum minoris adiectis 4. quæ de 80. ſubduxeram, vt triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Poſtea verò eadem 4. adiicio maiori, vtriuſque quantitate cognita.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ ᾧ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν. διπλασίονα τ̄ π̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ζ̄πλασίων ᾖ, καὶ ὑπ μονάσι τέσσαρσιν ὑπερέχῃ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἑνός. ὁ μείζων ἄρα ἀριθμοὶ τρεῖς καὶ μονάδες τέσσαρες. καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ἐστὶ τριπλασίων, ὑπ ℂ μονάσι τέσσαρσιν ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι μονάσιν π̄. ἀλλ' οἱ δύο συντιθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες ℂ μονάδες δ̄, ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ℂ μονάδες δ̄, ἴσοι μονάσι π̄, καὶ ἀφαιρεθὲν ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα μονάδες ος̄ ἴσαι ἀριθμοῖς τέσσαρσι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ̄. ὑπ' τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς μ̄ ιθ̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ξ̄ᾱ. τεσσεσιθριθμὸν τὴν δ̄ μ̄, ὧν ἀφεῖλον ἀπὸ τ̄ π̄ μ̄. ἀφεῖλον γὰρ ὅσπερ εὑρεῖν πόσων μονάδων ἴσαι ἕκαστος ἀριθμός. ὕστερον ᾗ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προσέθηκα τὰς δ̄ μ̄. μετὰ τὸ γνῶναι πόσων ἕκαστος.

IN QVAESTIONEM III.

IN Græco, vbi ſcriptum erat ἐν λόγῳ ℂ ὑπεροχῇ τῆς δοθείσης reposui, τοῖς δοθεῖσιν, flagitante ſententia. Cæterum hic etiam aliter inſtitui poteſt operatio, ſi ponatur Maior 1 N. vnde auferendo 4. remanet 1 N.−4. triplum minoris, Minor ergo eſt $\frac{1}{3}$ N.−$1\frac{1}{3}$ vtriuſque ſumma fit $1\frac{1}{3}$ N −$1\frac{1}{3}$ æqualis 80. & defectum vtrimque adiiciendo $1\frac{1}{3}$ N. æquatur 81. $\frac{1}{3}$ Quare fit 1 N. 61. maior numerus. Minor verò 19. vt prius.

Verùm ex operatione Diophanti formabitur iſte Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum date interuallo multatum; quotientem ſi ducas in minorem ſumptorum, fiet minor quæſitorum.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros qui & datam rationem, & datum ſeruent interuallum. Mandatum ſit maiorem minoris eſſe quincuplum, interuallum autem ipſorum eſſe vnitates 20. ſtatuatur minor 1 N. Maior ergo erit 5 N. Supereſt 5 N. excedere 1 N. vnitatibus 20. At horum interuallum eſt 4 N. hoc igitur æquale eſt vnitatibus 20. & fit 1 N. 5.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ὅπως δοθήσῃ. διπλασίονα δὴ τ̄ μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι πενταπλασίονα, τὴν ᾗ ὑπεροχὴν αὐτοῖς ποιεῖν μονάδας κ̄. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμοῖ ἑνός, ὁ ἄρα μείζων ἴσαι ἀριθμοῖς ε̄. λοιπὸν θέλω ἀριθμοὺς ε̄ ὑπερέχειν ἀριθμῷ ἑνὸς μονάδας κ̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῇ ὄζιν ἀριθμοὶ δ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄] ἔσται ὁ

DEFINITIO I.

Ἀλλὰ καὶ πρὸς τοῖς δι' ὑπάρχοντί σοι παίτας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός, φανερὸν καθέστηκεν εἰς ἄπειρον ἔχειν τὴν ὕπαρξιν. τυγχανόντων δὲ ἐν τούτοις, ὧν μὲν τετράγωνοί εἰσιν ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος, οὗτος δὲ ὁ ἀριθμὸς καλεῖται πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὧν δὲ κύβοι εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ὅτι τὰς αὐτῆς πλευρὰς πολλαπλασιαθέντων· ὧν δὲ δυναμοδυνάμεων εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ δυναμοκύβων εἰσὶν ἐκ τετραγώνων ὅτι τὰς ἀπὸ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς κύβους πολλαπλασιαθέντων, ὧν δὲ κυβοκύβων εἰσὶν ἐκ κύβων ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντων, ἔκ τι τῆς τούτων ἤτοι συνθέσεώς ἐστιν, ἢ ὑπεροχῆς, ἢ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ λόγου τοῦ πρὸς ἀλλήλους, ἢ καθ' ἑκάστους, ἢ καθ' ἑκάστων πρὸς τὰς ἰδίας πλευρὰς συμβαίνει πλείστας προβλήματα ἀριθμητικὰ λύεται δὲ βαδίζοντός σου τὴν ὑποδεχθησομένην ὁδόν.

VERVM etiam præter hæc intelligenti tibi omnes numeros compositos esse è quadam multitudine vnitatum, liquet eos augmentum in infinitum capere. Cùm ergo in his quidam sint quadrati, qui fiunt numero aliquo in se multiplicato, qui numerus latus quadrati dicitur; aliqui cubi qui existunt quadratis in sua multiplicatis latera; alij rursus quadratoquadrati, qui gignuntur quadratis in seipsos ductis; nonnulli quadratocubi, quos quadrati in cubos ab eodem profectos latere ducti procreant; quidam denique cubocubi qui cubis in seipsos ductis nascuntur: visuenit, vt ex horum vel compositione, vel quo præstant alij alijs, vel multiplicatione, vel ratione inter se, aut cuiuslibet, quorumlibetve ad sua latera, plurimæ nectantur arithmeticæ quæstiones, quæ soluantur tamen, si ea quam commonstrabimus via incedas.

IN DEFINITIONEM I.

QVAMVIS species, vel (vt alij vocant) potestates, quibus velut elementis vtitur logistica in infinitam multitudinem excrescant, nec earum certus sit & determinatus numerus, tamen Diophantus de quinque prioribus tantum tractationem instituit, quæ sunt Quadratus, cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus & cubocubus, ratus scilicet has sufficere ad implicatissimas quasque quæ hactenus excogitatæ sunt, quæstiones dissoluendas. Harum igitur hîc affert definitiones. Et Quadratum quidem cubúmque definit vt Euclides. Reliquas verò tres, per ipsam nominum impositionem. Nam quadratoquadratum vocat, numerum qui fit ex quadrato in quadratum, idest in seipsum. Quadratocubum verò, qui fit ex quadrato in cubum ab eodem profectum latere. Denique cubocubum qui fit ex cubo in cubum, hoc est in seipsum. Vbi aduertendum à recentioribus omnibus quotque ante Diophantum editum logistices rudimenta tradidere, Quadratocubum vocari nunc supersolidum, nunc surdesolidum, nunc etiam Primum Relatum. Cubocubum verò, ab iisdem dici Quadratocubum, quia videlicet est quadrati cubus, vel cubi quadratus, quod adnotasse operæ pretium duxi, nequem in authoribus legendis nominum ambiguitas remoretur.

DEFINITIO II.

Καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος, δύναμις, καὶ ἔστιν αὐτῆ σημεῖον τὸ Δ^Υ ἐπίσημον ἔχον υ, Δ^υ. ὁ δὲ (ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν πολλαπλασιαθέντος) κύβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον Κ^Υ ἐπίσημον ἔχον υ, κ^υ. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθέντος, δυναμοδύναμις, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δέλτα δύο, ἐπίσημον υ, Δ^Υ Δ^υ, δυναμοδύναμις. ὁ δὲ ἐκ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπ' αὐτῆς αὐτῇ πλευρᾶς κύβον πολλαπλασια-

APPELLATVR igitur Quadratus, Dynamis, & est illius nota Δ^Υ superscriptum habens υ sic Δ^Υ. Qui autem fit ex quadrato in suum latus cubus est, cuius nota est κ^Υ, superscriptum habens υ hoc pacto κ^Υ. Qui autem fit ex quadrato in seipsum multiplicato, quadratoquadratus est, cuius nota est geminum Δ^Υ habens superscriptum υ, hac ratione Δ^Υ Δ^Υ. Qui fit quadrato in cubum qui ab

eodem latere profectus est, ducto, quadratocubus nominatur, nota eius $\Delta^{\bar{Y}}\bar{\kappa}$ superscriptum habens $\bar{\upsilon}$ sic $\Delta^{\bar{Y}}\bar{\kappa}^{\bar{\upsilon}}$. Qui ex cubo in se ducto nascitur, cubocubus vocatur, & est eius nota geminum $\bar{\kappa}$ superscriptum habens $\bar{\upsilon}$, hoc pacto $\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$. Cui vero nulla harum proprietatum obtigit, sed constat multitudine vnitatum rationis experte, numerus vocatur, nota eius $\varsigma^{\bar{o}}$. Est & aliud signum immutabile definitorum, vnitas, cuius nota $\bar{\mu}$ superscriptum habens $\bar{o}$ sic $\mu^{\bar{o}}$

ὄντος, δυναμόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ $\Delta^{\bar{Y}}\bar{\kappa}$. ἐπίσημον ἔχον τὸν υ, $\Delta^{\bar{Y}}\kappa^{\upsilon}$. ὁ δὲ ἐκ κύβου ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντος, κυβόκυβος, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον δύο $\kappa\bar{\kappa}$, ἐπίσημον ἔχον τὸ υ, $\kappa\kappa^{\upsilon}$. ὁ δὲ μηδὲν τούτων τῶν ἰδιωμάτων κτησάμενος, ἔχων δὲ ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, καὶ ἔστιν αὐτοῦ σημεῖον τὸ $\varsigma^{\bar{o}}$. ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀνεστάλτον τῶν ὡρισμένων ἢ μονάς, καὶ ἔστιν αὐτῇ σημεῖον τὸ $\bar{\mu}$, ἐπίσημον ἔχον τὸ ὁ $\mu^{\bar{o}}$.

IN DEFINITIONEM II.

HÆc ad verbum exprimenda esse arbitratus sum potiùs quàm cum Xilandro nescio quid aliud comminisci. Quamuis enim in reliqua versione nostra notis ab eodem Xilandro excogitatis libenter vsus sim, quas tradam infrà. Hic tamen ab ipso Diophanto longiùs recedere nolui, quòd hac definitione notas explicet quibus passim libris istis vtitur ad species omnes compendio designandas, & qui has ignoret ne quidem Græca Diophanti legere possit. Porrò quadratum Dynamin vocat, quæ vox potestatem sonat, quia videlicet quadratus est veluti potestas cuiuslibet lineæ, & passim ab Euclide, per id quod potest linea, quadratus illius designatur. Itali, Hispanique eadem ferè de causa Censum vocant, quasi dicas redditum, prouentúmque, quòd à latere seu radice, tanquam à feraci solo quadratus oriatur. Inde factum vt Gallorum nonnulli & Germanorum corrupto vocabulo zenzum appellarint. Numerum autem indeterminatum & ignotum, qui & aliarum omnium potestatum latus esse intelligitur, Numerum simpliciter Diophantus appellat. Alij passim Radicem, vel latus, vel rem dixerunt, Itali patrio vocabulo Cosam. Cæterùm nos in versione nostra his notis N. Q. C. QQ. QC. CC. designabimus Numerum, Quadratum, Cubum, Quadratoquadratum, Quadratocubum, Cubocubum. Nam quod ad vnitates certas & determinatas spectat, eis notam aliquam adscribere superuacaneum duxi, quòd hæ seipsis absque vlla ambiguitate sese satis indicent. Ecquis enim cùm audit numerum 6. non statim cogitat sex vnitates? Quid ergo necesse est sex vnitates dicere, cùm sufficiat dicere, sex? Demum legendum in Græco censeo, πλῆθος μονάδων ἄλογον, flagitante sententia, potius quàm ἄλογος ἀριθμὸς καλεῖται, vt habetur in codice manu exarato, & per multitudinem vnitatum rationis expertem, intelligo numerum indefinitum & indeterminatum, seu potius ignotum, quémque statim opponit ὡρισμένῳ seu vnitatibus certis & determinatis.

DEFINITIO III.

ENIMVERO sicut partes numeris cognomines, similem ipsis numeris denominationem sortiuntur (etenim à ternario triens, à quaternario quadrans dicitur) ita nunc quoque denominatis numeris partes cognomines, ipsis numeris similem habent denominationem, nam à numero pars numerica dicitur; à quadrato, quadratica; a cubo cubica: à quadratoquadrato, quadratoquadratica; à quadratocubo, quadratocubica; à cubocubo, cubocubica. Habebit autem quælibet pars à sibi cognomine nimero notam, & literam superscriptam quæ speciem à specie distinguat.

ΩΣΠΕΡ δὲ τῶν ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια παρωνύμως καλεῖται τοῖς ἀριθμοῖς (τὸ μὲν $\bar{\gamma}$ τὸ τρίζον, τὸ δὲ $\bar{\delta}$ τὸ τέταρζον. οὕτως καὶ τῶν ὑπονοουμένων ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται) παρωνύμως τοῖς ἀριθμοῖς. τοῦ μὲν ἀριθμοῦ τὸ ἀριθμοστὸν, τοῦ δὲ δυνάμεως τὸ δυναμοστὸν, τοῦ δὲ κύβου τὸ κυβοστὸν, τοῦ δυναμοδυνάμεως τὸ δυναμοδυναμοστὸν, τοῦ δὲ δυναμοκύβου τὸ $\Delta^{\bar{Y}}\bar{\kappa}$. τοῦ δὲ κυβοκύβου τὸ κυβοκυβοστόν. ἔχει δὲ ἕκαστον αὐτῶν δηλονότι τὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ σημεῖον χρώμενον ἔχον διαστέλλουσαν τὸ εἶδος.

IN DEFINITIONEM III.

QVAM malè acceperint hanc definitionem Græcus Scholiastes, & Xilander, si vacat, videre poteris. Manifestum tamen est nil aliud velle Diophantum, quàm vt fractionibus Algebricis notæ specierum à quibus sumunt denominationem, adscribantur, docens ipsas fractiones non minus à qualibet specie denominari, quàm numerum quemlibet vnitatum integrum. Hoc autem huiusmodi similitudine explicat. Quemadmodum, inquit, fractio quælibet absoluta ab aliquo numero sumit denominationem, velut triens à ternario, à quaternario quadrans, & sic de alijs; ita & quælibet fractio Algebrica à specie cuius nota ei affixa est, denominationem mutuatur, verbi gratia $\frac{1}{2}$ N. dicetur semissis vnius Numeri, $\frac{1}{3}$ Q. dicetur triens vnius Quadrati, $\frac{1}{4}$ C. dicetur dodrans vnius Cubi, & sic de alijs, vt superuacaneum sit in re manifesta diutius immorari. Portò Xilandri coniecturam secutus, duobus in locis loco παρομίων, reposui παρονύμων.

DEFINITIO IV.

ΕΚΘΕΜΕΝΟΣ οὖν σοι τὴν ἐκάστου τ' ἀριθμοῦ ἐπωνυμίαν, ἐπὶ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς αὐτὰν μεταβλήσομαι. ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδιειλῆφθαι χρόνον ἀπὸ τῆς ὀνομασίας.

Ἀριθμὸς μὲν οὖν ἐπὶ ς' πολλαπλασιασθεὶς, ποιεῖ δύναμιν. δὶς δὲ δύναμις, κύβον. δὶς δὲ κύβος, δυναμοδύναμιν. δὶς δὲ δυναμοδύναμις, δυναμόκυβον. δὶς δὲ δυναμόκυβος, κυβόκυβον. δύναμις δὲ δὶς μὲν δύναμιν [ποιεῖ δυναμοδύναμιν.] δὶς δὲ κύβος, δυναμόκυβον. δὶς δὲ δυναμοδύναμις, κυβόκυβον. κύβος δὲ δὶς κύβον, κυβόκυβον.

PROINDE cùm tibi singulas numerorum denominationes exposuerim, ad eorum multiplicationes me confero, quæ tibi facilè patebunt, cùm per ipsam nominum impositionem, ferè sint iam ante declaratæ.

Ergo numerus in numerum multiplicatus, quadratum producit; in quadratum, cubum, in cubum, quadratoquadratum; in quadratoquadratum, quadratocubum; in quadratocubum, cubocubum. Quadratus verò in quadratum, gignit quadratoquadratum; in cubum, quadratocubum; in quadratoquadratum, cubocubum. Cubus autem in cubum ductus, cubocubum producit.

IN DEFINITIONEM IV.

HIC specierum multiplicationes explicat, quarum aliquæ quidem ex definitione prima, & ipsa nominum impositione manifestæ sunt, reliquas verò demonstrare facile est, tali expedito theoremate.

Quadratus, Cubus, Quadratoquadratus, Quadratocubus, & Cubocubus vnà cum communi eorum latere sunt ab vnitate continuè proportionales.

Sit vnitas A, quodlibet latus B. cuius quadratus C. cubus D. quadratoquadratus E. quadratocubus F. & cubocubus G. Dico A B C D E F G, esse continuè proportionales. Quia enim [1] ex B in B, fit C. erit ex definitione multiplicationis A ad B, vt B ad C. similiter quia [2] ex B. in C, fit D. erit eadem de causa A ad B, vt C ad D. Quare ipsi A B C D. sunt continuè proportionales. Rursus [3] quia ex C in seipsum fit E, erit ex definitione multiplicationis A ad C, sicut C ad E. Quare cùm inter A & C. cadat vnus medius proportionalis B, [4] cadit etiam vnus in eadem ratione inter C & E, sed in ratione A ad B, vel B ad C, ostensus est C ad D. Igitur D est ille medius, ac proinde est C ad D, vt D ad E. Rursus [5] quia ex C. in D producitur F, erit A ad C, vt D ad F. Quare rursus cùm inter A C cadat medius proportionalis B, [6] cadit & vnus medius in eadem ratione inter D & F. Vnde cùm in illa ratione ostensus sit esse D ad E, erit E ille medius, & idcirco erit D ad E, vt E ad F. Denique [7] quia ex D in seipsum fit G, erit A ad D, vt D ad G. vnde sicut inter A & D cadunt duo medij proportionales B C, [8] sic & inter D G cadent duo in eadem ratione. Sed in eadem ratione ostensi sunt esse D ad E, & E ad F. Igitur E F sunt illi medij, ac proinde est E ad F, vt F ad G. & omnes A B C D E F G. sunt continuè proportionales. Quod demonstrandum erat. Hinc porro specierum multiplicatio demonstratur. Primo enim ex Numero B in seipsum fieri quadratum C, itémque ex Numero B in quadratum C. fieri cubum D, patet ex definitione prima. Secundò ex Numero B. in cubum D, fieri quadratoqua-

Definit. 1. A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64.

Definit. 1. [1]
Definit. 1. [2]

8. octaui. [3]

Definit. 1. [4]
8. octaui. [5]

Definit. 1. [6]

8. octaui. [7]

A 1. B 2. C 4. D 8. E 16. F 32. G 64. [8]

dratum E probatur. Quia enim per præcedens theorema ipſi A B C D E ſunt continuè proportionales, erit A ad B, vt D ad E. Quare qui ſub extremis A E continetur, æquatur ei qui ſub mediis B D. ſed ex vnitate A in E fit ipſemet E. ergo idem E fiet ex B in D. quod erat propoſitum. Tertio dico ex Numero B in ſuum quadratoquadratum E fieri quadratocubum F, quia enim eſt A ad B vt E ad F, numerus qui fit ex A in F, nempe ipſe F æquatur ei qui fit ex B in E. Quòd erat propoſitum. Quartò dico ex Numero B in ſuum quadratocubum F, fieri cubocubum G. Nam vt prius cùm ſit A ad B. vt F ad G. fiet idem G ex A in G, vel ex B in F. Quod erat intentum. Quintò ex quadrato C in ſeipſum, fieri quadratoquadratum E, patet ex definitione prima, ſicut & ex eodem quadrato C in cubum D fieri quadratocubum E. Sextò ex quadrato C in quadratoquadratum E fieri cubocubum G ſic probatur. Quia ob continuam proportionalitatem, vt A ad C, ſic eſt E ad G, idem G fiet ex A in G, vel ex C in E. Quod erat propoſitum. Denique ex cubo D in ſeipſum, fieri cubocubum G. patet ex definitione prima. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum. 19. ſeptimi.

DEFINITIO V.

OMNIS numerus in partem ſibi cognominem multiplicatus, vnitatem producit.

ΠΑΣ ἀριθμὸς ὅτι τὸ ὁμώνυμον αὐτῷ μόριον πολλαπλασιασθεὶς, μονάδα ποιεῖ.

IN DEFINITIONEM V.

HIC præclarè nugatur Scholiaſtes, cùm putat in hac definitione loqui Diophantum de fractionibus abſolutis, & nulla ſpecici alicuius nota affectis, quaſi docere velit ex $\frac{1}{3}$ in 3. vel ex $\frac{1}{4}$ in 4. fieri vnitatem, quod quid ad logiſticam conferat, non video, ſed ſanè vulgò Arithmeticorum notum eſt, atque ipſis lippis & tonſoribus, vt geometrica demonſtratione, opus non fuerit ad id confirmandum. Cæterùm non id voluit Diophantus, ſed potius fractiones Algebricas illas, in quibus vnitates per aliquam ſpeciem diuiſæ intelliguntur, ductas in ſpeciem à qua denominantur, producere vnitates abſolutas, vt ſi $\frac{1}{N}$ ducatur in 4. N. fient 2. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{1}{Q}$ ducantur in 6. Q. fient 4. vnitates abſolutæ, & ſi $\frac{1}{C}$ ducantur in 10. C. fient 2. vnitates. Et hanc eſſe Diophanti mentem ex definitione octaua manifeſtè colligitur. Cùm enim ibi multiplicationes huiuſmodi fractionum tradat, non docet quid producatur ſi fractio ducatur in ſpeciem à qua denominatur, quia ſcilicet id iſta definitione iam comprehenderat.

DEFINITIO VI.

ENIMVERÒ cùm vnitas immutabilis ſit, ſempérque maneat ſpecies quælibet in eam multiplicata, eandem generat ſpeciem.

ΤΗΣ οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης, καὶ ἰσώσης ἀεὶ τὸ πολλαπλασιαζόμενον εἶδος ἐπ' αὐτὴν αὐτὸ τὸ εἶδος ἴσαι.

IN DEFINITIONEM VI.

NON melius accepit hanc definitionem Scholiaſtes, quàm præcedentem & ſequentes duas, quod ſemel atque iterum monuiſſe ſufficiat. Exiſtimauit enim in iſtis quatuor definitionibus Diophantum loqui de numeris & fractionibus abſolutis, quod à ſcopo illius prorſus alienum eſt. Hic itaque docet Diophantus, vnitates ductas in ſpeciem quamlibet, ipſammet ſpeciem producere, vt ſi 2. ducantur in 3. N. fient 6. N. Et ſi 4. ducantur in 5. Q. fient 20. Q. & ſic de aliis. Cauſam autem aſſignare videtur, quòd vnitates abſolutæ, vnitatis ipſius naturam ſapiant. Quemadmodum ergo vnitas in quemlibet numerum ducta, producit ipſum eundem numerum, ſic & vnitates in quamlibet ſpeciem multiplicatæ, eandem ſpeciem gignunt.

DEFINITIO VII.

AT partes denominatæ ſi inter ſe multiplicentur, partes producunt ipſis numeris cognomines. Verbi gratia pars numerica in partem numericam ducta, quadraticam gignit; in quadraticam,

ΤΑ δὲ ὁμώνυμα μόρια ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόμενα, ποιήσει ὁμώνυμα μόρια τοῖς ἀριθμοῖς. οἷον τὸ μὲν ἀριθμοστὸν ὅτι τὸ ἀριθμοστὸν, δυναμοστὸν ποιεῖ. ὅτι δὲ δυναμοστὸν, κυβοστόν. ὅτι δὲ κυβοστὸν, δυναμοδυναμοστόν.

ὅπὶ δὲ δυναμοδυναμοσὸν, δυναμοκυβοσόν. ὅπὶ ᾧ δυναμοκυβοσὸν, κυβοκυβοσὸν, καὶ τοῦτο ὁμοτύμως συμβλήσεται. δυναμοσὸν δὲ ὅπὶ μὲν ἀριθμοσὸν, κ̄ ποιεῖ. ὅπὶ δὲ δυναμοσὸν, δδ̄. ὅπὶ δὲ κυβοσὸν, δκ̄. ὅπὶ δὲ δδ̄, κκ̄. τὸ ᾧ κυβοσὸι, ὅπὶ μὲν ἀριθμοσὸν, ποιεῖ δδ̄. ὅπὶ ᾧ δ̄, δκ̄· ὅπὶ ᾧ κ̄, κκ̄. τὸ δὲ δυναμοδυναμοσὸν, ἐπὶ μὲν ἀριθμοσὸν, δκ̄ ποιεῖ. ἐπὶ δὲ δυναμοσὸν, κκ̄. τὸ δὲ δυναμοκυβοσὸν, ἐπὶ ἀριθμοσὸν, κυβοκυβοσόν.

cubicam; in cubicam, quadratoquadraticam; in hanc, quadratocubicam; in hanc cubocubicam; idque communicata denominatione continget. Pars verò quadratica, in partem numericam, partem cubicam facit; in quadraticam, quadratoquadraticam; in cubicam, quadratocubicam; in quadratoquadraticam, cubocubicam. Pars autem cubica in numericam, partem facit, quadratoquadraticam; in quadraticam, quadratocubicam; in cubicam, cubocubicam. Sed pars quadratoquadratica in numericam, partem facit quadratocubicam; & in quadraticam, cubocubicam. Denique pars quadratocubica in numericam, partem gignit cubocubicam.

IN DEFINITIONEM VII.

HÆc definitio à quarta pendet. Quemadmodum enim ibi numerorum integrorum à speciebus denominatorum multiplicationes docuit, ita & hîc fractionum ab iisdem speciebus denominatarum multiplicationes tradit, quarum eadem est prorsus ratio. Nam sicut verbi gratia 2. N. in 3. N. faciunt 6. Q. ita $\frac{1}{2}$ N. in $\frac{1}{3}$ N. facit $\frac{1}{6}$ Q. & sicut 3. N. in 4. Q. faciunt 12. C. sic $\frac{1}{3}$ N. in $\frac{1}{4}$ Q. faciunt $\frac{1}{12}$ C. & sic de aliis. Itaque quæ demonstrata sunt ad definitionem quartam, hîc etiam locum habent.

DEFINITIO VIII.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ μὲν ἀριθμοσὸν ἐπὶ μὲν δύναμιν, ἀριθμὸν ποιεῖ. ἐπὶ δὲ κύβον, δύναμιν· ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, κύβον. ἐπὶ δυναμόκυβον, δυναμοδύναμιν; ἐπὶ κυβόκυβον, δυναμόκυβον. δυναμοσὸν ᾧ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, ἀριθμοσόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν δύναμιν ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, κύβον. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δυναμοδύναμιν. κυβοσὸν δὲ ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοσόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, ἀριθμοσόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, δύναμιν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, κύβον. δυναμοδυναμοσὸν δὲ ἐπὶ μὲν ς̄, κυβοσόν. ἐπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοσόν. ἐπὶ δὲ κύβον, ἀριθμοσόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, δύναμιν. δυναμοκυβοσὸν ᾧ ἐπὶ μὲν ς̄ δυναμοδυναμοσόν. ἐπὶ δύναμιν, κυβοσόν ἐπὶ δὲ κύβον, δυναμοσόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, ἀριθμοσόν. ἐπὶ δὲ κυβόκυβον, ἀριθμόν. τὸ δὲ κυβοκυβοσὸν ἐπὶ μὲν ἀριθμὸν, δυναμοκυβοσόν. ὅπὶ δὲ δύναμιν, δυναμοδυναμοσόν. ὅπὶ δὲ κύβον, κυβοσόν. ἐπὶ δὲ δυναμοδύναμιν, δυναμοσόν. ἐπὶ δὲ δυναμόκυβον, ἀριθμοσόν.

RVRSVS fractio numerica in quadratum ducta, numerum gignit; in cubum, quadratum; in quadratoquadratum, cubum; in quadratocubum, quadratoquadratum; in cubocubum, quadratocubum. Fractio verò quadratica in numerum ducta, Fractionem numericam producit; in cubum, numerum; in quadratoquadratum, quadratum; in quadratocubum, cubum; in cubocubum, quadratoquadratum. Fractio cubica ducta in numerum, fractionem quadraticam gignit; in quadratum, fractionem numericam; in quadratoquadratum, numerum; in quadratocubum, quadratum; in cubocubum, cubum. Fractio quadratoquadratica in numerum ducta, producit fractionem cubicam; in quadratum, fractionem quadraticam; in cubum, fractionem numericam; in quadratocubum, numerum; in cubocubum, quadratum. Fractio quadratocubica in numerum ducta, fractionem facit quadratoquadraticam; in quadratum, fractionem cubicam; in cubum, fractionem quadraticam; in quadratoquadratum, fractionem numericam; in cubocubum, numerum. Fractio cubocubica in numerum ducta, fractionem gignit

quadratocubicam; in quadratum, fractionem quadratoquadraticam; in cubum, fractionem cubicam; in quadratoquadratum, fractionem quadraticam; in quadratocubum, fractionem numericam.

IN DEFINITIONEM VIII.

TANGIT hic aliud genus fractionum, quæ fiunt cùm numerus à specie inferiori denominatus diuisus intelligitur, per numerum ab altiori specie denominatum, vt si vnitates per Numeros diuidantur, fit fractio Numerica, qualis est $\frac{1}{N}$. Et si vnitates per quadratos diuidantur, fit fractio quadratica, vt $\frac{1}{Q}$, & sic de aliis. Differunt ergo re fractiones istæ ab iis de quibus actum est superiore definitione, quamuis vtrasque iisdem nominibus appellet Diophantus. Nam in illis speciei denominatio afficit Numeratorem, in istis denominatorem, verbi gratia si dicas $\frac{1}{3}$ N. intelligis 2. N. diuidi per 3. At si dicas $\frac{1}{N}$ intelligis 2. diuidi per 3. N. vtramque tamen fractionem Diophantus ἀριθμοστὸν vocat, similiter, Q. & $\frac{1}{Q}$ vocat δυναμιστὸν communi nomine, & sic de aliis. Ratio verò multiplicandi fractiones istas, tota pendet à ratione diuidendi species inter se. Porro diuisio multiplicationi contraria est, quamobrem, vt monet Diophantus definitione decima, cognitis specierum multiplicationibus, cognoscuntur & diuisiones: sicut enim verbi gratia Numerus in Numerum ductus producit Quadratum, ita si Quadratus per Numerum diuidatur, orietur Numerus; & sicut ex Quadrato in Cubum fit Quadratocubus, ita si Quadratocubus per Cubum diuidatur, orietur Quadratus, & rursus si Quadratocubus per quadratum diuidatur, orietur Cubus, & sic de aliis. Hinc patet si fractio numerica $\frac{1}{N}$ ducatur in 2. Q. fieri numerum, nam fit seruata vtraque denominatione $\frac{2}{N}$ quia verò diuidendo Quadratum per numerum, oritur numerus, hoc idem est atque $\frac{2}{1}$ N. Simili argumento rationem reddes omnium quæ hac definitione complectitur Diophantus.

DEFINITIO IX.

MINVS per minus multiplicatum, producit plus. At minus per plus multiplicatum, producit minus. Et defectus nota est litera ↓ decurtata, & deorsum vergens, sic ⅂.

ΛΕΙΨΙΣ δὶς λεῖψιν πολλαπλασιαθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. λεῖψις δὲ δὶς ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον ↓ ἰλλιπὲς κάτω νῦον ⅂.

IN DEFINITIONEM IX.

ΥΠΑΡΞΙΝ & λεῖψιν, abundantiam & defectum vertere poteramus. Placuit tamen à recentioribus omnibus vsitatis vocabulis dicere Plus & Minus. Et Diophantus quidem vt significet Plus nulla vtitur nota, sed conjunctione tantùm copulatiua. Nos verò in versione nostra, eos qui ante nos Latinè scripserunt, imitati; Plus hoc signo denotabimus +. Minus verò isto −. Ceterum si cui mirum videatur quod Minus per Minus multiplicatum, efficiat, Plus, & huius rei demonstrationem requirat, legat Petrum Nonium parte 2. suæ Algebræ, cap. 4.

DEFINITIO X.

DECLARATIS ergo multiplicationibus, manifestæ sunt etiam partitiones propositarum specierum. Æquum itaque est eum qui hoc negotij suscipit, in additione, subductione, & multiplicatione quæ speciebus accidunt, exercitatum esse, nimirum qua ratione species quæ adsunt, quæque desunt non eiusdem multitudinis, alijs adiicias speciebus quæ vel adsunt, vel itidem adsunt atque desunt. Et quomodo à speciebus quæ adsunt, & aliis quæ desunt, auferas alias quæ vel adsint, vel itidem adsint atque desint.

ΚΑΙ τὰ πολλαπλασιασμῶν σοι σαφηνισθέντων, φανερά ἐστιν οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν. καλῶς ἂν ἔχοι ἐπαρχόμενον τῆς πραγματείας, συνθέσι, & ἀφαιρέσι, καὶ πολλαπλασιασμοῖς τοῖς περὶ τὰ εἴδη γυμνάζεσθαι. καὶ πῶς εἴδη ὑπάρχοντα, καὶ λείποντα, μὴ ὁμοπληθῆ προσθήσεις ἑτέροις εἴδεσιν ἅτινα καὶ αὐτοῖς ὑπάρχουσιν, ἢ καὶ ὁμοίως ὑπάρχουσι καὶ λείπουσι. & πῶς ἀπὸ ὑπαρχόντων εἰδῶν, & ἑτέρων λειπόντων ἀφαιρήσεις ἕτερα ἅτινα ὑπάρχοντα, ἢ & ὁμοίως ὑπάρχοντα καὶ λείποντα.

IN DEFINITIONEM X.

ADDITIONEM, ſubductionem, multiplicationem, & diuiſionem ſpecierum, cùm diuerſimodè per Plus & Minus copulantur, non perſequitur Diophantus, ſed ſupponit in his jam exercitatum eum qui libros iſtos aggrediatur. Nec ego in re facili diutius immorabor, vide, ſi libet, authores omnes qui logiſticam ſcriptis mandarunt, vt Nicolaum Tartaleam, Petrum Nonium, Chriſtophorum Clauium, aliósque paſſim.

DEFINITIO XI.

ΜΕΤΑ δὲ ταῦτα ἐπ' ἄπειρον προβλήματός τινος ὑπάρξις εἴδεσι τοῖς αὐτοῖς μὴ ὁμοπληθῆ δὲ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν μερῶν, δεήσει ἀφαιρεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν τὸ εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται. ἐὰν δέ πως ἐν ὑπερέρῳ ἐνυπάρχῃ, ἢ ἐν ἀμφοτέροις ἐναλλάξ τινα εἴδη, δεήσει προσθεῖναι τὰ λείποντα εἴδη ἐν ἀμφοτέροις τοῖς μέρεσιν, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὰ εἴδη ἐνυπάρχοντα γένηται. καὶ πάλιν ἀφελεῖν τὰ ὅμοια ἀπὸ τῶν ὁμοίων, ἕως ἂν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν τὸ εἶδος καταλειφθῇ. πεφιλοτιμήσθω δὲ τοῦτο ἐν ταῖς ὑποθέσεσι τῶν προτάσεων, ἐὰν ἐνδέχηται, ἕως ἂν τὸ ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον καταλειφθῇ. ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται. νῦν δ' ὅτι πρὸς τὰς προτάσεις χωρήσομεν ὁδὸν πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς εἴδεσι συνθεσιμαίαν ὕλην. πλείστων δ' ὄντων τῷ ἀριθμῷ, καὶ μεγίστων τῷ ὄγκῳ, διὰ τοῦτο βραδέως βεβαιωθέντων ὑπὸ τῶν παραλαμβανόντων αὐτά, καὶ ὄντων ἐν αὐτοῖς δυσμνημονεύτων, εὐσχήμονα τὰ ἐν αὐτοῖς ἐπιδεχόμενα διαιρέσεις, καὶ μάλιστα τὰ ἐν ἀρχῇ ἔχοντα στοιχειωδῶς, ἀπὸ ἁπλουστέρων ὑποσκελιώτερα διελεῖν, ὡς προσῆκεν. οὕτω γὰρ εὐόδευτα γένησεται τοῖς ἀρχομένοις, καὶ ἡ ἀναγὴ αὐτῶν μνημονευθήσεται, τῇ προγυμνασίᾳ αὐτῇ ἐν τρισκαίδεκα βιβλίοις γεγυμνωμένη.

DEINDE ſi in aliqua quæſtione tractanda eædem ſpecies adſint ex vtraque parte non æquali multitudine, auferenda ſunt ſimilia à ſimilibus, donec vna ſpecies vni ſpeciei æqualis remaneat. Quod ſi in vtraque parte, vel in altervtra deſint quædam ſpecies, quædam adſint, quæ deſunt vtrinque addenda ſunt, dum ſpecies eædem vtrinque inueniantur; rurſumque vtrimque auferenda ſimilia à ſimilibus, tantiſper dum ab vtraque parte vna ſpecies relinquatur. Atque hoc accuratè in ipſis quæſtionum poſitionibus, quoad detur, conabere efficere, vſque dum vna ſpecies vni ſpeciei æqualis deprehendatur. Poſterius autem tibi commonſtrabimus quomodo quæſtio explicetur, etiam cùm duæ ſpecies vni æquales relinquuntur. Nunc verò ad ipſas quæſtiones accedemus, cùm nobis via abundè pateat, ob materiam ab ipſis ſpeciebus collectam. Cùm autem plurimi ſint numeri, & mole ingentes, atque ideo tardè comprehendantur ab iis qui huic ſtudio incumbunt, nec valent memoria; ſtatui quæ ex iis ita decerpi poſſunt, ita vt maximè in tractationis principio elementorum partes ſuſtineant, primo loco proponere, & à ſimplicioribus ad perplexiora progredi. Sic enim incipientibus ea fient penetratu faciliora, & in memoria eorum hærebit deductio, pertractatione eorum libris tredecim incluſa.

IN DEFINITIONEM XI.

ÆQVATIO, eſt vnicum medium quo vtitur Logiſtica ad quæuis ſoluenda problemata, tali artificio ignotam quantitatem, notæ alicui comparando, vt tandem inter eas æqualitatem deprehendat, & ſic in agnitionem ignotæ perueniat. Vt autem docet hîc Diophantus, non quælibet æquatio ſtatim apta eſt ſoluendæ propoſitæ quæſtioni, ſed magna interdum indiget præparatione quò fiat ſimpliciſſima, ita vt ſi fieri poteſt vna tantum ſpecies vni ſpeciei, vel duæ, vni æquales reperiantur. Totum verò negotium præparationis æquationum in eo conſiſtit, vt defectus communiter addantur, & ſimilia à ſimilibus auferantur, & ſi vtraque æquationis pars altioris gradus

ſpecies

ſpecies contineat, fiat hypobibaſmus, ſeu deſcenſus quidam, vel depreſſio characterum, vt vocat Xilander, omnia diuidendo per infimæ ſpeciei denominationem. Quæ omnia vt vnico exemplo confirmem, ſint 2. C. +3. N. æquales 9. N.–4. Q. Quia ergo deficiunt ex altera parte 4. Q. addantur vtrimque 4 Q. fient 2 C. +3. N. +4 Q. æquales 9. N. quia verò ſimiles ſpecies, nempe Numeri vtrimque reperiuntur, auferantur vtrimque 3. N. remanent igitur 2. C. +4. Q. æquales 6. N. Denique quia ſpecies altioris gradus ex vtraque parte reperiuntur, quæ omnes depreſſionem pati poſſunt, diuidatur vtraque pars per infimam ſpeciem quæ hic eſt 1. N. Fient ergo 2. Q. +4. N. æquales 6. vnitatibus. Et tunc demum æquatio cenſebitur ritè præparata. Præterea Paraboliſmum addit Franciſcus Vieta in libello aureo cui titulus. Iſagoge in artem Analyticen, cuius præſertim vſus eſt in æquationibus compoſitis, qualis eſt illa quam exhibuimus, quique fit diuidendo ſingulas æquationis partes per vnitates altioris ſpeciei, vt in dato exemplo diuidendo eas per numerum Quadratorum, qui eſt 2. fiunt 1 Q. +2 N. æquales 3. ſed hac methodo non vtitur Diophantus, qui æquationes compoſitas reſoluit abſque huiuſmodi reductione numeri altioris ſpeciei ad vnitatem, vt ſuo loco docebimus. Porrò hæc omnia tribus tantum nituntur principijs, nimirum.

Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ remanent ſunt æqualia.

Si æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.

Si æqualia per eundem numerum diuidantur, fiunt æquales quotientes.

Hæc breuiter cum Diophanto attigiſſe ſufficiat, qui plura deſiderat, legat Vietam libro citato, vbi breuiter; ſed accurratè more ſuo iſta perſequitur.

Cæterum æquatione ritè præparata, quomodo ea reſoluenda ſit, vt ignota quantitas innoteſcat, non tradit Diophantus, & cum hic polliceatur ſe daturum regulas quomodo explicetur quæſtio, cùm duæ ſpecies, vni æquales reperiuntur, in libris eius qui extant huiuſmodi regulæ non continentur, ita vt videatur regulas omnes Algebræ quas vocat, ſuppoſuiſſe, vt pote notas (nam iis paſſim vtitur in his libris) vel alio opere edito qui ad nos minimè peruenit, eas tradidiſſe. Equidem regulis ſimplicibus tantum (cùm ſcilicet vna ſpecies vni ſpeciei æquatur) in tribus prioribus libris vtitur: in ſequentibus verò ad compoſitas etiam nonnunquam deuoluitur. Simplices vnica regula comprehenduntur quæ talis eſt.

Facto hypobibaſmo ſi opus ſit, ita vt vnitates alicui ſpeciei æquales remaneant, diuidantur vnitates per numerum à ſpecie denominatum, orietur valor illius ſpeciei.

Vt ſi 3. N. æquentur 12. vbi nullo eſt opus hypobibaſmo, diuide 12. per 3. fit 4. valor vnius numeri. At ſi 2. æquentur 10. N. Facto hypobibaſmo 2. N. æquantur 10. vnde facta diuiſione, prodit 5. valor vnius numeri. Quod ſi 2. C. æquentur 18. N. facto hypobibaſmo, 2. Q. æquantur 18. vnde diuidendo 18. per 2. fit 9. valor vnius quadrati, & extracta radice fit 3. valor Numeri. Et ſic de aliis. Huius regulæ fundamentum totum eſt Regula aurea proportionum, ſeu trium, in qua tertius terminus eſt vnitas, vnde ſola diuiſione opus eſt. Nam verbi gratia in vltimo exemplo, dico per regulam trium, ſi 2. Q. æquantur 18. cui numero æquatur 1. Q? vnde patet diuiſo 18. per 2. quotientem 9. eſſe valorem Quadrati. De compoſitis regulis agemus ad propoſitionem 33. libri huius, vbi earum fundamentum tangit Diophantus. Nam piget diutius immorari in re facili, & vulgo etiam Logiſtarum notiſſima.

QVÆSTIO I.

PROPOSITVM numerum in duos numeros partiri, quorum datum ſit interuallum. Eſto datus numerus 100. interuallum verò 40. oportet inuenire numeros. Statuatur minor 1. N. Maior ergo erit 1. N. & 40. vnitates. Igitur vterque ſimul erit 2. N. + 40. Dabantur autem eſſe 100. Proinde vnitates 100. æquales ſunt 2. N. +40. Aufero ſimilia à ſimilibus, nimirum aufero 40. vnitates, & à 100. & à 2. N. +40. relinquuntur 2. N. æquales vnitatibus 60. Ergo alter numerorum eſt 30. Ad poſitiones. Erit minor quidem vnitatum 30. maior verò vnitatum 70. & demonſtratio eſt manifeſta.

ΤΟΝ ὑποκείμενον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ ρ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες τεσσαράκοντα, δεῖσαι εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἐνὸς, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμὸς ἑνὸς μονάδων μ̄ συναμφότεροι ἄρα γίνονται ἀριθμοὶ δύο, μονάδες μ̄. δέδονται δὲ μονάδες ρ̄. μονάδες ἄρα ρ̄. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσὶ μονάσι μ̄, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια ἀφῃρῆσθω ἀπὸ μὲν ρ̄ μονάδες μ̄, καὶ ἀπὸ δύο ἀριθμῶν καὶ τῶν μ̄ μονάδων ὁμοίως μονάδες μ̄. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσιν ξ̄. ἑκατέρῳ ἄρα γίνεται ἀριθμὸς μονάδων λ̄. ἐπὶ τὰς ὑποθέσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων τριάκοντα. ὁ δὲ μείζων μονάδων ō. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, & nihil continet quod lectorem morari debeat. Verba autem illa ἐπὶ ταῖς ὑποστάσεσι, quæ longa periphrasi vertit Xilander, & aliquando etiam perperam, vt suo loco monebimus, ego passim interpretatus sum, Ad Positiones: vel etiam retento Græco vocabulo. Ad Hypostases. Semper enim inuento valore numeri, propositionem his verbis absoluit Diophantus, quia videlicet vt propositæ quæstionis habeatur perfecta solutio, oportet valorem numeri ad positiones applicare, vt hoc loco, Cum inuenerimus valorem Numeri esse 30. quia Minor pars propositi numeri posita erat 1. N. erit ea 30. Maior verò quæ posita erat 1. N. + 40. erit vtique 70. & sic numerus 100. diuisus est in duas partes 30. & 70. quarum interuallum 40. vt requirebatur. Poterant etiam positiones aliter institui hac arte. Ponatur maior pars 1. N. erit ergo minor 1. N. −40. harum aggregatum est 2 N.−40. quod æquari debet numero 100. Quare addendo vtrimque 40. fiunt 2. N. æquales 140. vnde fit 1 N. 70. Ad hypostases. Erit maior pars 70. Minor 30. vt priùs. Ex vtraque autem operatione elicitur huiusmodi Canon.

Dato numero diuidendo, adde vel adime datum interuallum, semissis summa majorem partem; semissis residui, minorem exhibebit.

Qui Canon à nobis syntheticè demonstratus est propos. 23. lib. 1. porismatum Aliter etiam rursus poterant institui positiones. Statuatur interuallum quæsitarum partium 2. N. Maior verò pars esto 50. + 1 N. minor 50 − 1 N. sic enim vtraque simul conficit 100. & interuallum ipsarum est 2. N. quod æquatur numero 40. Quare fit 1. N. 20. Ad positiones. Maior pars quæ posita erat 50 + 1 N erit vtique 70. Minor verò quæ posita erat 50 − 1 N. erit 30. & hinc rursus elicietur alius Canon.

Semissi dati numeri diuidendi, adde vel adime semissem dati interualli, summa & residuum quæsitas exhibebunt partes.

Porro ex vtroque Canone manifestè colligitur, si solutio in integris contingere debeat, necesse esse vt Numerus diuidendus, & datum interuallum, sint simul pares numeri, vel simul impares, nam si alter sit par, alter impar; tam eorum summa, quam quod restat minorem de maiori subtrahendo, erit impar numerus. Quare nec summæ nec residui semissis in integris haberi poterit. Quod tangere voluit Scholiastes. Denique moneo eodem artificio datum quemlibet numerum diuidi in quotlibet partes, quarum interualla data sint. Verbi gratia. Numerus 100. diuidendus sit in tres partes, ita vt mediæ suprà minimam excessus sit 20. maximæ supra mediam excessus sit 24. Ponatur minima 1 N. erit ergo media 1 N + 20. maxima verò 1. N. + 44. Harum summa est 3 N. + 64. æqualis 100. Quare auferendo vtrimque 64. remanent 3 N. æquales 36. & fit 1 N. 12. Ad positiones. Erit minima pars 12. Media 32. Maxima 56. Hinc quoque si placet eliciemus hunc Canonem.

Aufer à numero diuidendo summam interuallorum cuiuslibet partis supra minimam, residuum partire in numerum multitudinis partium, orietur minima pars.

Vnde constat, vt quæstio sit possibilis, summam interuallorum cuiuslibet partis suprà minimam, minorem esse debere numero diuidendo. Cæterùm duobus alijs modis institui possunt positiones, pro vt media vel maxima pars statuetur 1 N. & hinc rursus formari alij Canones, quæ omnia industriæ tuæ relinquo.

QVÆSTIO II.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. δεδόσθω ὁ ἃ ξ. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τριπλασίονι. τεταχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ὁ α̅. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ἀριθμὸς τριπλάσιος ὢν τοῦ ἐλάσσονος. διὸ λοιπὸν τοὺς δύο ἴσους εἶναι μονάσιν ξ. ἀλλ' οἱ δύο συνπεύντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες. ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ἴσοι μονάσιν ξ. ὁ ἄρα ἀριθμὸς ἄρα μονάδων ιε̅. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μονάδων ι̅ε̅. ὁ δὲ μείζων μ̅ε̅.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in ratione data. Constitutum sit numerum 60. partiri in duos numeros in ratione tripla. Statuatur minor 1. N. igitur maior erit 3. N. & est maior minoris triplus. Superest vt ambo simul æquentur vnitatibus 60. sed ambo compositi sunt 4 N. Proinde 4 N. æquales sunt vnitatibus 60. est ergo 1. N. vnitatum 15. Quamobrem minor est 15. maior autem 45.

IN QVAESTIONEM II.

ALITER etiam institui possunt positiones. Statuatur maior 1. N. Ergo minor $\frac{1}{3}$ N. horum summa 1 $\frac{1}{3}$ N. æqualis est 60. & fit 1. N. 45. Tantus ergo est major, minor verò 15. vt prius. Ex vtraque operatione formatur hic Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum. Quotiens diuiſus ſigillatim in ſumptos numeros, exhibebit quæſitas dati numeri partes.

Minimos numeros ſumendos eſſe ait Xilander. Sed neceſſe non eſt, niſi facilitatis gratia, quia minores numeri commodius tractantur.

Poteſt & hæc quæſtio extendi ad diuiſionem dati numeri in quotlibet partes, datas rationes ſeruantes, eritque eadem prorſus operatio, & idem Canon, vt ſuperuacaneum ſit id exemplis illuſtrare.

QVÆSTIO III.

PROPOSITVM numerum in duos partiri in data ratione, & data differentia. Conſtitutum ſit numerum 80. in duos partiri, ita vt maior minoris triplus ſit, & adhuc 4. vnitates ſuperaddat. Statuatur minor 1 N. erit igitur maior 3 N. +4. & ſic maior minoris triplus eſt, & adhuc quatuor vnitates ſuperaddit. Reſtat vt ambo ſimul æquentur vnitatibus 80. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 4 N. +4. Igitur 4 N.+4. æquales ſunt vnitatibus 80. Aufero ſimilia à ſimilibus. Relinquuntur ergo vnitates 76. æquales 4. N. & fit 1 N.19. Ad poſitiones. Erit igitur minor numerus 19. Maior autem 61. ad triplum minoris adiectis 4. quæ de 80. ſubduxeram, vt triplorum numerorum inuenirem quantitatem. Poſtea verò eadem 4. adiicio maiori, vtriuſque quantitate cognita.

ΤΟΝ ὁπταχθέντα ἀριθμὸν διιλεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν. ὁπτετάχθω ϟ̄ διῃρεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ἵνα ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ζ̄πλασίων ᾖ, καὶ ἔτι μονάσι τέτρασιν ὑπερέχῃ. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἰνός. ὁ μείζων ἄρα ἀριθμοὶ τρεῖς καὶ μονάδες τέσσαρες. καὶ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ὢν τριπλασίων, ἔτι ϵ̄ μονάσι τέτρασιν ὑπερέχει. λοιπὸν τοὺς δύο θέλω ἴσους εἶναι μονάσιν π̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες, ἀριθμοί εἰσι τέσσαρες ϵ̄ μονάδες δ̄, ἀριθμοὶ ἄρα τέσσαρες ϵ̄ μονάδες δ̄, ἴσοι μονάσιν π̄, καὶ ἀφαιρῶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπαὶ ἄρα μονάδες οϛ̄ ἴσαι ἀριθμοῖς τέσσαρσι, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ̄. ὁπτας ὑποστάσεις. ἴσαι ἄρα ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς μ̄ ιθ̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ξᾱ. προστιθεμένων γὰρ δ̄ μ̄, ὧν ἀφεῖλον ἀπὸ τ̄ π̄ μ̄. ἀφεῖλον γὰρ ὥστε εὑρεῖν πόσων μονάδων ἴσαι ἕκαστος ἀριθμός. ὕστερον δὲ τῷ μείζονι ἀριθμῷ προστιθέντας δ̄ μ̄. μετὰ τὸ γνῶναι πόσων ἕκαστος.

IN QVAESTIONEM III.

IN Græco, vbi ſcriptum erat ἐν λόγῳ ϵ̄ ὑπεροχῇ τῆς δοθείσης reposui, τοῖς δοθεῖσιν, flagitante ſententia. Cæterum hic etiam aliter inſtitui poteſt operatio, ſi ponatur Maior 1 N. vnde auferendo 4. remanet 1 N.−4. triplum minoris, Minor ergo eſt ¼ N.−1 ¼ vtriuſque ſumma fit 1 ¼ N −1 ½ æqualis 80. & defectum vtrimque adiiciendo 1 ½ N. æquatur 81. ¼ Quare fit 1 N. 61. maior numerus. Minor verò 19. vt prius.

Verùm ex operatione Diophanti formabitur iſte Canon.

Sume duos numeros in data ratione, & per illorum ſummam diuide datum numerum date interuallo multatum; quotientem ſi ducas in minorem ſumptorum, fiet minor quæſitorum.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros qui & datam rationem, & datum ſeruent interuallum. Mandatum ſit maiorem minoris eſſe quincuplum, interuallum autem ipſorum eſſe vnitates 20. ſtatuatur minor 1 N. Maior ergo erit 5 N. Supereſt 5 N. excedere 1 N. vnitatibus 20. At horum interuallum eſt 4 N. hoc igitur æquale eſt vnitatibus 20. & fit 1 N. 5.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ὅπως δοθῇ. ὁπτετάχθω δὴ ϟ̄ μείζονα τοῦ ἐλάσσονος εἶναι πενταπλασίονα, τὴν δὲ ὑπεροχὴν αὐτοῖς ποιεῖν μονάδας κ̄. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ἰνός, ὁ ἄρα μείζων ἴσος ἀριθμῷ ϵ̄. λοιπὸν θέλω ἀριθμοὺς ϵ̄ ὑπερέχειν ἀριθμῷ ἰνὸς μονάδας κ̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἐστὶν ἀριθμοὶ δ̄. τοῦτο ἴσα μονάσιν κ̄. [καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ϵ̄] ἴσαι ὁ

ἐλάσσων ἀριθμὸς μ̄ ϊ̄. ὁ δὲ μείζων μονάδων κε̄. καὶ μέρει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονος ὡς πενταπλασίων, ἡ δὲ ὑπεροχὴ γίνεται μονάδων χ̄.

Eritque minor numerus vnitatum 5. Maior autem vnitatum 25. ita maiore minoris quincuplo existente, interuallum est 20.

IN QVAESTIONEM IV.

QVADRVPLICITER institui potest operatio. Primò vt habetur apud Diophantum. Secundò sic. Ponatur Maior 1 N. ergo minor $\frac{1}{5}$ N. Horum interuallum $\frac{4}{5}$ N. æquatur 20. & fit 1 N. 25. maior numerus. Ergo minor 5. vt prius. Ex vtraque autem harum operationum iste Canon elicitur.

Sume duos numeros in ratione data, & per horum interuallum diuide datum interuallum, quotiens ductus in sumptos numeros, quæsitos exhibebit.

Tertiò sic operabere. Esto minor 1 N. ergo maior 1 N. + 20. qui cùm sit minoris quincuplus, erunt 5 N. æquales 1 N. + 20. & tandem 4 N. æquantur 20. vel 1 N. æquatur $\frac{1}{4}$ N. + 4. & tandem $\frac{3}{4}$ N. æquantur 4. & vtroque modo fit 1. N. 5. minor numerus. vnde maior est 25. vt prius.

Quartò, esto maior 1 N. ergo minor 1 N. − 20. qui cum sit quinta pars maioris, fiet $\frac{1}{5}$ N. æqualis 1 N. − 20. vel 1 N. æqualis 5. N. − 100. & vtraque æquatione resoluta, fit 1 N. 25. maior numerus, vnde minor est 5. vt prius. Hinc etiam alius Canon elici posset. Quod tibi considerandum relinquo.

QVÆSTIO V.

ΤΟΝ ὁπταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπερ ἑκατέρου τῶν δοθέντων μὴ τὰ αὐτὰ μέρη συντεθέντα ποιεῖ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. δεῖ δὴ τὸν διελόμενον δεδόσθαι ὥστε εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν γενομένων δύο ἀριθμῶν ἴσα τοῖς ἐξ ἀρχῆς ὁπταχθέντος λειφθῇ τὸ δοθέντα μὴ ἐκ τῶν αὐτὰ μέρη. ὁπτάχθω δὴ ὁ ρ̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπερ τὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ὅλῃ τὸ αὐτὸ συντεθέντα ποιεῖ μ̄ λ̄. τάσσω τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσαι ς̄ ε̄. τὸ ἄρα τοῦ πρώτου ξέτον ἔσαι μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἔσαι μονάδων ϛ̄. λείψει ς̄ τριάδι. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντιθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄, ἀλλ' οἱ δύο συντιθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δύο. καὶ μονάδας ϛ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἄρα μονάδες δέκα ἴσαι ἀριθμοῖς δυσίν. ὁ ς̄ ἄρα ἴσαι μονάδων ε̄. δηλονότι τας ὑποτάσεις. ἔταξα τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον ἀριθμοῦ ἑνός, ἴσαι μονάδων ε̄. αὐτὸς ἄρα μονάδων κε̄. τὸ δὲ τοῦ πρώτου τρίτον μονάδων λ̄ λείψει ἀριθμοῦ ἑνὸς ἴσαι μονάδων κε̄. αὐτὸς ἄρα ἴσαι μονάδων οε̄. καὶ μέρει τὸ τοῦ πρώτου τρίτον, καὶ τὸ τοῦ δευτέρου πέμπτον μονάδες λ̄. ἅπερ κοινῇ συντεθέντα ποιοῦσι τὸν ὁπταχθέντα ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt horum vtriusque, non tamen eædem, datæ partes si coniungantur, datum conficiant numerum. Oportet autem talem hunc dari qui sit in medio duorum numerorum qui fiunt, si numeri ab initio propositi præscriptæ partes accipiantur. Imperatum sit partiri 100. in duos numeros, vt primi tertia pars, & secundi quinta pars si coniungantur, conficiant 30. Statuam secundi quintam partem 1 N. ipse igitur erit vnitatum 30 − 3 N. atque adeo ipse primus fiet vnitatum 90 − 3 N. Reliquum est vtrumque simul conficere vnitates 100. At ambo iuncti conficiunt 2 N. + 90. Hæc igitur æqualia sunt vnitatibus 100. Aufero similia à similibus. Restant igitur vnitates 10. æquales 2 N. ergo fit 1 N. 5. Ad positiones. Statueram secundi quintam partem 1 N. erit igitur hæc vnitates 5. atque ideo ipse secundus 25. At primi triens erat 30 − 1 N. est igitur 25. atque ipse primus 75. Et primi quidem tertia, secundi verò quinta pars simul additæ conficiunt numerum 30. provt imperatum erat.

IN QVAESTIONEM V.

HIc duas veluti conditiones apponit Diophantus. Prima eſt non ſumendas eſſe eaſdem partes vtriuſque ſegmenti. Quod neceſſarium eſt, non vt quæſtio ſit poſſibilis, ſed vt ſit alicuius momenti. Nam ſi eædem partes vtriuſque ſegmenti petantur, hoc idem erit atque diuidendi numeri partem eandem ſumere. Vt ſi poſtuletur duo ſegmenta de 100. fieri, vt vtriuſque quinta pars numerum certum conficiat, patet non alium eſſe poſſe numerum illum quam 20. qui eſt quinta pars ipſius 100. quia ſcilicet idem eſt ſumere quintam partem totius numeri, atque ſumere quintam partem ſingulorum ſegmentorum illius. Itaque in huiuſmodi caſu, datus numerus quem debent conficere præſcriptæ partes quæſitorum ſegmentorum, ſemper idem erit, nimirum eadem pars totius diuidendi numeri vt dictum eſt. At ſegmenta ipſa duo quilibet numeri in quos ſecabitur diuidendus numerus, & ſic infinitas ſolutiones recipiet quæſtio; & abſque vllo negotio ſecando propoſitum numerum in duos quoslibet, ſatisfactum erit propoſito. Secunda conditio prorſus neceſſaria, eſt, Numerum quem conficere debent datæ partes quæſitorum ſegmentorum debere eſſe in medio partium earundem propoſiti numeri. Quod ne ſola experientia cum Xilandro cognoſcamus, hoc argumento probabimus. Sit A. propoſitus numerus ſecandus in duos, vt vnius pars ab B. denominata, & alterius pars à C denominata, ſi coniungantur, fiat D. ſitque B. maior quàm C. & ipſius A. partes eædem ſint E. F. dico D. neceſſariò cadere in E. & F. ſeu eſſe minorem quidem ipſo E. maiorem verò ipſo F. Quia enim vt dictum eſt ſuprà, ſi vtriuſque ſegmenti ex A. ſumeretur eadem pars B. eſſet partium ſumma æqualis ipſi E. patet. ſi vnius ſegmenti ſumatur pars B. alterius verò pars minor, puta C ſummam partium nimirum D. fore minorem ipſo E. Rurſus ſi vtriuſque ſegmenti ſumatur eadem pars C, erit ſumma partium æqualis F. Igitur ſi vnius quidem ſegmenti ſumatur pars C, altérius verò maior pars, puta B. erit vtique ſumma partium D. maior quàm F. Quare conſtat propoſitum. In Græco autem vbi legebatur, ἑαυτῶ δὲ ἐξ ἀρχῆς ὁπταχ θέντος ληφθῆ τὸ δοθέν τε καὶ τὰ μέρη, legendum cenſui, ἐαν τῶ ἐξ ἀρχῆς &c. μὴ τὰ αὐτὰ μέρη.

E 33 1/3 F 20.
A 100.
B 1/3 C 1/3
D 30.

Porro quadruplex inſtitui poteſt operatio, vt benè monet Xilander.

Prima eſt quæ habetur in textu Diophanti, ponendo 1/3 ſecundi ſegmenti 1. N.

Secunda fiet ſi ponatur triens primi ſegmenti 1 N. tunc enim erit ipſum primum ſegmentum 3 N. at ſecundi quintans erit 30−1 N. atque adeo ipſe ſecundus fiet 150 − 5 N. vnde vtrumque ſegmentum faciet 150 − 2 N. æqualia 100. Additòque vtrimque defectu, & auferendo ſimilia à ſimilibus 2. N. æquantur 50. & fit 1 N. 25. primi triens. Reliqua patent.

Tertio, Ponatur primum ſegmentum 1 N. erit ſecundum 100 − 1 N. primi triens erit 1/3 N. ſecundi quintans 20 − 1/5 N. quorum ſumma 20 + 2/15 N. æquatur 30. & tandem 1/15 N. æquantur 10. fitque 1 N. 75. primum ſegmentum, ſecundum 25.

Quarto ponatur ſecundum ſegmentum 1 N. erit primum 100 − 1. N. ſecundi quintans fiet 1/5 N. Primi verò triens 33 1/3 − 1/15 N. quorum ſumma 33 1/3 − 2/15 N. æquatur 30. & tandem 1/15 N. æquatur 3 1/3 & fit 1. N. 25. ſecundum ſegmentum, primum autem eſt 75. vt prius. Et ex duabus operationibus vltimis quidquid dicat Xilander, Canon fiet non adeo perplexus.

Propoſiti numeri ſume partes ſimiles poſtulatis partibus, minorem auſer à dato numero quem conficere debent quæſita ſegmentorum partes, à maiori auſer datum numerum, reſidua ſigillatim diuide per internallum fractionum exprimentium partes poſtulatas, orientur quæſita ſegmenta.

Quomodo autem ſolui poſſit quæſtio ſi Propoſitus numerus in plures ſecandus proponatur, ita vt ſegmentorum poſtulatæ partes datum conficiant numerum, non quilibet de vulgo logiſta doceat. Cùm enim huiuſmodi quæſtionum genus infinitas, imo infinities infinitas ſæpe recipiat ſolutiones, totum artificium in ſegmentorum determinatione conſiſtit, quod tradere non pigebit, ſi prius tyrones monuero ne operam ludant in re fortè captum illorum adhuc ſuperante, ſed huius problematis omiſſa tractatione ad vlteriora progrediantur, donec in Logiſtica exercitatiores ardua quæque facilè comprehendant.

Sit igitur propoſitus numerus 100. diuidendus in quatuor numeros, ita vt primi 1/3 ſecundi 1/5, tertij 1/4, quarti 1/7, hæc omnia ſimul efficiant 27. Oportet autem præſcriptum numerum (puta hic 27.) cadere inter propoſiti ad diuidendum numeri maximam & minimam partium ſimilium illis quæ poſtulantur; hoc eſt quia maxima pars eſt 1/3 minima 1/7 ſumentes 1/3 & 1/7 de 100. nempe 50. & 20. Oportuit 27. maiorem fuiſſe quàm 20. minorem quàm 50. cuius rei ratio eadem eſt quæ ſupra in conditionis explicatione allata eſt. Itaque ponatur primum ſegmentum 1 N. igitur reliqua ſimul erunt 100. − 1 N. & cùm primi ſegmenti 1/3 ſit 1/3 N. erunt 1/3 ſecundi, 1/4 tertij, & 1/7 quarti ſimul 27 − 1/3 N. Itaque iam oportet diuidere 100 − 1 N. in tres numeros, ita vt primi 1/3 ſecundi 1/5 tertij 1/4 conficiant 27. − 1/3 N. Quare ob appoſitam conditionem oportet 27 − 1/3 N. cadere inter 1/3 & 1/7 de 100 − 1 N. hoc eſt oportet

27 − ½ N. esse minus quàm 33. ½ − ⅓ N. & maius quam 20 − ⅓ N. & quidē 27 − ⅓ N. esse minus quàm 33. ½ − ⅓ N. luce clarius est. Curandum ergo tantùm vt sit maius quàm 20 − ⅓ N. Hoc autem si ponatur addendo vtrimque ⅓ N. opportebit 27. esse maius quàm 20 + 1/15 N. & ablatis vtrimque 20. oportebit 7. maius esse quàm 1/15 N. Quare cùm diuidendo 7. per 1/15. fiat quotiens 23 ½ Determinatum ergo est de primo segmento, nam statui potest quilibet numerus infrà 23½ Ponatur ergo 10. erunt itaque reliqua simul 90. & cùm auferendo 5. semissem ipsius 10. de 27. supersint 22. iam diuidendus erit 90. in tres numeros, ita vt primi ½ secundi ⅓ tertij ¼ conficiant 22. statuatur primus seu secundum segmentum ipsius 100. 1 N. erunt duo reliqui 90 − 1 N. & cùm primi ½ sit ½ N. patet ⅓ secundi & ¼ tertij conficere 22 − ½ N. Hoc autem vt possibile sit, oportet 22 − ½ N. cadere inter ¼ & ⅓ de 90 − 1 N. hoc est oportet 22 − ½ N. esse minus quàm 22 ½ − ¼ N. & maius quam 18 − ⅓ N. & primum quidem manifestum est secundum. Autem sic curabimus. Quia 22 − ½ N. est maior quàm 18 − ⅓ N. addito vtrimque ⅓ N. manebit 22 maior quàm 18 + 1/12 N. & ablatis vtrinque 18. manent 4. maiora quàm 1/12 N. Quare cùm diuidendo 4. per 1/12 fiat quotiens 30. patet valorem numeri minorem esse debere quàm 30. Itaque posito primo segmento 10. determinatum est etiam de secundo, nam debet esse infrà 30. Ponatur ergo quilibet numerus infrà 30. puta 24. Cùm ergo auferendo 10. & 24. de 100. supersint 66. erit hæc summa tertij & quarti. Cùm verò semissis primi sit 5. & triens secundi 8. sublatis his de 27. remanet 14. pro quadrante tertij & quintante quarti. Diuidatur ergo per propositionem Diophanti numerus 66. in duos, vt vnius quadrans cum alterius quintante conficiat 14. inuenies alterum 16. alterum 50. Quamobrem soluta est quæstio, & sunt numeri 100. quatuor segmenta 10. 24. 16. 50. quæ satisfaciunt postulatis. Manifestum autem est quæstionem infinities infinitas recipere solutiones. Nam vt probatum est, potest primum segmentum poni quilibet numerus infrà 23. ½ hi autem ob fractiones infiniti sunt. Deinde sumpto vno ex infinitis illis numeris puta 10. primo segmento manente 10. potest secundum segmentum infinities variari, cùm vt ostensum est poni possit quilibet numerus infrà 30. sed ista sufficiant.

QVÆSTIO VI.

ΤΟΝ ὑπεκχεῖνθα ἀριθμὸν διῃρεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ ἀφ' ἑνὸς μέρος δοθὲν τῷ ἑτέρῳ μέρει δοθέντος ὑπερέχει δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ δὴ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐλάσσονα εἶναι τοῦ γινομένου ἀριθμοῦ, ἐαν' ᾖ ἐξ ἀρχῆς ὑπεκχεόμενος λειφθῇ τὸ δοθὲν μέρος ἐν ᾧ ἔστιν ἡ ὑπεροχή. ὑπεκκέχθω δὴ ὁ ρ διῃρεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ ἀφ' ἑνὸς τέταρτον τοῦ τῆς δευτέρας ἕκτου ὑπερέχει μ̄. κ̄· τάσσω τὸ τῆς δευτέρας ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἴσαι ἀριθμῷ ς̄ τὸ ἄρα τοῦ πρώτου τέταρτον ἴσαι ἀριθμοῖς ἰὸς, καὶ μ̄. κ̄. αὐτὸς ἄρα ἴσαι ἀριθμῷ τεσσάρων καὶ μονάδων π̄. λοιπὸν θέλω τοὺς δύο συντεθέντας ποιεῖν μονάδας ρ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς δέκα, μονάδας π̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιπὸν ἀριθμοὶ δέκα ἴσοι μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ς̄ μ̄ ϛ̄. δεῖ δὲ τὰς ὑποστάσεις. τάττω τὸ τῆς δευτέρας ἕκτον ἀριθμοῦ ἑνός. αὐτὸς ἄρα ἴσαι μονάδων δώδεκα. τὸ δὴ τοῦ πρώτου τέταρτον, ἀριθμοῦ ἑνὸς καὶ μονάδων κ̄, ἴσαι μονάδων κβ̄. αὐτὸς ἄρα ἴσαι μ̄. π̄β̄. καὶ μέμει τὸ τοῦ πρώτου τέταρτον τῷ τῆς δευτέρας ἕκτῳ ὑπερέχον μονάδας κ̄. οἵτινες λοιπὸν συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ὑποκχεόμενον ἀριθμόν.

PROPOSITVM numerum partiri in duos numeros, vt prioris data pars, posterioris datam partem superet dato numero. Hunc autem minorem esse oportet, eo qui fit si propositi ab initio numeri pars illa capiatur, quæ alteram excedit. Constitutum sit ergo partiri 100. in duos numeros, vt prioris quadrans, posterioris sextantem 20. vnitatibus superet. Pono sextantem posterioris 1. N. ipse ergo erit 6. N. Quadrans autem prioris erit 1. N. + 20. Ipse itaque 4. N. + 80. Cæterùm volo duorum summam esse 100. sed vtriusque summa est 10. N. + 80. hæc igitur æquantur vnitatibus 100. Aufero similia à similibus, relinquuntur 10. N. æquales 20. & fit 1. N. vnitatum 2. Ad hypostases. Statueram sextantem posterioris 1. N. Ipse ergo erit 12. At prioris quadrans fuit 1. N. + 20. erit igitur 22. & ipse prior 88. manetque hoc, huius quadrantem sextante illius majorem esse 20. vnitatibus. Ipsi autem coniuncti numeri, propositum restituunt numerum.

IN QVAESTIONEM VI.

CONDITIONIS appositæ ratio in promptu est. Impossibile est enim vt pars aliqua minoris numeri, sit æqualis vel maior eadem parte maioris numeri. Quare cùm diuidendus est 100. in duos hujusmodi numeros, vt prioris quadrans superet sextantem posterioris numero 20. Impossibile est 20. non esse minorem quadrante de 100. Cùm 20. sit minor quadrante vnius segmenti de 100.

Cæterum vt bene monet Xilander sex diuersis operationibus solui poterat quæstio.

Prima est quæ habetur in textu Diophanti, ponendo scilicet sextantem posterioris segmenti 1 N.

Secunda huic respondens est. Si ponatur prioris quadrans 1 N. ipse prior 4 N. vnde fit sextans posterioris 1 N. − 20. ipse posterior 6 N. − 120. qui priori additus summam facit 10 N. − 120. æqualem 100. vnde fit 1. N. 22. prioris quadrans, suntque ipsi numeri vt prius 88. & 12.

Tertia operatio est. Pono primum 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. − 20. est sextans secundi, ipse secundus 1 $\frac{1}{2}$ N. − 120. qui primo additus facit 2 $\frac{1}{2}$ N. − 120. æqualia 100. & fit 1 N. 88. primus scilicet.

Quarta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo $\frac{1}{4}$ N. + 20. est quadrans primi. ipse igitur primus est $\frac{1}{2}$ + N. 80, qui secundo additus facit 1 $\frac{1}{2}$ N. + 80. æqualia 100. & fit 1 N. 12. secundus numerus.

Quinta operatio est. Pono primum 1 N. ergo secundus est 100 − 1 N. Primi quadrans $\frac{1}{4}$ N. secundi sextans 16 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. cui addendo 20. fiunt 36 $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{6}$ N. æqualia $\frac{1}{4}$ N. & tandem $\frac{1}{12}$ N. æquantur 36 $\frac{2}{3}$ vnde fit 1 N. 88. vt prius.

Sexta huic respondens est. Pono secundum 1 N. ergo primus est 100. − 1 N. secundi sextans est $\frac{1}{6}$ N. primi quadrans 25 − $\frac{1}{4}$ N. Quare $\frac{1}{6}$ N. + 20. æquantur 25 − $\frac{1}{4}$ N. & tandem 5. æquantur $\frac{1}{12}$ N. vnde fit 1 N. 12. vt suprà.

Ex duabus autem vltimis elicietur huiusmodi Canon.

Propositi numeri sume partes similes postulatis, & minoris adijce datum interuallum, aufer idem interuallum à maiore, summam & residuum partire seorsim per aggregatum fractionum exprimentium partes postulatas, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO VII.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, vt residui eam seruent quæ dabitur rationem. Iubeamur ab eodem numero auferre 100. & 20. vt maius residuum, minoris sit triplum. Statuatur quæsitus numerus 1 N. ab eo si auferam 100. residuum est 1 N. − 100. & si ab eodem auferam 20. relinquitur 1 N. − 20. Oportet autem residuum maius minoris esse triplum; Ter igitur minus residuum æquatur maiori. Atqui ter minus residuum, fit 3 N. − 300. Hoc ergo æquatur 1 N. − 20. Defectus communis vtrinque addatur, fiunt 3 N. æquales 1 N. + 280. Auferantur a similibus similia; relinquuntur 2 N. æquales vnitatibus 280. & fit 1 N. vnitatum 140. Ad positiones. Numerum quæsitum statueram 1 N. Erit igitur vnitatum 140. & si ab eo abstulero 100. supersunt 40. si autem abstulero 20. restant 120. Et maius residuum minoris est triplum.

ΑΠΟ τῆ αὐτῆ ἀριθμῆ ἀφῆειν δύο δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ποιεῖν τὰς λοιπὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ ἀπὸ τῆ αὐτῆ ἀριθμῆ ἀφῆειν ϟ ρ̄, καὶ τὸν κ̄. ϵ̄ ποιεῖν τὰ μείζονα τῆ ἐλαττόνων τριπλάσια. τετάχθω ὁ ζητούμενος, ἀριθμῆ ἑνός. καὶ μὴ ἀπὸ τούτου ἀφέλω τὸν ρ̄ λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς, λείψει μονάδων ρ̄ κὰν ἀπὸ τῆ αὐτῆ ἀφέλω ϟ κ̄. λοιπὸς, ἀριθμὸς εἷς λείψει μονάδων κ̄. καὶ δήσει τὰ μείζονα τῆ ἐλασσόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐσὶ τοῖς μείζοσι. τρὶς γὰρ ἄρα (τὰ ἐλάσσονα γίνετ) ἀριθμοὶ γ̄. λείψει μ̄ τ̄ ταῦτα ἴσα ἀριθμῶ ἑνὶ λείψει μονάδων κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις. γίνονται ἀριθμοὶ γ̄ ἴσοι ϵ̄ ἑνὶ ϵ̄ μονάδι σπ̄. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λοιποὶ ϵ̄ δύο ἴσοι μονάδι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ρμ̄. ὅπερ ἐδεῖ δεῖξαι. ὑποτάσεις. ἔταξα ϟ ζητούμενον ἀριθμὸν ϵ̄ ἑνός. ἔσται ἄρα μ̄ ρμ̄. κὰν ἀφῶ ἀπὸ τούτου ἀφέλω ϟ ρ̄ λοιπαὶ μονάδες μ̄. ἐὰν δὲ ϟ κ̄ λοιπαὶ μονάδες ρ̄. ϵ̄ λείψει τὰ μείζονα τῆ ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex ea elicitur huiusmodi Canon.

Ducito maiorem datorum numerorum in denominatorem rationis postulatæ, à producto aufer minorem. Residuum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam cum Francisco Vieta institui poterat operatio. Ponatur 1 N. defectus quo 100. deficit à quæsito numero. Erit ergo quæsitus numerus 1 N. + 100. Quia verò defectus quo 20. deficit ab eodem quæsito numero, triplus est defectus quo 100. ab eodem deficit, erit ipsius 20. defectus 3 N. adeo quæsitus numerus rursus æquabitur 3 N. + 20. Quamobrem æquales sunt 1 N. + 100. & 3 N. + 20. vnde fit 1 N. 40. & quæsitus numerus est 140. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon, nimirum.

Datorum numerorum internallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur defectus maioris numeri à quæsito numero, quo ei addito, fiet quæsitus numerus.

QVÆSTIO VIII.

DVOBVS datis numeris eundem adiicere numerum, vt compositi ad inuicem datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem minorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Iubeamur ad 100. & ad 20. eundem numerum adiicere, vt maius compositum, minoris sit triplum. Ponatur addendus vtrique numero 1 N. is si ad 100. addatur, fiet 1 N. + 100. si verò ad 20. adiiciatur, fiet 1 N. + 20. & oportet compositum maius minoris esse triplum. Ter igitur minus compositum æquabitur maiori. Ter autem minus compositum, fit 3 N. + 60. Hoc ergo æquale est 1 N. + 100. Auferantur similia à similibus, supersunt 2 N. æquales vnitatibus 40. & fit 1 N. vnitatum 20. Ad positiones. Statueram adiiciendum vtrique numero 1 N. erit ergo vnitatum 20. & si ad 100. addatur fiunt vnitates 120. At si ad 20. adiiciatur, fiunt vnitates 40. & est maius compositum minoris triplum.

Δυσὶ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τοὺς γενομένους πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δοθέντα; δεῖ δὲ τὸν δοθέντα λόγον ἐλάττονα εἶναι τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. ὑποκείσθω δὴ τῷ μ καὶ τῷ ν προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῆς ἐλαττόνων τριπλάσια. τυγχάνω ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς̄ ἴσος. καὶ μὲν τῷ μ προστεθῇ, ἔσται ἀριθμὸς ἴσος, μονάδων ρ, ἐὰν δὲ τῷ ν, γίνεται ἀριθμὸς ἴσος, μ̄ κ̄. καὶ δεήσει τὰ μείζονα τῆς ἐλαττόνων εἶναι τριπλάσια. τρὶς ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἔσται τοῖς μείζοσι. τρεῖς δὲ τὰ ἐλάττονα γίνεται ἀριθμοὶ τρεῖς μονάδες ξ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι ρ̄. διὸ ὁμοίων ὁμοῖα. λοιποὶ ἀριθμοὶ δύο ἴσοι μονάσι μ̄. ἑκ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κ̄. δῆλον ἐκ τῆς ὑποθέσεως. ἔταξα δὲ προστιθέμενον ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς̄ ἴσος, ἔσαι μονάδων κ̄. καὶ μὲν τῷ μ προστεθῇ, γίνονται μονάδες ρ̄. ἐὰν δὲ τῷ ν, γίνονται μονάδες μ̄. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVAESTIONEM VIII.

CONDITIO apposita nil aliud dicit, quàm quod ostendimus propositione prima libri primi porismatum. Reliqua omnia sunt dilucida, & ex operatione Diophanti formabitur iste Canon.

Aufer à maiore datorum numerorum, productum ex minore in denominatorem rationis postulatæ, residuum diuide per eundem denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

QVÆSTIO IX.

ADATIS duobus numeris auferre eundem numerum, vt residui ad inuicem datam habeant rationem. Opor-

Ἀπὸ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τοὺς λοιποὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δοθέντα. δεῖ δὴ

tet autem datam rationem maiorem esse ea quam habet maior datorum numerorum ad minorem. Imperatum sit à 20. & à 100. auferri eundem numerum, vt maius residuum minoris sit sescuplum. Statuatur numerus ab vtroque numero auferendus 1 N. Et si quidem à 100. auferatur, reliquæ sunt vnitates 100 — 1 N. si autem à 20. detrahatur, restant vnitates 20 — 1 N. Et oportet residuum maius, minoris esse sescuplum. Sexies igitur minus residuum æquatur maiori. Sexies autem minus residuum fit 120 — 6 N. hoc æquale est 100 — 1 N. Adiiciatur communis defectus, & auferantur similia à similibus, relinquuntur 5 N. æquales vnitatibus 20. & fit 1 N. vnitatum 4. Ad Positiones. Statueram auferendum ab vtroque numero 1 N. erit is vnitatum 4. Qui quidem si à 100. auferatur, superfunt vnitates 96. si autem à 20. detrahatur, relinquuntur vnitates 16. Et est residuum maius minoris sescuplum.

τὸ δὶς εἰλημμένον λόγον, μείζονα ἢ τὸν λόγον ὃν ἔχει ὁ μείζων τῶν δοθέντων πρὸς τὸν ἐλάττονα. διατεταχθω δὴ ὅπου τῷ κ. καὶ τῷ ρ ἀφῃρῆσθαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων ἑξαπλάσια. τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμῶν, ἀριθμὸς εἷς, καὶ μὴ ὅπου τῷ ρ ἀφαιρεθῇ, λοιπαὶ μονάδες ρ λείψει ς' ἑνός. ἐὰν δὲ ὅπου τῷ κ. λοιπαὶ μονάδες κ. λείψει ς' ἑνός. καὶ δέησει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ἑξαπλάσια. ἑξάκις ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσιν. ἑξάκις δὲ τὰ ἐλάσσονα ποιεῖ μ' ρ λείψει ς' ε. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ λείψει ς' ἑνός. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ὅπου ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ε ἴσοι μονάσιν κ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ. ὅπου τὰς ὑποσάσεις. ἔταξε τὸν ἀφαιρούμενον ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμῶν, ἀριθμὸν ἕνα, ἴσας μονάδων δ. καὶ μὴ ὅπου τῷ ρ ἀφαιρεθῇ λοιπαὶ μονάδες ιϛ. ἐὰν δὲ ὅπου τῷ κ. λοιπαὶ μονάδες ιε. καὶ μένει τὰ μείζονα τῶν ἐλασσόνων ἑξαπλάσια.

IN QVAESTIONEM IX.

CONDITIONIS hîc appositæ est eadem ratio, quæ suprà. Canon sic formabitur.

Ducito denominatorem rationis in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, residuum diuide per ipsum denominatorem vnitate multatum, orietur quæsitus numerus.

Aliter cum Francisco Vieta licebit operari. Ponamus 1 N. excessum ipsius 20 suprà quæsitum numerum, erit ergo 6 N. excessus ipsius 100. supra eundem. Quare quæsitus numerus erit tam 20 — 1 N. quàm 100 — 6. N. Hæc igitur æquantur inter se. Et fit 1 N. 16. excessus ipsius 20. supra quæsitum numerum, quo ablato remanet 4. quæsitus numerus. Et hinc etiam elicietur alius Canon.

Datorum numerorum internallum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, orietur excessus minoris numeri suprà quæsitum numerum, quo ablato remanet quæsitus numerus.

QVÆSTIO X.

DVORVM datis numeris, eundem numerum minori quidem ex ipsis addere, detrahere autem à maiori, vt compositum ad residuum datam habeat rationem. Imperatum sit ipsi quidem 20. addere, at verò à 100. auferre eundem numerum, vt compositum residui sit quadruplum. Ponatur addendus & adimendus vtrique numero 1 N. & si ad 20. addatur, fiet 1 N. + 20. si verò à 100. detrahatur, fiet 100 — 1 N. & oportet maius minoris esse quadruplum. Quater igitur minus æquabitur maiori. Sed quater minus fit vnitates 400. — 4 N. hoc ergo

ΔΥΟ δοθεῖσι ἀριθμοῖς τῷ μὲν ἐλάσσονι αὐτῶν προσθεῖναι, ὅπου δὲ τοῦ μείζονος ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν γθμούμενον πρὸς τὸν λειπὸν λόγον ἔχειν δεδομένον. διατεταχθω τῷ μὲν κ προσθεῖναι, ὅπου δὲ τῷ ρ ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τετραπλάσια. τετάχθω ὁ προστιθέμενος καὶ ἀφαιρούμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς' ὡς, καὶ μὲν τῷ κ προστεθῇ, γίνεται ς' ὡς μ' κ. ἐὰν δὲ τῷ ρ ἀφαιρεθῇ, γίνεται μ' ρ λείψει ς' ὡς. καὶ δέησει τὰ μείζονα τῶν ἐλαττόνων δὶς τετραπλάσια. τετράκις ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. τετράκις δὲ τὰ ἐλάσσονα γί-

νται μονάδις ῡ λείψει ἀριθμῷ δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἐνὶ μονάσι κ̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, λοιποὶ ἀριθμοὶ ῑ̄. ἴσοι μονάσι πη̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων ος̄. δεῖ δὲ τὰς ὑπεροχὰς. ἔταξα δὲ προσειληφέναι καὶ ἀφῃρῆσθαι ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ς^ν ἵνα. ἔσαι μ̄. ος̄. κἂν μὲν τῷ κ̄. μ̄ ος̄ προστεθῶσι. γίνεται μ̄ ιξ̄, ἐὰν δὲ τῷ ρ̄ ἀφαιρεθῶσι, λειπαὶ μονάδις πδ̄, καὶ μένει τὰ μείζονα τῆς ἐλαττόνων ὄντα τριπλάσια.

æquatur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & auferantur à similibus similia, supersunt 5 N. æquales vnitatibus 380. & fit 1 N. 76. Ad positiones. Statueram addendum & adimendum vtrique numero 1 N. is ergo erit 76. & si ad 20. addantur 76. fiunt 96. si verò à 100. auferantur, supersunt 24. & patet maius minoris esse quadruplum.

IN QVAESTIONEM X.

ADVERTE hic triplicem casum dari posse. Vel enim datis duobus numeris idem tertius quæsitus maiori est adimendus, & addendus minori. Vel contrà est addendus maiori, & adimendus minori. Et ex prima consideratione, rursus duplex casus oritur. Vel enim poscimus rationem collecti ad residuum, vel residui ad collectum, ita vt collectum nunc sit maius extremum proportionis, nunc verò minus.

Primus casus est is, in quem incidit operatio Diophanti, cùm petat auferri eundem numerum à maiori 100. & addi minori 20. vt summa residui sit quadrupla. In quo casu nil refert quæ proportio postuletur, siue nimirum maior proportione datorum numerorum, siue minor; etenim numerus minor 20. quantumlibet augeri potest, & maior 100. quantumlibet minui, vnde quæcumque proportio postuletur, poterit summa esse maius extremum, & residuum minus extremum. Sed in hoc casu hic formabitur Canon.

Ducito denominatorem rationis postulatæ in maiorem datorum numerorum, à producto aufer minorem; & residuum partire per ipsum denominatorem vnitate auctum, orietur quæsitus numerus.

Aliter etiam positiones fieri poterant. Excessus numeri 100. suprà quæsitum, esto 1. N. erit ergo quæsitus 100 − 1 N. & quia supradictus excessus ponitur subquadruplus compositi ex numero 20. & ex quæsito numero, erit compositum illud 4 N. Quare auferendo 20. remanet 4 N. − 20 quæsitus numerus. Proinde 100 − 1 N. æquantur 4 N. − 20. & fit 1 N. 24. excessus ipsius 100. suprà quæsitum numerum, quare detracto 24. de 100. relinquitur quæsitus 76. Hinc rursus fiet hic Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur excessus maioris datorum numerorum, suprà quæsitum; eoque detracto remanebit quæsitus numerus.

Secundus casus est, cùm quæsitus numerus addendus quidem est, vt prius minori datorum, & à maiore detrahendus, sed residuum fit maius extremum proportionis postulatæ. Tunc autem oportet rationem postulatam minorem esse ratione datorum numerorum. Quod sic ostenditur. Sint A. B. dati numeri A. maior, & B. minor: & sit G. quæsitus numerus qui additus ad B. faciat D. detractus ab A. relinquat C. ita vt C. sit maior quàm D. dico rationem A. ad B. maiorem esse ratione C. ad D. Nam ratio A. ad D. maioris inæqualitatis, maior est ratione B. ad D. minoris inæqualitatis, cùm maiorem habeat denominatorem. Igitur & ' permutando ratio A. ad B. maior est ratione C. ad D. Quod erat propositum.

A 100. B 20.
C 96. D 24.
G 4.

27. Quinti.

Hic etiam licet duplicem operationem instituere, & duplicem Canonem formare, nimirum.

Ducito denominatorem rationis postulatæ in minorem datorum numerorum, productum aufer à maiore, & residuum diuide per ipsum denominatorem vnitate auctum, orietur quæsitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, orietur summa quæsiti numeri & minoris datorum, vnde si auferatur minor datorum, remanet quæsitus.

Tertius casus est cùm quæsitus numerus addendus est maiori datorum, & à minore detrahendus, vbi necesse est summam maiorem esse residuo, & oportet postulatam rationem, maiorem esse ratione datorum numerorum. Quod simili prorsus argumento ostendetur, illius quo supra contrarium ostensum est. Sed & duplex instituetur operatio, & duplex Canon formabitur, nimirum.

Ducito denominatorem rationis postulatæ in minorem datorum numerorum, à producto aufer maiorem, & residuum diuide per denominatorem ipsum vnitate auctum, orietur quæsitus numerus. vel.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate auctum, quotiens erit excessus minoris datorum numerorum suprà quæsitum, quo detracto relinquetur quæsitus.

QVÆSTIO XI.

DVos datos numeros, alterum quidem addere, alterum verò detrahere ab eodem numero, vt geniti ad inuicem datam habeant rationem. Conſtitutum ſit ipſum quidem 20. addere, ſed ipſum 100. auferre ab eodem numero, vt maior genitorum, minoris triplus ſit. Eſto quæſitus 1 N. & ſi huic adiiciamus vnitates 20. fit 1 N. + 20. ſi autem ab eodem auferantur vnitates 100. ſupereſt 1 N. — 100. & oportet maiorem minoris eſſe triplum. Ter igitur minor æquatur maiori. Sed minor ter fit 3 N. — 300. Igitur 3 N. — 300. æquantur 1 N. + 20. Communis addatur defectus, & ſimilia à ſimilibus auferantur, ſuperſunt vnitates 320. æquales 2 N. & fit 1 N. 160. Ad poſitiones. Eſt maior vnitatum 180. minor 60. & patet maiorem minoris eſſe triplum.

Δοτο δοθέντας ἀριθμοὺς, ὧν τὸν μὲν προσθλῆαι, τὸν δὲ ἕτερον ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τὰς γενομένας πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν δεδομένον. ὑπιτετάχθω τὸν μὲν κ προσθεῖναι, τὸν δὲ ρ ἀφῃρῆσθαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ποιεῖν τὸν μείζονα τ ἐλαττόνων τριπλάσια ἔσω ὁ ζητούμενος ς· ἐὰν μὲν οὖν τούτῳ προσθῶμεν μ κ, γίνεται ς μ κ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τούτου ἀφαιρεθῇ μ ρ. λοιπὸς ἀριθμὸς ὃς λείψει μ ρ. καὶ ἐπεὶ τὰ μείζονα τ ἐλαττόνων ἐστὶ τριπλάσια, ἓξ ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι, ἀλλὰ ἓξ τὰ ἐλάττονα γίνεται ς μ ἓξ λείψει μ τ. ἀριθμοὶ ἄρα ἓξ λείψει μ τ. ἴσα ἐστὶ ς μ κ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἁφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, μονάδες τε ἄρα ἴσαι ἴσων ἀριθμοῖς δυσὶν, καὶ γίνεται ὁ ς μ ρξ. ὑπὸ τὰς ὑποστάσεις. ἴσαι ἄρα ὁ μὲν μείζων μ ρπ. ὁ δὲ ἐλάττων ξ. καὶ ἐστὶν ὁ μείζονα τῶν ἐλαττόνων τριπλάσια.

IN QVÆSTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis eſt, vnde Canon vniuerſalis elicitur, quamuis eum Xilander ad proportionem multiplicem malè reſtringat.

Multiplica detrahendum per denominatorem rationis, producto adiice addendum, ſummam diuidè per denominatorem ipſum vnitate multatum, orietur quæſitus numerus.

Aliter etiam licet operari. Ponatur defectus ipſius 100. à quæſito numero 1 N. ergo ipſe quæſitus numerus eſt 1 N. + 100. At 3 N. erit ſumma quæſiti numeri & ipſius 20. Quare ablato 20. remanet quæſitus 3 N. — 20. Proinde 1 N. + 100. æquantur 3 N. — 20. & fit 1 N. 60. defectus ipſius 10. à quæſito, quare quæſitus eſt 160. vt prius. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Summam datorum numerorum diuide per denominatorem rationis vnitate multatum, quotiens erit defectus detrahendi numeri a quæſito, quo reſtituto fiet quæſitus.

QVÆSTIO XII.

PROPOSITVM numerum diuidere bis in duos numeros, ita vt vnus è prima diuiſione ad vnum è ſecunda diuiſione datam habeat rationem. At reliquus ex ſecunda diuiſione ad reliquum è prima rationem item habeat datam. Iniunctum ſit nobis numerum 100. diuidere bis in duos numeros, ita vt maior è prima diuiſione, minoris è ſecunda diuiſione ſit duplus; maior verò è ſecunda diuiſione minoris è prima diuiſione ſit triplus. Ponatur minor è ſecunda diuiſione 1 N. Maior igitur è prima diuiſione erit 2 N. Minor itaque è prima diui-

Τον ὁποσονοῦν ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς οὕτως. ὅπως ὁ εἷς ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λειπὸς τῇ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως πρὸς τὸν λειπόντα τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑπιτετάχθω δὴ τὸν ρ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς οὕτως, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ᾖ διπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῇ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως, τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως, ᾖ τριπλασίων. τετάχθω ὁ ἐλάσσων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς μ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης.

διαιρέσεως ἔσαι ἑξῆ δύο. ὁ ἐλάττων ἄρα τῶν ἐκ τῆ πρώτης διαιρέσεως, μονάδων ρ̄. λείψει ἀριθμῷ δύο. ἢ ἐπεὶ δέδεικται αὐτὸ τριπλάσιον ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆ δευτέρας διαιρέσεως, ἔσαι μονάδων τ̄. λείψει ἀριθμῷ ε̄. λοιπὸν ἄρα ἢ τὸς τῆ δευτέρας διαιρέσεως συντιθέντας ποιεῖν μ̄ ρ̄. ἀλλὰ συντιθέντες ποιοῦσι μονάδας τ̄. λείψει ἀριθμῷ ε̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ρ̄ ἢ γίνεται ὁ ς̄ μονάδων μ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα τὸ μείζονα τῶν ἐκ τῆ πρώτης διαιρέσεως ἑξῆ δύο. ἔσαι μονάδων π̄. τὸ δὲ ἐλάσσονα τῆ αὐτῆς διαιρέσεως μονάδων ρ̄. λείψει ἑξῆ δύο. ἔσαι μ̄ κ̄. τὸν δὲ μείζονα τῶν ἐκ τῆ δευτέρας διαιρέσεως μ̄ τ̄. λείψει ἑξῆ ε̄. ἔσαι μ̄ ξ̄ τὸν δὲ ἐλάσσονα τῇ ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως ς̄ ἑνός. ἔσαι μ̄ μ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

sione erit vnitatum 100 — 2 N. & quia huius triplus est maior è secunda diuisione, erit vtique 300 — 6 N. Supereſt igitur vt ambo secundæ diuisionis conjuncti efficiant 100. At coniuncti faciunt 300 — 5 N. Hoc ergo æquatur 100. & fit 1 N. vnitatum 40. Ad positiones. Posueram maiorem è prima diuisione 2 N. erit ergo vnitatum 80. Minorem verò eiusdem diuisionis statueram 100 — 2 N. erit igitur 20. At posueram maiorem è secunda diuisione 300 — 6 N. erit ergo 60. Minor denique è secunda diuisione qui positus fuerat 1 N. erit 40. & euidens est demonstratio.

IN QVAESTIONEM XII.

BENÈ monet Xilander quadruplicem institui posse operationem, eò quod quælibet pars cuiuslibet diuisionis poni potest 1 N. Sed ego præterea ex ipsa Diophanti operatione aio formari posse huiusmodi Canonem.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate multatum, in datum numerum, producta diuide seorsim per numerum qui fit ex mutua denominatorum multiplicatione vnitate multatum, orientur minores partes vtriusque diuisionis. Item.

Ducito sigillatim denominatorem rationis vtriusque vnitate auctum, in datum numerum producta diuide seorsim per eundem qui suprà numerum, orientur partes maiores.

Cæterùm in similibus quæstionibus, si pars vna prioris diuisionis sit maior vna parte posterioris, necessario altera posterioris pars est maior altera prioris, quin etiam & eodem interuallo maior est, vt constat ex prop. quarta libri primi porisin. Quo fundamento qui niti velit, aliter etiam operationem instituet hac arte. Sit minor pars primæ diuisionis 1 N. Ergo maior secendæ erit 3 N. & cum harum partium interuallum sit 2 N. oportet & reliquas eodem distare interuallo, sed quia reliqua primæ diuisionis est dupla reliquæ secundæ, illarum interuallum æquale est ipsi minori parti secundæ diuisionis, quare hæc pars est 2 N. quæ maiori nimirum 3 N. addita efficit 5 N. æquales 100. vnde fit 1 N. 20. minor pars primæ diuisionis, &c.

QVÆSTIO XIII.

ΤΟΝ ὑποκειμένον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὥστε, ὅπως ὁ εἷς τῶν ἐκ τῆ πρώτης διαιρέσεως πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆ δευτέρας διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὁ δὲ λοιπὸς τῶν ἐκ τῆ δευτέρας διαιρέσεως, πρὸς ἕνα τῶν ἐκ τῆς τρίτης διαιρέσεως, λόγον, ἔχῃ δεδομένον, ἔτι ὁ λοιπὸς τῇ ἐκ τῆ τρίτης διαιρέσεως πρὸς τὸν λοιπὸν τῇ ἐκ τῆ πρώτης διαιρέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποκείσθω δὴ τὸ ρ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὥστε, ὅπως ὁ μείζων τῶν ἐκ τῆς πρώτης τῷ ἐλάττονος τῇ ἐκ τῆς δευτέρας ἢ τριπλασίων. ὁ δὲ μείζων τῶν ἐκ τῆς δευτέρας διαιρέσεως τῷ ἐλάττονος τῇ ἐκ τῆς τρίτης ἢ διπλασίων. ἔτι ὁ μείζων τῇ ἐκ τῆ τρίτης διαιρέσεως τῷ ἐλάσσονος τῇ ἐκ τῆ πρώτης ἢ

PROPOSITVM numerum diuidere ter in duos numeros, vt vnus è prima diuisione ad vnum è secunda, datam habeat rationem. Reliquus autem è secunda diuisione, ad vnum è tertia datam habeat rationem. Et rursus reliquus è tertia diuisione ad reliquum è prima datam etiam habeat rationem. Iniunctum sit numerum 100. diuidere ter in duos numeros, vt maior è prima diuisione, minoris è secunda sit triplus; at maior è secunda diuisione, minoris è tertia sit duplus; & adhuc maior è tertia diuisione, minoris è prima sit quadruplus. Ponatur minor è tertia diuisione 1 N. Maior

igitur è ſecunda diuiſione erit 2 N. Et quia totus numerus qui diuiditur eſt 100. erit minor è ſecunda diuiſione 100 — 2 N. Et quoniam huius triplus eſt maior è prima diuiſione, erit 15 300 — 6 N. Igitur minor ex eadem diuiſione erit 6 N. — 200. Et quia illius quadruplus eſt maior è tertia diuiſione, erit 15 24 N. — 800. Supereſt vt tertiæ diuiſionis vtraque pars ſimul efficiat 100. ſed vtraque ſimul eſt 25 N. — 800. Hoc igitur æquatur 100. Et fit 1 N. vnitatum 36. Ad poſitiones. Erit minor è tertia diuiſione 36. maior autem 64. At minor è prima diuiſione 16. maior 84. Denique minor è ſecunda diuiſione erit 28. maior 72. Et manifeſtum eſt hos ſatisfacere propoſito.

πτραπλασίων. πτάχθω ὁ ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τῆς ξ̄ιτης διαιρέσεως ς̄ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων τ̄ ἐκ τῆς δ̄ευτέρας διαιρέσεως ἔσαι ις̄ δύο. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ διαίρεσίς ὅϛι μ̄. ρ̄. ὁ ἄρα ἐλάττων τ̄ ἐκ τ̄ δ̄ευτέρας διαιρέσεως ἔσαι μ̄. ρ̄. λείψει ις̄ δύο. καὶ ἐπεί ὅϛιν αὐτῶ ξ̄ιπλασίων ὁ μείζων τ̄ ἐκ τ̄ πρώτης διαιρέσεως, ἔσαι μ̄ τ̄. λείψει ις̄ ε̄. ὁ ἄρα ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ἔσαι ις̄ ε̄. λείψει μ̄ σ̄. ℂ ἐπεί ὅϛι αὐτῶ τεϱαπλασίων μείζων τῆ̄ ἐκ τῆς ξ̄ιτης διαιρέσεως, ἔσαι ις̄ κδ̄. λείψει μ̄ ω̄ λοιπόν ὅϛι τῶ ξ̄ιτῶ διαίρισιν συντεθῆσαι ποιῆ μονάδας ρ̄. ἀλλὰ συντεθῆσα ποιεῖ ις̄ κ̄. λείψει μ̄. ω̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄. λς̄. ὅθεν τας ὑποτάσεις. ἔσαι ὁ μὲν ἐλάσσων τ̄ ἐκ τ̄ ξ̄ίτης διαιρέσεως μ̄. λς̄. ὁ δ̄ μείζων ξδ̄. ὁ ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τῆς πρώτης διαιρέσεως ις̄. ὁ δὲ μείζων κδ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων τῆ̄ ἐκ τ̄ δ̄ευτέρας διαιρέσεως κη̄. ὁ δὲ μείζων οβ̄. καὶ δῆλον ὅτι ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIII.

SEXTVPLICITER inſtitui poſſe operationem benè monet Xilander. Ego verò & Canonem fabricor ſatis ingenioſum.

Sume tres denominatores eo quo proponuntur ordine, & ducito quemlibet vnitate multatum in eum qui ab ipſo tertius eſt, productum vnitate auctum ducito in datum numerum, & productum diuide per ſolidum ſub denominatoribus contentum vnitate auctum, habebis minores partes ſingularum diuiſionum.

vel:

Ducito quemlibet denominatorem vnitate multatum in eum qui ab ipſo tertius eſt, productum vnitate auctum ducito in reliquum denominatorem, & productum ducito in datum numerum, productumque diuide per ſolidum de quo ſupra, habebis maiores partes ſingularum diuiſionum.

Propoſitis autem tribus numeris, tertius à quolibet dicitur ille qui tertius ab eo numeratur, ſi cùm peruenieris ad vltimum, recurras ad primum. Vt hiſce propoſitis 3. 2. 4. Tertius ab ipſo 3. eſt 4. At tertius ab ipſo 2. eſt 3. denique tertius ab ipſo 4. eſt 2.

QVAESTIO XIV.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione ad eorumdem ſummam datam habeat rationem. Oportet autem multitudinem vnitatum quæ ſtatuetur pro altero numerorum maiorem eſſe denominatore rationis datæ. Mandatum ſit productum ex multiplicatione, ad ſummam habere rationem triplam. Ponatur alter numerorum 1. N. alter (vt addita conditio præcipit) maior quam 3. nempè 12. & eſt productus eorum multiplicatione 12 N. ſumma verò illorum 1 N. + 12. ſupereſt vt 12 N. ſint tripli ad 1 N. + 12. Ter igitur minor æquabitur maiori, & fit 1 N. vnitatum 4. Erit ergo alter illorum 4. alter verò

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐκ τῶ πολλαπλασιασθέντος πρὸς τὸν ἐκ τῆς συνθέσεως λόγον ἔχῃ δεδομένον. δεῖ δὲ τὸ ὑποτιθέμενον πλῆθος τ̄ μονάδων ἑνὸς τ̄ ἀριθμοῦ μεῖζον εἶναι τοῦ ὁμωνύμου τῶ διδομένω λόγου. ὑπετάχθω δὴ τ̄ ἐκ τ̄ πολλαπλασιασθέντος πρὸς τ̄ ἐκ τ̄ συνθέσεως λόγον ἔχειν τετράγωνα. τετάχθω ὁ μὲν εἷς αὐτῶ ἀριθμὸς ἑνός. ὁ δὲ ἕτερος καὶ τὸν ὑποκειμένου πλείων μονάδων γ̄. ἔσω μονάδες ιβ̄. καὶ ὅϛι τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶ ϛ̄ις ιβ̄. ἡ δὲ συνθέσις. αὐτῶ ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. λοιπόν ὅϛιν ἀριθμὸς ιβ̄. τετράγωνος ὢν ἀριθμοῦ ἑνὸς μονάδων ιβ̄. τοῖς ἄρα τὰ ἐλάσσονα ἴσα ὅϛι τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μονάδων δ̄. ἔσαι ὁ μὲν

ἀυτῶν μ̄ Θ̄. ὁ ἢ μ̄. ιβ̄. καὶ ποιῶσι τὸ προ- duodecim & satisfaciunt quæstioni.
βλημα.

IN QVAESTIONEM XIV.

CONDITIO apposita sic demonstrari potest. Sint duo Numeri A B. B C. quorum mutuo ductu fiat G. & sit G ad totum A C. in ratione cuius denominator D, ita vt ex D in A C. fiat G. dico D minorem esse quolibet ipsorum A B. B C. Quia enim idem G fit ex A B. in B C. & ex D in A C. erit A B ad A C. vt D ad B C. sed A B. est minor quàm A C. pars quàm totum, ergo & D est minor quàm B C. & eodem argumento probabitur idem D minor quàm A B. igitur patet propositum.

G 18.
19. septimi. A..... B C
D 2.

Portò aduerte Canonem à Xilandro traditum nimis particularem esse, cùm iubeat sumere pro altero quæsitorum numerorum, ipsum denominatorem rationis vnitate auctum. Nos itaque ex ipsa Diophanti operatione elicimus hunc legitimum Canonem

Statue pro altero quæsitorum, quemlibet numerum maiorem denominatore rationis, eumque ducito in ipsum denominatorem, productum diuide per interuallum sumpti numeri & eiusdem denominatoris, orietur alter quæsitorum.

Sed & operatio Diophanti, & hic Canon eatenus locum habent; quatenus productum est maius extremum proportionis. Nam si summa debet esse maior producto, sic erit proponenda quæstio.

Inueniantur duo numeri quorum summa ad productum eorum multiplicatione datam habeat rationem.

Mandatum sit summæ ad productum rationem esse triplam. Ponatur numerorum alter 1 N. alter quilibet numerus puta 2. erit ergo summa 2. + 1. N. productum 2 N. Quare cùm illa sit huius tripla, 6 N. æquabuntur 2 + 1 N. & fert 1 N. $\frac{2}{5}$ sunt igitur quæsiti numeri 2. & $\frac{2}{5}$ & satisfaciunt postulatis.

Conditio hic non apponitur, quia potest alter quæsitorum esse maior denominatore rationis, dum is tantus sit, vt eo ducto in denominatorem rationis, productus superet vnitatem. Et hinc formatur Canon huiusmodi.

Sume quemlibet numerum pro altero quæsitorum, eumque ducito in denominatorem rationis, & per productum vnitate multatum diuide sumptum numerum, orietur alter quæsitorum.

Cæterum ipsam quæstionem decimamquartam soluit infinitè Diophantus quæstione 41. lib. 4.

QVÆSTIO XV.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμὺς ὅπως ἑκάτερος παρ' ἑκατέρου λαβὼν τοῦ ὑπταχθέντα ἀριθμὸν, λόγον ἔχῃ δοθέντα, πρὸς ὃν ὑπολειφθήσεται. ὑπετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον παρὰ τοῦ δευτέρου λαβόντα μονάδας λ̄. γίνεσθαι αὐτῷ διπλασίονα, τὸν δὲ δεύτερον παρὰ τοῦ πρώτου λαβόντα μονάδας ν̄. γίνεσθαι αὐτῷ τριπλασίονα. πεπάχθω ὁ δεύτερος ς̄ ἑνὸς καὶ ὧν δίδωσι μονάδων λ̄. ὁ ἄρα πρῶτος ἕξ δυὸ λείψει μ̄ λ̄. ἵνα λαβὼν ἅμα τοῦ δευτέρου τὰς λ̄. μ̄. γένηται διπλασίων αὐτοῦ. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν δεύτερον ἅμα τοῦ πρώτου λαβόντα μ̄ ν̄ γίνεσθαι αὐτῷ τριπλασίονα. ἀλλὰ δυὸς μὲν ὁ πρῶτος μονάδας ν̄. λοιπὰς ἔχει ς̄ δυὸ λείψει μ̄ π̄. λαβὼν ἢ αὖ ὁ δεύτερος τὰς ν̄ μ̄ γίνεται ς̄ ἑνὸς μ̄ π̄. λοιπὸν ἐστὶ ς̄ ἵνα μ̄ π̄. τριπλασίονα ᾖ) ς̄ δυὸ λείψει μ̄ π̄. τρεῖς ἄρα τὰ ἐλάττονα ἴσα ἐστὶ τοῖς μείζοσι. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ξδ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδων ιη̄. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων ιδ̄. καὶ ποιῶσι τὸ προβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vterque ab altero imperatum numerum accipiens, ad residuum datam habeat rationem. Postuletur itaque vt prior acceptis à posteriore 30. vnitatibus, sit residui duplus. Posterior autem acceptis à priore vnitatibus 50. sit triplus ad residuum. Ponatur posterior 1 N. & præterea 30. vnitatum quas dat priori; erit ergo prior 2 N. — 30. vt acceptis 30. vnitatibus à posteriore, sit residui duplus. Restat vt posterior acceptis à priore 50. vnitatibus, sit triplus ad residuum. Prior autem si det 50. vnitates, relinquitur 2 N. — 80. At posterior acceptis 50. fit 1 N + 80. supereſt vt 1 N. + 80. sit triplus ad 2 N. — 80. Ter igitur minor æquatur maiori. & fit 1 N. vnitatum 64. Erit ergo prior 98. posterior 94. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XV.

HIC formo huiuſmodi Canonem.

Summam duorum numerorum innicem præſtandorum, ducito ſigillatim in vtrumque denominatorem vnitate auctum, producta diuide per planum ſub denominatoribus vnitate multatum, erunt defectus præſtandorum numerorum à veris.

Vt in exemplo Diophanti ſumma ipſorum 30. & 50. eſt 80. qua ſigillatim ducta in 3. & in 4. fiunt 240. & 320. quæ ſi diuidas per 5. productum ex 2. in 3. vnitate multatum, fiunt 48. & 64. defectus ipſorum 50. & 30. à quæſitis. Quare addendo 48. ad 50. & 64. ad 30. fiunt quæſiti numeri 98. & 94.

QVÆSTIO XVI.

INVENIRE tres numeros vt bini ſimul ſumpti faciant imperatos numeros. Oportet autem vt ſummæ trium imperatorum ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum. Imperetur itaque primum & ſecundum ſimul additos efficere 20. ſecundum & tertium conficere 30. At tertium cum primo facere 40. Ponatur ſumma trium 1 N. & quoniam primus & ſecundus efficiunt 20. ſi ab 1 N. auferam 20. habebo tertium, nempe 1 N. — 20. Ob hæc eademerit primus 1 N. — 30. At ſecundus 1. N. — 40. Reliquum eſt vt tres ſimul additi æquentur 1 N. Atqui tres ſimul additi faciunt 3. N. — 90. hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 45. Ad poſitiones. Erit primus quidem 15. ſecundus vero 5. Tertius 25. & euidens eſt demonſtratio.

ΕΤΡΕΙΝ ξῆς ἀριθμὰς ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τὺς ὑποκειμένους ἀριθμούς. δεῖ δὲ τ̃ ὑποτεταγμένων ξηῶν τὸ ἥμισυ μεῖζον εἶ ἑκάστου αὐτ῀ῶν. ὑποτετάχθωσαν τὸν μὲν πρῶτον μ῀ τ̃ δευτέρου συντιθέντας ποιεῖν μ῀ κ̄. τὸν δὲ δεύτερον μ῀ τ̃ τρίτου ποιῶν λ̄. τὸν δὲ τρίτον μ῀ τ̃ πρώτου ποιῶν μ῀ μ̄. ὑποτάχθωσαν οἱ ξῆς ς῀ ἑνὸς ἐπὶ ὁ πρῶτος, ὁ δὲ δεύτερος ποιῶσι μ῀ κ̄. ἐπὶ ἄρα ὑπὸ ς῀ ἑνὸς ἀφέλω μ῀ κ̄. λείψω δὲ τρίτου ς῀ ἑνὸς λείψει μ῀ κ̄. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι ς῀ ἑνὸς λείψει μ῀ λ̄. ὁ δὲ δεύτερος ς῀ ἑνὸς λείψει μ῀ μ̄. λοιπὸν ὄξι τὺς ξῆς συντιθέντας ἀριθμὰς γίνεσθαι ἴσους ς῀ ἑνί. ἀλλ' οἱ ξῆς συντιθέντες, ποιῶσι ςς῀ι ξῆς λείψει μ῀ δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνί. δὲ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ῀ μ̄. ὅτι τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ῀ ιᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μ῀ ῑ. ὁ δὲ τρίτος μ῀ κᾱ. δὲ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM XVI.

CONDITIONIS appoſitæ ratio eſt, quia cùm tres numeri bini & bini ſumuntur, aggregatum ſummarum quas bini & bini conficiunt, continet bis ſummam trium numerorum, quod euidens eſt, quia quilibet trium numerorum bis ſumitur. Oportet autem ſummam trium numerorum maiorem eſſe ſumma duorum ex illis. Hinc etiam euidens fit cauſa Canonis à Xilandro traditi, qui tamen & ab operatione Diophanti elicitur.

Aggregati ſummarum quas bini & bini conficiunt tres numeri, cape dimidium; hinc aufer ſigillatim dictas ſummas, reſtabunt quæſiti numeri.

Eodem ferè artificio ſoluętur quæſtio ſi quærantur quotlibet numeri multitudine impari, dentúrque ſummæ primi cum ſecundo, ſecundi cum tertio, tertij cum quarto, quarti cum quinto: & ſic deinceps. Ac demum vltimi cum primo. Verbi gratia. Quærantur quinque numeri vt primus cum ſecundo faciat 8. ſecundus cum tertio faciat 9. tertius cum quarto faciat 10. quartus cum quinto faciat 14. denique quintus cum primo faciat 11. Pone ſummam quinque numerorum 1 N. Cùm ergo primus & ſecundus ſint 8. & tertius & quartus 10. erit quintus 1 N. — 18. Rurſus quia ſecundus & tertius ſunt 9. quartus & quintus 14. erit primus, 1 N. — 23. Rurſus quia tertius & quartus ſunt 10. quintus & primus 11. erit ſecundus 1 N. — 21. Item quia quartus & quintus ſunt 14. primus & ſecundus 8. erit tertius 1 N. — 22. Denique quia quintus & primus ſunt 11. at ſecundus & tertius 9. erit quartus 1 N. — 20. Horum ſumma 5 N. — 104. æqualis eſt 1 N. & fit 1 N. 26. ſumma quinque numerorum, vnde ſi auferas ſigillatim ſummam quatuor quorumlibet, nempe ipſos 23. 21. 22. 20. 18. remanent quæſiti numeri 3. 5. 4. 6. 8. Quod ſi artificium ſupra allati Canonis libeat imitari. Sume aggregatum ſummarum datarum 8. 9. 10. 14. 11. nempe 52. huius ſemiſſis 26. eſt ſumma quinque quæ-

sitorum numerorum, vnde vt prius si auferas quatuor quosque remanebit quintus. Præterea in tractatu nostro de iucundis quæstionibus quæ per numeros absoluuntur, alium tradidimus Canonem, hoc vtique non deteriorem, quem, si vacat, videre poteris in praxi vigesima secunda.

Verùm si multitudo quæsitorum numerorum fuerit par, qui eodem modo bini sumantur, & vltimus iungatur primo, nec operatio similis nec traditus Canon locum habebunt vt euidens est, cuius rei ratio est, quia in hoc casu quæstio non vnam recipit solutionem, sed infinitas dum modo possibilis proponatur, vt si quærantur sex numeri, ita vt primus cum secundo faciat 13. secundus cum tertio faciat 15. tertius cum quarto faciat 19. quartus cum quinto faciat 11. quintus cum sexto faciat 10. Poterunt esse quæsiti numeri 8. 5. 10. 9. 2. 8. Itemque hi 7. 6. 9. 10. 1. 9. imò & quemcumque sumas pro primo qui cadat inter 6. & 13. satisfacies quæstioni. Itaque huiusmodi quæstiones hac arte resoluo. Ponatur in dato exemplo primus 1 N. ergo secundus est 13 − 1 N. vnde tertius fit 2 + 1 N. Quare quartus erit 17 − 1 N. igitur quintus fiet 1 N. − 6. Ac denique sextus 16 − 1 N. Restat vt & sextus cum primo faciat 16. Quare cum 16 − 1 N. & 1 N. verè conficiant 16. nulla restat ad æquationem via; ita vt vna species, alteri speciei æqualis reperiatur. Quamobrem cum inuenti numeri in terminis Algebricis omnes propositi partes impleant, manifestum est quæstionem infinitè solutam esse, hoc est quemlibet numerum sumi posse pro valore Numeri, modo possit positionibus ritè applicari. Etenim non quolibet numero pro valore Numeri sumpto, aptè resolui poterunt hypostases, quod accidit quia in aliis reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum, in aliis Numeri cum defectu vnitatum. Quare determinandum de valore Numeri, & præscribendi sunt termini inter quos cadere debeat. Hoc autem sic præstabitur. Sume hypostasim illam in qua est minimus vnitatum numerus cum maximo defectu Numerorum, itemque illam in qua est minimus Numerorum numerus cum maximo defectu vnitatum, sunt hæ 13 − 1 N. & 1 N. − 6. Diuide ergo vtrobique vnitates per multitudinem Numerorum, fient 13. & 6. quæsiti termini. Igitur necesse est valorem Numeri maiorem esse quàm 6. minorem quàm 13. Quicunque autem ponatur inter 6. & 13. satisfiet postulatis. Modus iste præscribendi terminos inter quos cadere debet valor numeri, in quæstionibus quæ infinitè soluuntur, à nemine ante nos (quod sciam) traditus est, cùm sit facilis. & ad ardua problemata soluenda necessarius vt iam monui in libello iucundarum quæstionum quæ per numeros absoluuntur, & fusius docebo ad quadragesimam primam quarti.

QVÆSTIO XVII.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως συνὶ ξεῖς συνιστάμενοι ποιῶσι τοὺς ὑποταχθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τῶν τεσσάρων τὸ τρίτον μεῖζον εἶναι ἑκάστου αὐτῶν. ὑποτετάχθω δὴ τοὺς μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου ξεῖς ποιεῖν μονάδας κ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ξεῖς ποιεῖν μονάδας κβ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τρίτου ξεῖς ποιεῖν μονάδας κδ. τοὺς δὲ ἀπὸ τοῦ τετάρτου ξεῖς ποιεῖν μονάδας κζ. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ς͂ ἑνὸς, ὧν ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ ς͂ ἑνὸς ἀφίλω τοὺς πρώτους ξεῖς, τουτέστι μονάδας κ. λοιπὸν ἕξω τὸ τέταρτον ς͂ ἑνὸς, λείψει μ͂ κ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γίνεται ς͂ ἑνὸς λείψει μ͂ κβ. ὁ δὲ δεύτερος ς͂ ἑνὸς λείψει μ͂ κδ. ὁ δὲ τρίτος ς͂ ἑνὸς λείψει μ͂ κζ. λοιπὸν ὅτι τοὺς τέσσαρας συντιθέντας ἀριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι ἀριθμῷ ἑνί. ἀλλ' οἱ τέσσαρες συντιθέντες ποιοῦσιν ἀριθμοὺς τέσσαρας λείψει μ͂ ϟδ͂. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ͂. λᾶ. ὅτι τὰς ὑποστάσεις ἕξει ὁ μὲν πρῶτος μ͂ β͂. δεύτερος μ͂ ζ. ὁ δὲ τρίτος μ͂. δ͂. ὁ τέταρτος μ͂. ιᾶ. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti faciant postulatos numeros. Oportet autem eorum qui postulantur numerorum summæ trientem maiorem esse quolibet ipsorum. Statutum sit primum & duos deinceps simul iunctos facere 20. secundum & duos deinceps facere 22. tertium & duos deinceps facere 24. Denique quartum & duos deinceps facere 27. Ponatur quatuor numerorum summa 1 N. Igitur si ab 1 N. abstulero tres primos, nempe 20. reliquum habebo quartum, nimirum 1 N − 20. eadem de causa primus erit 1 N. − 22. secundus 1 N − 24. tertius 1 N. − 27. Superest vt quatuor simul additi sint æquales 1 N. sed quatuor simul additi efficiunt 4 N. − 93. Hoc ergo æquatur 1 N. & fit 1 N. vnitatum 31. Ad positiones. Erit primus quidem 9. secundus verò 7. tertius 4. quartus 11. & hi satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO

IN QVAESTIONEM XVII.

CONDITIO hîc apponitur eadem de causa, qua factum est vt præcedenti apponeretur, quia videlicet cùm quatuor numeri, terni sumuntur, quoties fieri potest diuersis modis, omnes sumuntur ter. Hinc autem patet, quæstionem huiusmodi proponi posse de quotlibet numeris qui sumantur omnes, vno minus, quoties fieri potest diuersis modis, & erit eadem operationis ratio; sed & Canon vniuersalissimus formabitur.

Aggregatum summarum datarum diuidatur per numerum multitudinis numerorum vnitate multatum. Quotiens erit summa numerorum quæsitorum, à qua si auferantur sigillatim data summa, sient quæsiti numeri.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros vt bini iuncti superent reliquum imperato numero. Iniunctum sit primum & secundum superare tertium vnitatibus 20. secundum & tertium superare primum vnitatibus 30. Tertium vero & primùm superare secundum vnitatibus 40. Ponatur summa trium 2 N. & quoniam primus & secundus superant tertium vnitatibus 20. Adiecto vtrimque communi tertio; trium summa erit bis tertius, & interuallum 20. Si igitur à summa trium, hoc est a 2 N. abstulero 20. habebo bis tertium, scilicet 2 N. — 20. simplex ergo tertius est 1 N. — 10. Ob hæc eadem erit & primus 1 N. — 15. secundus vero 1 N. — 20. supereſt vt tres simul æquentur 2 N. sed tres simul efficiunt 3 N. — 45. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 45. Ad positiones. Erit primus 30. secundus 25. tertius 35. & hi satisfaciunt quæstioni.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὺς ὅπως σὺι δύο λαμβανόμενοι τὸ λοιπὸ ὑπερέχωσι τῷ ἐπιταχθέντι ἀριθμῷ. ὑπεταχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τὸν δὲ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ̄. τὸν δὲ τρίτον καὶ τὸν πρῶτον τὸ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. πεπάχθωσαν οἱ ξεῖς, ες^οι β̄. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ τρίτου, οἱ τρεῖς, δὶς ὅσοι ὁ τρίτος καὶ ἡ ὑπεροχὴ μονάδες κ̄. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τελείων, τουτέστιν ἀριθμῶν, δύο ἀφέλω μονάδας κ̄. ἕξω δὶς τὸν τρίτον, ἀριθμῶν δύο λείψει μ^ο κ̄. ἅπαξ ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ς^ὸς ἑνὸς λείψει μ^ο ῑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔσται ς^ὸς ἑνὸς, λείψει μ^ο μ̄. ὁ δεύτερος ς^ὸς ἑνὸς λείψει μ^ο κ̄. λοιπὸν ὅσοι τοὺς ξεῖς ἴσους ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ' οἱ τρεῖς συμπάντες ποιοῦσιν ες^οι τρεῖς λείψει μ^ο μ̄. ταῦτα ἴσα ες^οις δυσὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο μ̄. ἐπὶ τὰς ὑποθέσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδες λ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο κ̄. ὁ δὲ τρίτος μ^ο λ̄. καὶ πεῖσι τὰ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVIII.

ADIECTO *vtrimque communi tertio*, &c. Res à Scholiaste obscuratur potius quàm illustretur. Quod autem ait Diophantus tale est. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. simul superent tertium C. interuallo D. infert Diophantus. Ergo tres A B C. simul continent bis ipsum C. & semel ipsum D. quia enim A B. simul æquantur ipsis C D. simul, si vtrimque addatur ipse C. erunt tres A B C. simul, æquales ipsi D. & duplo ipsius C. Quod erat propositum. Cæterum ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

A 3. B 4. C 5. D 2.

A semisse aggregati excessuum aufer sigillatim semissem cuiuslibet excessus, residua erunt quæsiti numeri. vel quod idem est.

Ab aggregato excessuum aufer sigillatim ipsos excessus, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Hinc autem manifeste colligitur Aggregatum ipsum excessuum æquale esse summæ quæsitorum numerorum. Quod tamen etiam aliter demonstrabitur hac arte. Sint tres numeri A B C. ita vt ambo A B. superent C. excessu D. Ambo B C. superent A excessu E. denique ambo A C. superent B. excessu F. dico summam ipsorum A B C. æquari summæ ipsorum D E F. Quoniam enim per mox demonstrata tres A B C. continent bis ipsum C. & semel ipsum D. itemque tres A B C. continent bis ipsum A & semel ipsum E. ac denique tres A B C. continent bis ipsum B & semel ipsum F. Patet summam ipsorum A B C. ter, continere bis

A 30. B 25. C 35. D 20. E 30. F 40.

ipſos A B C. & ſemel ipſos D E F. Quare ſi vtrimque auferantur ipſi A B C. bis, remanent iidem A B C. ſemel, æquales ipſis D E F. ſemel. Quod erat oſtendendum.

QVÆSTIO XIX.

Ἄλλως.

Ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ἔστω ὁ τρίτος ς̄ ἰνός. συναμφότεροι ἄρα ὅτι πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἔσαι ς̄ ἰνὸς μ̄ κ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος ℂ ὁ τρίτος ℙ πρώτου ὑπερέχουσι μονάδας λ̄. τόσων ἄρα ὁ δεύτερος τοσούτων μονάδων ὅσων ὀξὶ ὁ ἥμισυς τοῦ τε κ̄, ℂ λ̄. ἴσοις μονάδων κε̄. καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός ὀξιν ς̄ ἰνὸς μ̄ κ̄. ὧν ὁ δεύτερός ὀξι μονάδων κε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσαι ἀριθμῶ ἰνὸς λείψω μ̄ ε̄. λοιπὴ ἡ καὶ τοῦ τρίτου μ̄ τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου ὑπερίσχειν μονάδας μ̄. ἀλλὰ ὁ πρῶτος μ̄ τοῦ τρίτου ὀξὶν ἀριθμοὶ δύο λείψω μονάδων ε̄. ἴσοι ἄρα εἰσὶν μονάσιν ξε̄. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις· ἀριθμοὶ ἄρα δύο ἴσοι μονάσιν ο̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ λε̄. ἐπὶ τὰς ὑποσάσεις. ἔταξα δὲ πρῶτον ς̄ ἰνὸς λείψω μ̄ ε̄. ἔσαι μ̄ λ̄. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων κε̄. τὸν δὲ τρίτον ς̄ ἰνὸς ἔσαι μ̄ λε̄.

Aliter.

Quandoquidem primus & ſecundus ſuperant tertium vnitatibus 20. eſto tertius 1 N. Igitur primus & ſecundus iuncti erunt 1 N. + 20. Rurſus quoniam ſecundus & tertius ſuperant primum vnitatibus 30. Pono ſecundum tot vnitatum, quantus eſt ſemiſſis numerorum 20. & 30. nimirum vnitatum 25. Et quia primus & ſecundus iuncti ſunt 1 N. + 20. quorum ſecundus eſt vnitatum 25. reliquus erit primus 1 N. − 5. Supereſt vt tertius & primus iuncti ſecundo ſuperaddant vnitates 40. ſed primus cum tertio eſt 2 N − 5. hoc ergo æquatur vnitatibus 65. Communis addatur defectus. Igitur 2 N. æquantur 70. & fit 1 N. 35. Ad poſitiones. Statueram primum 1 N − 5. erit ergo 30. ſecundum autem poſueram 25. At tertium 1 N. Quamobrem erit 35.

IN QVAESTIONEM XIX.

Hic Diophantus vſurpat huiuſmodi Theorema.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet ſimul reliquo ſint maiores, ſumma duorum exceſſuum quibus bini reliquum ſuperant, dupla eſt vnius ex tribus datis numeris, illius ſcilicet ad quem reliquorum exceſſus non eſt relatus.

Quod ſic demonſtratur. Sint tres dati A B C. & iidem exceſſus qui prius D E F. dico ſummam exceſſuum D E. eſſe duplum ipſius B. & ſic de aliis. Quia enim ambo A B. æquantur ambobus C D. itémque ambo B C. æquantur ambobus A E. erunt ipſi A C. ſemel & B. bis æquales ipſis A C D E. Quare auferendo vtrimque ipſos A C. remanet B bis æqualis ipſis D E. Quod erat propoſitum. Eodem argumento oſtendemus ſummam duorum E F. eſſe duplam ipſius C. & ſummam amborum D F eſſe duplam ipſius A. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum. Hinc autem elicitur huiuſmodi Canon.

A 30. B 25. C 35.
D 30. E 30. F 40.

Summæ duorum quorumlibet exceſſuum cape ſemiſſem, habebis quæſitos numeros.

Cæterùm placet in artis ſpecimen ex ſupradicto Theoremate aliud etiam non iniucundum adducere, nimirum.

Datis tribus numeris, ita vt duo quilibet ſimul reliquo ſint maiores, duorum exceſſuum differentia dupla eſt differentiæ duorum datorum numerorum, inter quos viciſſim facta eſt exceſſuum comparatio.

A 30. B 25. C 35.
D 20. E 30. F 40.
G 10. K 5.

Sint dati qui prius A B C. & iidem exceſſus D E F. & duorum D E. differentia ſit G. cuius ſemiſſis K. dico K eſſe differentiam ipſorum A C. Quia enim vt oſtenſum eſt amborum D E ſumma dupla eſt ipſius B, ſunt D B E. arithmeticè proportionales. Quare duorum D B. idem eſt interuallum, quod duorum B E. Cum ergo extremorum differentia componatur ex differentiis extremorum & medij, patet G duplum eſſe differentiæ D ad B vel B. ad E. Quamobrem K eſt differentia D & B. Itaque quoniam ambo A B. æquantur ambobus C D. ex hypotheſi, erit in arithmetica medietate A ad C. vt D ad B. Quare cùm oſtenſum ſit K eſſe differentiam ipſorum D B. erit idem K differentia ipſorum A C. Quod erat oſtendendum. Eodem modo oſtendemus ſemiſſem differentiæ ipſorum E F. eſſe differentiam ipſorum A B. itemque ſemiſſem differentiæ ipſorum D F. eſſe differentiam ipſorum B C. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

5. 1. *poriſ.*

4. 1. *poriſ.*

Quod ſi lubeat theorematis huius opem implorare, licebit rurſus alia operatione ab vtraque Diophanti longè diuerſa problema iſtud abſoluere. Ponatur A 1 N. Cum ergo E ſit minor quàm F numero 10. erit A minor quàm B, ſemiſſe ipſius 10. Quare B erit 1 N. — 5. Rurſus quia E maior eſt quàm D. numero 10. erit & C maior quàm A ſemiſſe ipſius 10. Erit igitur C. 1 N + 5. Iam ergo cùm tres quæſiti numeri ſint 1 N. 1 N — 5. 1 N. + 5. triplici via licet ad æquationem peruenire. Nam primi & ſecundi ſumma 2 N — 5. æquatur ſummæ tertij & interualli D. nimirum 1 N. + 25. Rurſus ſecundi & tertij ſumma nimirum 2 N. æquatur ſummæ primi & interualli E, nimirum 1 N + 30. Denique primi & tertij ſumma 2 N. + 5. æquatur ſummæ ſecundi & interualli F. nimirum 1 N. + 35 & has tres æquationes ſi reſoluas ſigillatim, fiet ſemper 1 N. 30. primus ſcilicet numerus. Poſſet etiam poni 1 N. pro ſecundo, vel pro tertio, & vtroque modo triplici via ad æquationem peruenitur, vt manifeſtum eſt.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE quatuor numeros, vt terni iuncti reliquum ſuperent numero imperato. Oportet autem ſemiſſe ſummæ quatuor interuallorum minorem eſſe quemlibet ipſorum. Poſtuletur itaque vt primus & duo deinceps coniuncti quarto ſuperaddant vnitates 20. ſecundus & duo deinceps primo ſuperaddant vnitates 30. tertius & duo deinceps ſimiliter ſecundo ſuperaddant vnitates 40. & adhuc quartus & duo deinceps coniuncti tertio ſuperaddant vnitates 50. Ponatur quatuor numerorum ſumma 2 N. & quandoquidem primus & duo deinceps quarto ſuperaddunt vnitates 20. & quo tres primi ſuperant quartum, eo quatuor ſimul ſuperant duplum quarti, ſunt autem quatuor ſimul 2 N. igitur 2 N. ſuperant duplum quarti vnitatibus 20. Quamobrem duplum quarti eſt 2 N. — 20. Ergo ipſe quartus eſt 1 N. — 10. eadem de cauſa, erit & primus 1 N. — 15. ſecundus 1 N. — 20. & tertius 1 N. — 25. ſupereſt vt quatuor ſimul æquales ſint 2 N. ſed quatuor ſimul faciunt 4 N. — 70. Hoc ergo æquatur 2 N. & fit 1 N. 35. Ad poſitiones. Erit primus 20. ſecundus 15. tertius 10. quartus 25. & quæſtioni ſatisfaciunt.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὰς ὅπως οἱ ξεῖς λαμβανόμδμοι τὸ λειπὸ ὑπερέχωσιν ὡρισμένῳ ἀριθμῷ. δεῖ δὴ τ̄ ἐκ τ̄ ὑπεροχῆς τ̄ πασάρων τὸ ἥμισυ ἐλάττονα εἶ ἕκαστον αὐτῶν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸς μὲν ἀπὸ πρώτου ξεῖς καὶ τὸ ἑξῆς συντιθέντας τοῦ τετάρτου ὑπερέχειν μονάδας κ̄. τὸς ἢ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τρεῖς τοῦ πρώτου ὑπερέχειν μονάδας λ̄. τὸς ἢ ἀπὸ τοῦ ξέτου ξεῖς ὁμοίως τοῦ δευτέρου ὑπερέχειν μονάδας μ̄. καὶ ἔτι τὸς ἀπὸ τετάρτου τρεῖς καὶ τὸ ἑξῆς συντιθέντας τ̄ τρίτου ὑπερέχειν μονάδας ν̄. τετάχθωσαν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ δύο, καὶ ἑπτὰ οἱ ἀπὸ τοῦ πρώτου τρεῖς τοῦ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ὃν ἢ ὑπερέχουσιν οἱ πρῶτοι τρεῖς τοῦ τετάρτου, τούτῳ ὑπερέχουσιν καὶ οἱ τέσσαρες τοῦ τετάρτου δίς, καὶ εἰσὶν οἱ τέσσαρες ςᵛⁱ. β̄. ἀριθμοὶ ἄρα δύο, δὶς τ̄ τετάρτου ὑπερέχουσι μονάδας κ̄. ὁ ἄρα διπλασίων τοῦ τετάρτου ἴσαι ςᵛⁱ β̄ λείψει μ̄ κ̄. αὐτὸς ἄρα ἴσαι ςᵛⁱ ἑνὸς λείψει μ̄ ῑ̄. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἴσαι ςᵛⁱ ἑνὸς λείψει μονάδων ιη̄. ὁ ἢ δεύτερος ςᵛⁱ ἑνὸς λείψει μ̄ κ̄. καὶ ἔτι ὁ ξέτος ςᵛⁱ ἑνὸς λείψει μ̄ κῑ̄. λοιπὸν ὄντι τὰς τέσσαρας ἴσους εἶ ἀριθμοῖς δυσίν. ἀλλ᾽ οἱ τέσσαρές εἰσιν ςᵛⁱ δ̄ λείψει μ̄ ō. ταῦτα ἴσα ςᵛⁱ β̄. ἕκ γίνε) ὁ ἀριθμὸς μ̄ λῑ̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κ̄. ὁ ἢ δεύτερος μ̄ ιη̄. ὁ δὲ ξέτος μ̄ ῑ̄. ὁ δὲ τέταρτος μ̄ κῑ̄. καὶ πιστὸν τὸ προβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

CONDITIONIS adiectæ ratio eſt, quia vt mox oſtendetur, exceſſuum ſumma dupla eſt ſummæ ipſorum quatuor numerorum. Quare ſemiſſis ſummæ exceſſuum qui æqualis eſt ſummæ numerorum debet eſſe maior tribus quibuſlibet, ac proinde multò magis, maior eſt exceſſu trium ſuper reliquum. Quod autem ſumma exceſſuum, ſit dupla ſummæ numerorum, ſic oſtendo. Sint quatuor numeri A B C D. & exceſſus trium quorumlibet ſuper reliquum ſint E F G H. Dico ſummam ipſorum E F G H duplum eſſe ſummæ ipſorum A B C D. Quia enim A B C. ſimul excedunt D numero E. erunt A B C. ſimul æquales ipſis D E. & addendo vtrimque ipſum D. erit ſumma ipſorum A B C D. æqualis ipſi

A 20. B 15. C 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

D bis, & ipſi E ſemel. Eodem modo oſtendemus ſummam eorumdem A B C D æquari ipſi A bis & F ſemel, itemque ipſi B bis & G ſemel, ac denique ipſi C bis & H ſemel. Ergo ſumendo quater ipſos A B C D. erit quadruplum hoc æquale ipſis A B C D bis, & ipſis E F G H ſemel. Quare auferendo vtrimque ipſos A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis, remanent adhuc A B C D bis æquales ipſis E F G H ſemel. Quod erat propoſitum.

Ceterum patet demonſtrationis medium congruenti modo applicari poſſe cuilibet Numerorum multitudini propoſitæ, vnde fiet regula generalis.

☞ *Si fuerint quotlibet numeri, quorum omnium vno dempto ſuper reliquum exceſſus dentur, erit exceſſuum ſumma ſummæ numerorum multiplex ſecundum numerum multitudinis numerorum binario multatum.*

Ita ſi fuerint quinque numeri, erit exceſſuum ſumma ſummæ numerorum tripla, & ſi fuerint ſex numeri, erit exceſſuum ſumma, numerorum ſummæ quadrupla, & ſic in infinitum. Atque ex his & ex ipſa Diophanti operatione elicietur Canon generalis ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas propoſita qualibet multitudine numerorum.

Summam exceſſuum diuide per numerum multitudinis numerorum binario multatum, à quotiente auſer ſigillatim ipſos exceſſus, reſiduorum ſemiſſes erunt quæſiti numeri.

QVÆSTIO XXI.

Αλλως. *Aliter.*

ΕΠΕΙ ὁι ἀπὸ τῆ πρώτου ξεῖς τῆ τετάρτε ὑπερέχουσι μ̄ κ̄. τετάχθω ὁ τέταρτος ς̄ ἑνὸς, ὁι ξεῖς ἄρα ἔσονται ς̄ ἑνὸς μ̄ κ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁι ἀπὸ τῆ δευτέρε ξεῖς τῆ πρώτου ὑπερέχουσι μ̄ λ̄. τετάχθω συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μ̄ τοσούτων, ὅσων ὄξιν ὁ ἥμισυς τῆ δύο ὑπεροχῶν. λέγω δὴ ℣ κ̄. καὶ ℣ λ̄. τουτέστι μ̄ πε̄. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ τῆ πρώτου ξεῖς εἰσὶν ς̄ ἑνὸς μ̄ κ̄. ὧν ὁ δεύτερος ℣ ὁ τρίτος μ̄ πε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ς̄ ἑνὸς λείψει μ̄ ε̄. καὶ ἐπεὶ οἱ ἀπὸ ℣ δευτέρε ξεῖς ὑπερέχουσι τῆ πρώτου μ̄ λ̄. οἱ δὲ ἀπὸ τῆ τρίτου ξεῖς ὑπερέχουσι ℣ δευτέρε μ̄ μ̄. συναμφότερος ἄρα ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἔσται μ̄ λε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται μ̄ λε̄. λείψει ς̄ ἑνός. ἔστι δὴ καὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος μ̄ πε̄. ὧν ὁ τρίτος μ̄ λε̄ λείψει ς̄ ἑνὸς, λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ς̄ ἑνὸς λείψει μ̄ ῑ. λοιπὸν ὄξι τὰς ἀπὸ τετράδος. τρεῖς τῆ τρίτου ὑπερέχειν μ̄ ν̄. ἀλλ' οἱ τρεῖς συντεθέντες ποιῶσι ἀριθμὸς τρεῖς λείψει μ̄ πε̄. ὁ ἄρα τρίτος μ̄ λε̄. λείψει ς̄ ἑνός. δεῖ δὴ καὶ ς̄ τρεῖς λείψει μ̄ πε̄. ὑπερέχειν μονάδας λε̄ λείψει ς̄ ἑνὸς, μ̄ ν̄. ὥστε μονάδες πε̄ λείψει ς̄ ἑνὸς ἔσαι ἑκὸν ς̄ τελοὶ λείψει μ̄ πε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κε̄. ὅπερ ἦν τὰς ὑποθέσεως. ἔταξα τοίνυν τὸν ἑνὸς λείψει μ̄ ῑ. ἔσαι μ̄ κ̄. ὁ ἄρα δευτέρ ὁμοίως μ̄ πε̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ ῑ, ὁ δὲ τέταρτος μ̄ κε̄.

QVONIAM tres à primo ſuperant quartum vnitatibus 20. Ponatur quartus 1 N. Tres ergo reliqui erunt 1 N. + 20. Rurſus quia tres à ſecundo ſuperant primum vnitatibus 30. Ponantur ſecundus & tertius ſimul tot vnitatum, quot continet ſemiſſis duorum interuallorum, duorum ſcilicet 20. & 30. hoc eſt vnitatum 25. Et quoniam tres à primo ſunt 1 N. + 20. quorum ſecundus & tertius ſunt 25. relinquitur primus 1 N. — 5. Et quia tres à ſecundo ſuperant primum vnitatibus 30. At tres à tertio ſuperant ſecundum vnitatibus 40. erunt vtique tertius & quartus ſimul 35. Igitur relinquitur pro tertio 35 — 1 N. Sunt autem ſecundus & & tertius ſimul 25. quorum tertius eſt 35 — 1 N. relinquitur ergo ſecundus 1 N. — 10. Supereſt vt tres à quarto ſuperent tertium vnitatibus 50. ſed tres illi ſimul ſunt 3 N. — 15. Tertius autem eſt 35. — 1 N. Oportet itaque 3 N. — 15. ſuperare 35 — 1 N. æquantur 3 N. — 15. & fit 1 N. vnitatum 25. Ad poſitiones. Statueram primum 1 N. — 5. erit ergo 20. ſecundus verò ſimiliter 15. tertius 10. quartus 25.

IN QVAESTIONEM XXI.

HIc ſupponit Diophantus, hoc theorema.

Datis quatuor numeris, ita vt tres quilibet reliquo ſint maiores, ſumma duorum exceſſuum, quibus tres reliquum ſuperant, dupla eſt ſummæ duorum ad quos exceſſuum relatio facta non eſt.

A 20. B 15. C. 10. D. 25.
E 20. F 30. G. 40. H 50.

Sint numeri & exceſſus qui ſuprà. Dico ſummam exceſſuum E F. duplam eſſe ſummæ ipſorum B C. & ſic de aliis. Etenim quia tres A B C. æquantur duobus D E itemque tres B C D. æquantur duobus A F. erunt A D. ſemel & B C. bis æquales ipſis A D E F. Quare auferendo vtrimque ipſos A D. remanent B C. bis æquales ipſis E F. Quod erat propoſitum.

Hinc etiam patet hoc Theorema ad quotlibet numeros congruenter extendi, ſemper enim eodem modo oſtendetur ſummam duorum exceſſuum duplam eſſe ſummæ omnium ad quos non eſt facta exceſſuum relatio. Ita ſi fuerint quinque numeri duorum exceſſuum ſumma erit dupla ſummæ trium numerorũ ad quos non fiet exceſſuum relatio,& ſic in infinitum. Sed & eadem ratione ad quotlibet numeros extendemus Theorema quod attulimus adquæſtionẽdecimam nonam,& illud ſic proponemus.

Datis quotlibet numeris, ita vt omnes ſimul vno dempto ſint ſemper reliquo maiores; duorum exceſſuum differentia dupla eſt differentia duorum numerum, inter quos vicißim facta eſt exceſſuum comparatio.

Sint quatuor numeri A B C D. & exceſſus trium quorumlibet ſuper reliquum ſint E F G H. & ipſorum E F. interuallum K cuius ſemiſſis L. Dico L. eſſe interuallum ipſorum A D. Nam ſumpta M ſumma reliquorum B C. inter quos non fit exceſſuum relatio, erit per iam oſtenſa, ſumma duorum E F. dupla ipſius M. Quare E M F. erunt in arithmetica medietate. Atque adeo cum extremorum E F differentia ſit K, eius ſemiſſis L. erit differentia ipſorum E M. Itaque quia tres A B C. ſeu duo A M. æquantur duobus D E ex hypotheſi, erunt in arithmetica medietate A ad D. vt E ad M. Quare & ipſorum A D. interuallum erit L. Quod demonſtrandum erat. Eademque eſt ratio ſi plures fuerunt numeri, vt patet. Quamobrem ex omni parte conſtat propoſitum. Licebit ergo & huius theorematis auxilio alia operatione, eaque ſane multiplici ſoluere huiuſmodi quæſtiones, vt docuimus ad decimam nonam. Sed de his hactenus.

M 25.
A 20. B 25. C 10. D 25.
E 20. F 30. G 40. H 50.
K 10. L 5.

quinta 1. porism.

quarta 2. porism.

QVÆSTIO XXII.

PROPOSITVM numerum in tres numeros partiri, vt veteris extremorum adſumpto medio ad reliquum extremum datam habeat rationem. Statutum ſit numerum 100. diuidere in tres numeros, vt primus & ſecundus tertij triplum conſtituant. At ſecundus & tertius quadruplum primi. Ponatur tertius 1 N. & quia primus & ſecundus faciunt triplum tertij, erunt vtique ambo 3 N. Tres ergo numeri ſimul erunt 4 N. æquales ſane numero 100. & fit 1 N. 25. Ad poſitiones. Poſueram tertium 1 N. erit ergo 25. Statueram autem primum & ſecundum ſimul 3 N. erunt ergo 75. Rurſus quia ſecundus & tertius conſtituunt quadruplum primi. Ponatur primus 1 N. erunt igitur ſecundus & tertius 4 N. Tres ergo ſimul ſunt 5 N. ſed & vnitates 100. fit igitur 1 N. 20. eſt ergo primus 20. tertius verò 25. Reſiduum igitur eſt ſecundus, nimirum 55. & ſatisfaciunt quæſtioni.

Τὸν ὑποκείμενα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος τῶν ἄκρων πρὸς λαβὼν τὸ μέσον πρὸς τὸν λοιπὸν τὸ ἄκρον λόγον ἔχῃ δοθέντα. ἐπιτετάχθω δὴ ὁ ρ. διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου τὸ τρίτου ᾖ τριπλασίων. ὁ δὲ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου τοῦ πρώτου ᾖ τετραπλασίων. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ ἀπὸ, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος μετὰ τοῦ δευτέρου τοῦ τρίτου ὀκτὼ τριπλασίων τετάχθωσαν οἱ δύο, ἀριθμοὶ τρεῖς. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶν ς̄ δ̄. οὗτοι ἴσοι μνᾶσιν ρ̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κ̄. διπλᾶ τὰς ὑποστάσεις. ἔταξα δὲ τρίτον ς̄ ἀπό. ἔσαι μ̄ κ̄. τὸν δὲ πρῶτον καὶ δεύτερον ς̄ τριῶν, ἴσον μ̄ ο̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου τοῦ πρώτου ἐστὶ τετραπλασίονες. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ἀπό, ἔσαι ἄρα ὁ δεύτερος μετὰ τοῦ τρίτου ς̄ τεσσάρων. οἱ τρεῖς ἄρα εἰσὶ ς̄ ῑ. ἀλλὰ μετὰ μ̄ ρ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ρ̄. ἴσαι ἄρα ὁ πρῶτος μ̄ κ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ κ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ β̄ ἴσαι μ̄ νε̄. καὶ ποιοῦσι τὰ δοθέντα.

IN QVAESTIONEM XXII.

EX operatione Diophanti eliciemus huiuſmodi Canonem.

Datum numerum diuide ſigillatim per denominatorem vtriuſque rationis poſtulata vnitate auctum orientur extremi quæſiti orum.

Porrò quamuis operatio Diophanti per duas poſitiones ſit elegans, poteſt tamen ſolui quæſtio

per vnicam tantum positionem, etiam sine auxilio regulæ quantitatis, quicquid dicat Xilander. Quod ita fiet. Ponatur primus 1 N. ergo secundus & tertius simul erunt 4 N. & trium summa 5 N. quæ si diuidatur in duas partes, quarum altera alterius sit tripla, habebimus hinc tertium, inde summam primi & secundi. Diuidemus autem 5 N. in duas partes seruantes proportionem triplam per Canonem secundæ huius, eruntque 1 ¼ N & 3 ¾ N. est ergo primus 1 N. tertius 1 ¼ N. & siue à summa secundi & tertij quæ est 4 N. auferatur tertius, siue à summa primi & secundi quæ est 3 ¾ N. auferatur primus, remanet secundus 2 ½ N. Omnes autem simul faciunt 5. N. Igitur 5 N. æquantur 100. & fit 1 N. 20. Ad hypostases, erit primus 20. secundus 55. tertius 25. & constat.

QVÆSTIO XXIII.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ ϝ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δ᾽ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τοῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δ᾽ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τοῦ τοῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου, τοσούτῳ μέρει τοῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τοῦ τοσούτου μέρους ὅπερ ϝ ὑπερέχειν τοῦ μέσου τοὺς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον· ποιεῖν ἐν αὐτοῖς πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον, ἢ ἐν τῷ μέσῳ. ὑπεταχθω δὴ τὸν μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ, τὸν δ᾽ μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ ϝ μεγίστου ξίτῳ, τὸν δ᾽ ἐλάχιστον ὑπερέχειν μονάδας ῑ̄ τοῦ τοῦ μέσου τρίτου μέρους. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ς̄ ἀνὸς, ᾧ ὧν ὑπερέχει τοῦ μέσου τρίτου μονάδων ῑ̄. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ἀριθμῶν τοιῶν, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ τρίτον τοῦ μέσου ἐχ μονάδας ῑ̄. ἢ ἐχ ὅπως. τετάχθω ὁ μέσος ἀριθμοὶ ξεῖς, ᾧ ὑπὸ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τοῦ τρίτου μέρους τοῦ μέσου μ̄ ῑ̄. ἔσαι ς̄ ἀνὸς ἐχ μ̄ ῑ̄. λεῖπον ὄξι ἐχ τὸν μέσον τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ ϝ πρώτου τρίτῳ μέρει. ἀλλ᾽ ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει ς̄ᾱ δυσὶ λείψει μ̄ ῑ̄. ταῦτα ἄρα τρίτον μέρος ὄξι τοῦ μεγίστου, αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσαι ςξ̄ ϛ̄ λείψει μ̄ λ̄. δεῖσῃ ἄρα ἐχ ϝ μέγιστον τοῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τοῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ᾽ ὁ μέγιστος τοῦ μέσου ὑπερέχει ς̄ᾱ ξιστὶ λείψει μ̄ λ̄. ταῦτα ἄρα τρίτον ὄξι μέρος τοῦ ἐλαχίστου, ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσαι ἀριθμῷ ϑ̄ λείψει μ̄ ϛ̄. ἀλλὰ ἐχ ἀριθμοῦ ἀνὸς μ̄ ῑ̄ ὡρίθη. ἐχ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ ιβ̄. ἐχ ἥμισυ. ἔσαι ἄρα ὁ μὲν τρίτος μ̄ κβ̄ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέσος λζ̄. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέγιστος μ̄ μῑ̄. ἐχ ποιῶσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum maximus medium excedat minimi data parte; medius minimum superet maximi data parte. At minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem medium tanta parte maximi præstare minimo, vt denominatore partis illius ducto in id quo medius excedit minimum, maior in eo existat Numerorum multitudo, quàm in medio. Constitutum sit maximum medio præstare, triente minimi. Medium autem minimo superaddere trientem maximi. Minimum denique superare trientem medij 10. vnitatibus. Ponatur itaque minimus 1 N. & 10. vnitatum quibus præstare debet triente medij. Erit ergo medius 3 N. vt contineat minimus trientem medij & vnitates 10. vel sic. Ponatur medius 3 N. & quia volo minimum superare trientem medij decem vnitatibus, erit minimus 1 N. + 10. Restat vt medius minimum superet maximi triente, sed quo medius minimum superat est 2. N. — 10. hoc ergo est triens maximi, ipse igitur maximus est 6 N. — 30. Oportet itaque & maximum medio præstare, triente minimi, sed quo maximus medium excedit est 3 N. — 30. hoc ergo est triens minimi, minimus ergo est 9 N. — 90. sed & repertus est 1 N. + 10. Quamobrem fit 1 N. 12. ½ erit igitur tertius 22 ½. Medius 37 ½. Maximus 45. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPORTET *autem medium* &c. Refertur hæc conditio ad Algebricos numeros nota N. affectos, & eius necessitas ita demonstrari potest. Quia Diophantus ponit pro medio certam Numerorum multitudinem, erit & minimus certa Numerorum multitudo + certis vnitatibus, quia videlicet minimus est certa pars medij + certis vnitatibus. Quare medius excedet minimum certa mul-

titudine Numerorum — certis vnitatibus, cùm enim in medio nullæ sint vnitates absolutæ, non poterunt ab eo subtrahi vnitates quæ sunt in minimo, nisi per signum —. Cùm ergo excessus iste medij supra minimum sit certa pars maximi, vt habeatur maximus, ducetur hic excessus in denominatorem partis, fietque maximus constans ex multitudine Numerorum — certis vnitatibus. Necesse est autem vt hæc Numerorum multitudo existens in maximo, sit maior Numerorum multitudine existente in medio, alioquin si ponatur minor vel æqualis, cum præterea adiunctum habeat defectum vnitatum, sequetur maximum minorem esse medio. Quod est absurdum. Quæ omnia ex ipsamet Diophanti operatione manifesta sunt. Sed (quod pace Diophanti dictum velim) hæc conditio, parum congruenter assignata videtur. Etenim cùm quæstioni apponitur conditio, id fit vt per eam agnoscamus vtrum possibilis sit quæstio, necne, ne videlicet oleum operamque perdamus circa impossibilem frustra operantes, ac proinde talis esse debet conditio, vt ante ipsam operationem naturam quæstionis nobis aperiat. Quod sane non præstat hæc Diophanti conditio, cùm per eam non nisi iam prouecta operatione, de statu quæstionis iudicium fieri possit. Itaque solitum authoris acumen hic desidero. Certè non erat difficile legitimam conditionem præscribere, hoc modo.

Oportet denominatorem partis medij minorem esse numero, qui fit ex eodem denominatore vnitate multato in denominatorem partis maximi.

Canonem hîc si formare libet, necesse erit eum perplexiorem fieri, hoc scilicet modo.

Duc inter se denominatores partium maximi & minimi, & productum vnitate auctum ducito in datum numerum, productúmque diuide per solidum sub tribus denominatoribus multatum vnitate & numero qui fit ex denominatore partis minimi in summam aliorum duorum denominatorum. Quotienti adde datum numerum, fiet minimus quæsitorum. Es eundem quotientem ducito in denominatorem partis medij, fiet ipse medius.

Verbi gratia debeat maximus superare medium quarta parte minimi. Medius minimum sexta parte maximi. minimus quintam partem medij numero 12. ducito inter se 4. & 6. producto 24. adde 1. fit 25. quem ducito in 12. fit 300. quem diuide per solidum sub denominatoribus 5. 6. 4. multatum vnitate & producto ex 4. in summam aliorum, hoc est diuide 300. per 75. fit 4. cui si addas 12. fit minimus quæsitorum 16. & si ducas 4. in denominatorem 5. fiet 20. medius, vnde facile est reperire maximum 24. cùm sit sextuplus ad interuallum medij & minimi.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros vt maximus medium superet, minimi data parte. Medius minimum excedat, maximi data parte. Minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem maximi talem partem dari, vt adiecta minimo, numeros pauciores conficiat iis qui pro medio numero ab initio ponebantur. Ponatur rursus minimus 1 N. & 10. vnitates quibus superat medij trientem; erit ergo medius 3. N. vt scilicet minimus superet 10. vnitatibus trientem medij. Rursus quia volo maximum medio præstare triente minimi, si addidero medio minimi trientem habebo maximum, nimirum $3\frac{1}{3}$ N. $+3\frac{1}{3}$. Restat vt medius æqualis sit minimo, & maximi trienti. Sed minimus cum triente maximi est $2\frac{2}{3}$. Hoc igitur æquatur medio seu 3 N. Aufero similia à similibus. Ergo $\frac{1}{3}$ N. æquantur $11\frac{1}{3}$. Omnia nouies. Igitur 8 N. æquantur 100.

ΕΤΡΕΙΝ ξῆς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τῆ μέσου ὑπερέχῃ τῷ ἓ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ ἢ μέσος τῆ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τῆ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ ἢ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τῆ τῆ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον τῆ μεγίστου μέρος πλασθῆναι, ὥστε πολλαπλασιάσαντα τῷ ἐλαχίστῳ ποιῆσαι τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμοὺς ἐλάσσονας ἓ ὀξ ἀρχῆς λαμβανομένων τῆ μέσου. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς᾽ ἑνὸς, ᾧ ὢν ὑπερέχει τῆ μέσου ξίτου μέρος μονάδων ι. ἔστω ἄρα ὁ μέσος ςς᾽ ξῆς, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος μονάδας ι τῆ τῆ μέσου τρίτου μέρους. πάλιν ὑπὸ θέλω ἓ μέγιστον τῆ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῆ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τῆ ἐλαχίστου τρίτον μέρος, ἕξω ἓ μέγιστον ςξ Γ. α᾽ μ̄ γ̄ α᾽. λοιπὸν δεῖ ᾗ ἓ μέσον ἴσον εἶ τῷ ἐλαχίστῳ, ἓ τῷ ἓ μεγίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ᾽ ὁ ἐλάχιστος μ̄ῆ τῆ τρίτου μέρους τῆ μεγίστου ἀριθμοί εἰσι β α᾽. ἓ μονάδες ιᾱ α᾽. ταῦτα ἴσα τοῖς τῆ μέσου ἀριθμοῖς τρισίν.

ὑπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀριθμοὶ ἄρα η᾽. ἴσά ἐστι μονάσιν ιᾱ α᾽. πάντα ἐννάκις. ςς᾽ ὀκτὼ ἴσοι μ-

τάσιν ἑκατόν. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄. ιβ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ἡ αὐτὴ δεῖξις τῇ ἐπάνω.

& fit 1 N. 12 ½ & eadem est quæ suprà demonstratio.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EST eadem prorsus quæstio cum præcedente, sed alia operatio. Conditio adiecta eiusdem est naturæ cum ea quæ præcedenti apponitur, & eius necessitas simili ratiocinatione potest deprehendi, sed eodem vitio laborat atque præcedens, nec per eam determinari quicquam potest de quæstione proposita, antequam peracta operatione ad æquationem peruentum sit. Quare melius præscribetur sic.

Oportet denominatorem partis medij maiorem esse numero qui sit si eiusdem denominatoris aucti parte vnitatis à parte minimi denominata, sumatur pars à parte maximi denominata, vnitate aucta.

Canon etiam ab hac operatione formari posset, sed intricatus. Quare cum huiusmodi Canones vix vsui esse possint ob eorum perplexitatem, illis supersedere satius erit.

QVÆSTIO XXV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς, ἑαυτῷ δὲ δῷ μέρος τὸ ὑποτεταγμένον. ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑποτεταγμένω δὴ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ δεδόσθαι ἑαυτῷ τὸ ἕβδομον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ ἕβδομῳ τὸ τέταρτον. καὶ ἔτι τὸν ἕβδομον τῷ πρώτῳ τὸ πέμπτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μὴ τελὰ ἀντιδόσιν. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τινῶν ἕβδομον ἐχόντων μέρος, ἑπτὰ ἕβδομον δίδωσιν. ἔστω δὴ ἀριθμὸς τεσσ. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἑπτὰ τέταρτον δίδωσιν. ἔστω δὴ μονάδων τεσσάρων, καὶ μένει ὁ δεύτερος δοὺς & λαβὼν ς̄ ἑνὸς μ̄ ἕβδομον. λοιπὸν ὄντι τῷ πρώτου δόντα & λαβόντα γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτῷ τὸ ἕβδομον ς̄ ἵνα λαβὼν δὲ μονάδας ἕξ λείπει ἀριθμὸν ἑνὸς, γίνεται ς̄ ἑνὸς, μ̄ χ̄. μονάδες ἄρα ἕξ λείπει ς̄ ἑνὸς πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ ἕβδομου. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ μ̄ ιε̄ λείπει ςξ̄ ε̄. διὸ ἄρα καὶ τὸ τρίτου δόντα μὲν ἑαυτῷ τὸ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ τριῶν. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτῷ τὸ πέμπτον μονάδας τρεῖς λείπει ς̄ ἑνὸς, λοιπός ὄντι μονάδων ιβ̄ λείπει ςξ̄ δ̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεται μ̄ ιη̄ λείπει ςξ̄ δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάδι τεσσὶ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ β̄. ἐπὶ ταὺς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ δ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ ε̄. & φανερὰ τὰ τῆς ἀποστάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum si quisque proximè ipsum sequenti sui partem quæ mandatur dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt fiat æqualitas. Statutum sit vt primus secundo det sui trientem; secundus tertio sui quadrantem; Tertius primo sui quintantem, & post mutuam hanc contributionem fiant æquales. Ponatur primus quotlibet numerorum qui trientem habeant, quandoquidem daturus est trientem, esto itaque 3. N. Statuatur secundus quotlibet vnitatum quæ quadrantem habeant, quia daturus est quadrantem; esto itaque vnitatum 4. & erit secundus datis & acceptis quæ imperata sunt 1 N. + 3. Restat vt & primus vbi dederit acceperitque, fiat 1 N. + 3. sed dans sui trientem 1 N. accipiens autem 3 − 1 N. fit 1 N. + 3. Igitur 3 − 1 N. est quinta pars tertij. ipso ergo tertius est 15 − 5 N. Oportet ergo & tertium dantem quidem sui quintantem, accipientem verò à secundo quadrantem illius, nempe vnitatem, fieri 1 N. + 3. sed dans sui quintantem, nimirum 3 − 1 N. relinquitur 12 − 4 N. Accipiens autem à secundo quadrantem, puta vnitatem, fit 13 − 4 N. Hoc ergo æquatur 1 N. + 3. & fit 1 N. 2. Ad positione. Erit primus 6. secundus 4. tertius 5. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XXV.

HÆC quæstio infinitas recipit solutiones, vt patet, cùm posito primo 3 N. poni possit pro secundo quilibet vnitatum numerus. Eodemque modo si ponas secundum 4 N. poni poterit tertius

tertius quilibet vnitatum numerus. Et ſi ponatur tertius 5 N. ponetur primus ad libitum quilibet vnitatum numerus.

Quod ſi determinare velis huiuſmodi quæſtiones ad vnicam ſolutionem, præſcribendus eſt numerus in quo fieri debet æqualitas, vt ſi proponatur quæſtio hoc modo. Sint inueniendi tres numeri, ita vt primus impertiendo ſui triente ſecundum, ſecundus ſui quadrante tertium. Tertius ſui quintante primum, poſt hanc mutuam contributionem quilibet trium numerorum inueniatur eſſe 10. Tunc autem ſic erit operandum. Eſto primus 3 N. qui dando ſui trientem ſecundo, remanebit 2 N. Quare cùm accipiendo quintantem tertij; debeat eſſe 10. Erit quintans tertij 10 — 2 N. ac proinde ipſe tertius 50 — 10 N. qui dando ſui quintantem remanet 40 — 8 N. vnde cùm accipiendo quadrantem ſecundi, debeat eſſe 10. erit vtique quadrans ſecundi 8 N. — 30. ac proinde ipſe ſecundus 32 N — 120. ſupereſt vt ſecundus dando ſui quadrantem, & accipiendo trientem primi, fiat etiam 10. fit autem 25 N. — 90. Igitur 25 N. — 90. æquantur 10. & fit 1 N. 4. Ad poſitiones. Erit primus 12. ſecundus 8. tertius 10. Ab hac quæſtione parum differunt decima octaua & decima nona ſecundi vt fuſius eo loco docebimus, ita vt videantur hinc eò tranſlatæ.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE quatuor numeros quorum quilibet proximè ſequenti ſe, det ſui partem quæ imperabitur, ita vt dantes & accipientes fiant æquales. Imperatum ſit primum ſecundo dare ſui trientem; ſecundum tertio dare ſui quadrantem; tertium quarto, ſui quintatem; Quartum primo, ſui ſextantem, vt poſt hanc mutuam contributionem fiant æquales. Ponatur primus aliquot numerorum trientem habentium, quoniam trientem daturus eſt ſitque 3 N. ſecundus autem ponatur aliquot vnitatum quadrantem habentium, quandoquidem quadrantem daturus eſt, ſitque 4. ſecundus igitur dans ſui quadrantem, nempe 1. & accipiens primi trientem, puta 1 N. fit 1 N. + 3. Oportet ergo & primum cùm dederit ſui trientem 1 N. & acceperit ſextantem quarti fieri 1 N. + 3. ſed cùm dedit 1 N. relinquitur 2 N. oportet igitur hoc adſcito, ſextantem quarti fieri 1 N + 3. Quamobrem 3 — 1 N. eſt ſextans quarti, atque ipſe quartus eſt 18 — 6 N. Reſtat vt & quartus dato ſui ſextante, & accepto quintante tertij, fiat 1 N. + 3. ſed dato ſui ſextante, nempe 3 — 1 N. remanet 15 — 5 N. Oportet igitur hunc adſumentem quintantem tertij fieri 1 N. + 3 ſed ſi adſumat 6 N. — 12. fit 1 N. + 3. Igitur 6 N — 12. eſt quintans tertij. Ipſe ergo tertius eſt 30 N — 60. Oportet ergo & tertium dato ſui quintante, accepto vero quadrante ſecundi

ἘΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὰς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδῷ μέρος τὸ ὑπιταχθέν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες ὁμοῖοι ὦσι. ὑπιτετάχθω ὁ μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἕβδομον. ὁ δὲ δεύτερος τὸ ἕβδομον τῷ τέταρτον. τὸν δὲ ἕβδομον τῷ τετάρτῳ τὸ πέμπτον. καὶ ἔτι ὁ τέταρτος τῷ πρώτῳ τὸ ἕκτον, καὶ γένεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. πετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν ἕβδομον μέρος ἐχόντων ἐπὶ τρίτον δίδωσιν. ἔστω ἀριθμῶν τριῶν. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων πασῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπὶ τέταρτον δίδωσιν, ἔστω μ̄ δ̄. ὁ ἄρα δεύτερος δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἵνα γένηται ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. δίδωσι ἄρα καὶ ὁ πρῶτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἵνα, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον γίνεσθαι ἀριθμῶν ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ς̄ ἵνα λοιποὺς ἔχει ἀριθμὰς δύο. δίδωσι ἄρα τὸ τοῦ τετάρτου ἕκτον λαβόντα αὐτὸν γένεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. μονάδες ἄρα ἓξὶς λείψει ς̄ ἑνὸς ἕκτου μέρους εἰσὶ τοῦ τετάρτου. αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται μ̄ ιη̄ λείψει ἓξ ς̄ λοιπὸν ὄζι καὶ τὸν τέταρτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ πέμπτον γένεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον μονάδας ἓξὶς λείψει ς̄ ἑνὸς, λοιπὸς ὄζι μ̄ ιη̄ λείψει ἓξ ς̄. δίδωσι ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ τρίτου πέμπτον γένεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ αὖ λάβῃ ἀριθμὰς ς̄ λείψει μ̄ ιβ̄ γίνεται ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. οἵτε ἀριθμοὶ ς̄ λείψει μ̄ ιβ̄. πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ἓξ λ̄ λείψει μ̄ ξ̄. δίδωσι ἄρα καὶ ὁ τρίτον δόντα μὲν τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον γένεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον ἀριθμὰς ς̄ λείψει μ̄ ιβ̄. λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς κδ̄ λείψει μ̄ μϊ̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον

γίνεται ις̄ καὶ λείψει μ̄ μζ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἰσομέροις τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ρ̄ εἰκοσιτρίτων. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ρ̄, εἰκοσιτρίτων. ὁ δὲ δεύτερος ριβ̄, εἰκοσιτρίτων. ὁ δὲ τρίτος ρκ̄, εἰκοσιτρίτων, ὁ δὲ τέταρτος ριδ̄ εἰκοσιτρίτων, τριπλάσιον τὸ μόριον. ἔσται δηλαδὴ ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ρ̄ ὁ δὲ δεύτερος ριβ̄. ὁ δὲ τρίτος ρκ̄. ὁ δὲ τέταρτος ριδ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

fieri 1 N. + 3. sed dato sui quintante, puta 6 N. — 12. remanet 24 N — 48. Accepto autem secundi quadrante fit 24 N. — 47. Hoc ergo æquale est 1 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{47}{23}$ Ad positiones erit primus $\frac{1}{23}$ secundus $\frac{47}{23}$. tertius $\frac{41}{23}$. quartus $\frac{5}{23}$ Abiiciatur denominator partium. Erit itaque primus 150. secundus 92. tertius 120. quartus 114. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XXVI.

EADEM ratio est huius quæstionis, quæ & præcedentis. Quæstio infinitas recipit solutiones, & si determinanda sit ad vnicam, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, tunc que operabimur vt in præcedente traditum est. Quod autem denominatores abiici iubet Diophantus, vt solutio in integris habeatur, id fit quia si inuenti semel numeri quæstioni satisfacientes, per eundem multiplicentur vel diuidantur, producta itidem & quotientes quæstionem soluent, cuius rei ratio est quam attingit Xilander, quia scilicet quæsiti numeri, partes proportionales vicissim dant & accipiunt, quæ autem partium cognominum eadem totorum inter se, ac vicissim est ratio. Vnde etiam colligi potest alius modus soluendi huiusmodi quæstiones, cùm numerus præscribitur in quo fiat æqualitas. Nam si quæstio prius soluatur per operationem Diophanti, & numerus in quo fit æqualitas diuidatur per eum qui præscribitur, & per quotientem diuidantur item inuenti numeri per operationem Diophanti, habebuntur quæsiti numeri. Verbi gratia, si quærantur quatuor numeri dantes & accipientes easdem partes quas requirit Diophantus, ita vt facta contributione quilibet repetiatur 59. $\frac{1}{2}$ solues prius quæstionem cum Diophanto, & inuenies numeros 150. 92. 120. 114. Et numerus in quo fit æqualitas erit 119. Hunc ergo si diuidas per numerum præscriptum 59. $\frac{1}{2}$ erit quotiens 2. per quem si diuidas sigillatim inuentos numeros, fient 75. 46. 60. 57. quæsiti numeri. Posset etiam tam hæc quàm præcedens paulò aliter proponi, requirendo scilicet vt facta mutua contributione fiant numeri, diuersi non æquales. Verbi gratia, sint inueniendi quatuor numeri vt primus dando sui trientem & accipiendo sextantem quarti fiat 6. Secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi fiat 7. Tertius dando sui quintantem, & accipiendo quadrantem secundi fiat 14. Quartus dando sui sextantem, & recipiendo quintantem tertij, fiat 23. Et tunc imitabimur artificium operationis quæ ad præcedentem tradita est, hoc modo. Ponatur primus 3 N. cum ergo multatus suo triente & auctus sextante quarti faciat 6. erit 6 — 2 N. sextans quarti, & ipse quartus 36 — 12 N. vnde ablato sextante, manent 30. — 10 N. quæ cùm quintante tertij debent facere 23. Igitur quintans tertij est 10 N. — 7. Ideoque ipse tertius est 50 N. — 35. qui multatus quintante manet 40 N — 28. debetque tunc cum quadrante secundi facere 14. Quare 42 — 40 N. est quadrans secundi, & ipse secundus 168 — 160 N. vnde ablato quadrante manent 126 — 120 N. quæ cum triente primi debent facere 7. sed faciunt 126 — 119 N. hoc ergo æquatur 7. & fit 1 N. 1. Ad positiones primus est 3. secundus 8. tertius 15. quartus 24.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος σὺν τῷ λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ὁπωσοῦν, καὶ γίνωνται ἴσοι. διατετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον σὺν τοῖς λοιποῖς δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον σὺν τοῖς λοιποῖς δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον παρὰ τοῖς λοιποῖς δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ πέμπτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους. πεπάχθω ὁ προῶτος ς̄ ἑνός, οἱ δὲ λοιποὶ δύο μοιρῶν ποιῶν τὴν προσκείμενον ἕνικα τρίτου μέρος ἐχουσῶν, ἐπὶ τρίτον διδόασιν. ἴσωται μ̄ γ̄. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. καὶ δὴ ὁ πρῶτος λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ τρί-

INVENIRE tres numeros vt quilibet à reliquis duobus coniunctis partem imperatam accipiat, & fiant æquales. Statutum sit primum à reliquis duobus coniunctis sumere trientem. Secundum à reliquis duobus coniunctis accipere quadrantem. Tertium à reliquis duobus conjunctis sumere quintantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò duo compendij gratia, quia trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet, trientem habentium, sintque 3. Tres ergo numeri simul erunt 1 N. + 3.

& ſanè primus ſumens à reliquis duobus trientem, fit 1 N. + 1. Oportet ergo & ſecundum à duobus reliquis coniunctis ſumpto quadrante fieri 1 N. + 1. Sumantur omnia quater. Quater igitur ſecundus adſcitis duobus reliquis, eſt ter ſecundus adſciſcens ipſos tres numeros. Ter ergo ſecundus adiunctis tribus numeris fit 4 N. + 4. Si igitur inde abſtulero tres numeros relinquuntur 3 N. + 1. quod eſt ter ſecundus, ipſe ergo ſecundus eſt 1 N. + ⅓ Oportet itaque & tertium ſumpto reliquorum duorum quintante fieri 1 N. + 1. Omnia ſimiliter ſumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N. + ⅗. Supereſt vt tres ſimùl iuncti ſint æquales 1 N. + 3. & fit N. 1½ & omiſſa denominatione partis, fit primus 13. ſecundus 17. tertius 19. & implent poſtulata.

τον, γίνεται ς^η ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεήσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον ωσθῆ τῷ δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^η ἑνὸς μονάδος μιᾶς, πάντα τριάκις. τριάκις ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὼ δύο, τρίς ἐστι ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὰς ἕξ. τρὶς ἄρα ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὰς ἕξ γίνεται ἀριθμοὶ δ μονάδες δ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τούτων ἀφέλω τὰς ἕξ. λοιποὶ ἀριθμοὶ ἕξ μονὰς μιὰ τρίς ἐστι ὁ δεύτερος. αὐτὸς ἄρα ὁ δεύτερος, ἴσαι ς^η ἑνὸς, μονάδος τρίτου. δεήσει ἄρα κ) τὸν τρίτον ωσθῆ τ δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς^η ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα ὁμοίως πεντάκις, κ) συναγέται διὰ τῆ ὁμοίωσι ὁ τρίτος ς^η ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. λοιπὸν ἐστὶ τὰς τρεῖς συμπάντας ἴσας γενέσθαι ἀριθμῷ ἑνὶ μονάσι τεσσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ δωδεκάτων. καὶ ἀφαιρεμένου τῦ μορίου. ἴσαι ὁ μὲν πρῶτος μ^ι ιθ. ὁ δὲ δεύτερος μ^ι ιζ. ὁ δὲ τρίτος μ^ι ιδ. καὶ ποιῶσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXVII.

SVMANTVR *omnia quater*, &c. Hæc ſi obſcuriora videantur, ſic poterunt elucidari. Quia oportet ſecundum ſumpto quadrante reliquorum fieri 1 N + 1. ſumendo huius quadruplum patet 4 N + 4. continere quater ſecundum, & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſemel ſumma trium numerorum, nempe 1 N + 3. patet reſiduum 3 N + 1. continere ter ſecundum. Quare fiet ipſe ſecundus 1 N. + ⅓ Similiter quia 1 N. + 1. continet ſemel tertium, & quintantem reliquorum, ſi ſumatur huius quintuplum, patet 5 N. + 5. continere quinquies tertium, & ſemel reliquos. Quare ſi auferatur inde ſumma omnium, nimirum 1 N. + 3. reſiduum 4 N. + 2. erit tertij quadruplum, erit ergo tertius 1 N. + ½ cætera patent.

Hæc etiam quæſtio infinitas ſolutiones recipit, & inuentis ſemel numeris quæſtionem ſoluentibus, quotquot ſumentur in iiſdem rationibus, ij ſatisfacient propoſito, vt ſatis indicat Diophantus cum denominatorem abiicit. Quod ſi præſcribatur numerus in quo fiat æqualitas, iam determinabitur quæſtio ad vnicam ſolutionem. Verbi gratia. Sit propoſitum inuenire tres numeros vt primus cum ⅓ reliquorum faciat 40. Itemque ſecundus cum ¼ reliquorum, & rurſus tertius cum ⅕ reliquorum faciat etiam 40. Ponatur primus 1 N. ergo ⅓ reliquorum erunt 40 − 1 N. Quare ipſa ſumma ſecundi & tertij fiet 60. − 1 ⅓ N. & ſumma omnium 60 − ⅓ N. Itaque cùm 40. contineat ſecundum & ⅓ reliquorum, huius quadruplum 160. continebit quater ſecundum, & ter reliquos, auferatur ergo hinc triplum ſummæ omnium, puta 180 − 1 ⅓ N. remanebit ſecundus 1 ⅓ N. − 20. Similiter quia 40. continet tertium, & ⅕ reliquorum, huius quintuplum, nempe 200. continet quinquies tertium, & quater reliquos, auferatur hinc quadruplum ſummæ omnium, nimirum 240 − 2 N. remanet tertius 2 N. − 40. Supereſt vt huic addendo ⅓ tam primi, quàm ſecundi nempe ⅓ N. & ⅓ N. − 16. fiat 40. fiunt autem 4 N. − 56. æqualia 40. & fit 1 N. 24. Ad hypoſtaſes. Eſt primus 24. ſecundus 16. tertius 8.

Eodem artificio ſoluetur quæſtio, ſi ſinguli numeri cum certa parte aliorum diuerſos conficiant numeros, vt ſi primus cum ½ aliorum faciat 32. ſecundus cum ⅓ aliorū faciat 28 tertius cum ¼ aliorū faciat 31. Ponatur enim primus 1 N. ergo ſemiſſis aliorum eſt 32 − 1 N. ſummaque ipſorū 64 − 2 N. & ſumma omniū 64 − 1 N. Cùm ergo 28. contineat ſecundum & ⅓ reliquorum, huius triplum 84. continet ter ſecundum & ſemel reliquos, quare ſi hinc auferatur ſumma omnium 64 − 1 N. reſiduum 20 + 1 N. erit duplum ſecundi, ac proinde ipſe ſecundus eſt 10 + ½ N. Similiter quia 31. continet tertium & ¼ reliquorum, huius quadruplum 124. continet quater tertium & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſumma omnium 64 − 1 N. reſiduum 60 + 1 N. eſt triplum tertij: ergo ipſe tertius eſt 20 − ¼ N. ſupereſt, vt huic addendo ¼ tam primi quàm ſecundi nempe ¼ N. & 2 ½ + ¼ N. fiat 31. fit autem 22½ + 1/16 hoc ergo æquatur 31. & fit 1. N. 12. Ad poſitiones. Primus eſt 12. ſecundus 16. tertius 24.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὺς ὅπως ἕκαστος πρὸς τῶν λοιπῶν τειῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ὁπιοσοῦν, καὶ γίνωνται ἴσοι. ὑποτάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον πρὸς τῶν λοιπῶν τειῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον πρὸς τῶν λοιπῶν τειῶν ὡς ἑνὸς τὸ τέταρτον, τὸν τρίτον ὁμοίως τὸ πέμπτον. τὸν δὲ τέταρτον τὸ ἕκτον. καὶ γίνεσθαι ἴσους. ὑπάρχω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνός. οἱ δὲ λοιποὶ τρεῖς μονάδων τινῶν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ̄ γ̄. ὁ ἄρα πρῶτος πρὸς τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ τρίτον γίνεται ς̄ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δώσει ἄρα ☾ ϟ δεύτερον πρὸς τῶν λοιπῶν τειῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα πάλιν ὁμοίως ποιήσεις. καὶ συναχθήσεται διὰ τῶν αὐτῶν ὁ μὲν δεύτερος ς̄ ἑνὸς μονάδος τρίτου. ὁ δὲ τρίτος ς̄ ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. ὁ δὲ τέταρτος ς̄ ἑνὸς μονάδος τριῶν πέμπτων. λοιπὸν δεῖ τοὺς τέσσαρας συντεθέντας ἴσους γίνεσθαι ς̄ ἑνὶ μονάδι τρισί. συνάγεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ μζ̄ ἐν μορίῳ ἑνενηκοστῷ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄. μζ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ οζ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ ϡβ̄. ὁ δὲ τέταρτος μ̄ ρᾱ. ☾ πιθανὰ τὰ ὑπ' αὐτὸν προτάσεως.

INVENIRE quatuor numeros, vt quilibet à tribus reliquis coniunctis accipiat partem imperatam, & fiant æquales. Imperatum sit primum à reliquis tribus coniunctis sumere trientem. Secundum a reliquis tribus coniunctis sumere quadrantem. Tertium similiter sumere quintantem. Quartum vero, capere sextantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui vero tres, quandoquidem trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet trientem habentium, puta 3. Primus igitur à tribus reliquis coniunctis sumpto triente fit 1 N. + 1. Oportet ergo & secundum sumpto à reliquis tribus quadrante fieri 1 N. + 1. Rursus omnia vt in præcedenti quater sumantur, & iisdem de causis inuenietur secundus 1 N. + ¼. Tertius verò 1 N. + ⅛. At quartus 1 N. + ⅛. Restat vt quatuor numeri simul iuncti æquentur 1 N. + 3. & fit tandem 1 N. 3/11. Erit ergo primus 47. secundus 77. tertius 92. quartus 101. & hi satisfaciunt proposito.

IN QVÆSTIONEM XXVIII.

EADEM omnia quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent. Vnde apparet simili prorsus artificio extendi posse quæstionem ad quinque, ad sex vel ad plures numeros, siue ea determinetur ad vnicam solutionem, siue non; & siue singuli numeri cum certa parte reliquorum æquales faciant numeros, siue diuersos. Itaque de his satis.

QVÆSTIO XXIX.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὁ μὲν τετράγωνον, ὁ δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, ὅτε σ̄, ☾ ὁ ε̄. καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ς̄ εἷς, καὶ μὲν ὁπὶ τὰς σ̄ μονάδας πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ ς̄ σ̄. ἐὰν δὲ ὑπὸ τὰς ε̄ μονάδας, ποιεῖ ς̄ ε̄. δεῖ δὲ τοῦτον τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τὰς ε̄. ἀριθμὰς τετραγωνίσω, γίνεται δυνάμεις κε̄ ἴσαι ς̄ σ̄. πάντα διὰ ἀριθμοῦ. ἀριθμοὶ ἄρα κε̄ ἴσοι μονάσι σ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ η̄. καὶ ποιεῖ τὰ ὑπ' αὐτὸν προτάσεως.

DVOBVS datis numeris, inuenire aliquem numerum qui in vtrumque ductus, hunc quidem quadratum efficiat, illum verò latus eiusdem quadrati. Sint dati duo numeri 200. & 5. & ponatur is qui quæritur 1 N. qui si ducatur in 200. facit 200 N. At si ducatur in 5. facit 5 N. Oportet autem horum alterum quadratum esse, alterum latus eius; si ergo quadrauero 5 N. fient 25 Q. æquales vtique 200 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 25 N. æquantur 200. & fit 1 N. 8. Ac is quæstioni satisfacit.

IN QVAESTIONEM XXIX.

DVPLEX casus hîc considerari potest, prout tertius quæsitus ductus in vtrumque datorum, productum ex maiore facit quadratum, & ex minore latus quadrati. Vel contrà productum ex minore facit quadratum, & ex maiore latus. In priorem casum incidit æquatio Diophanti. In posteriorem ista. Ponatur 5 N. quadratus, & eius latus 200 N. ergo 5 N. æquantur 40000. Q. & fit 1 N. $\frac{1}{8000}$. qui quæstioni satisfacit. Pro vtroque autem casu fiet vnus Canon vniuersalior eo quem affert Xilander.

Alterum datorum numerorum diuide per quadratum alterius, orietur quæsitus numerus.

Porro quod ait Xilander, si quidem in numeris non surdis & integris quæstio consistat, duos propositos numeros semper esse quadratorum similes, falsissimum est si per propositos numeros, datos ab initio intelligat, vt ex ipso Diophanti exemplo manifestum fit, nam 200. & 5. non sunt plani similes. Si autem intelligat tertium quæsitum, & alterum datorum, id verum est. Semper enim tertius quæsitus & is in quem ille ductus quadratum facit, sunt quadratorum similes. Sed si hoc voluit Xilander obscurè locutus est, & malè ad integros numeros id restrinxit. Quicumque enim sumantur Numeri, idem euenire necesse est, ' cùm ponatur ex eorum mutuo ductu produci quadratum. ' ostani.

Quod autem ait Diophantus, πάντα ἕδος ἀριθμὸν, depressionem specierum intelligit, quam alibi vocat ὑποβιβασμὸν, de qua definitione vndecima actum est. Cùm enim 5 N. sint æquales 25 Q. si vtraque æquationis pars per 1 N. diuidatur, fiunt 5. æquales 25 N. quia scilicet Æquales numeri per eundem numerum diuisi, æquales dant quotientes.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros. Oportet autem inueniendorum numerorum summæ semissis quadratum, quadrato superare productum multiplicationis. Est autem hoc Plasmaticum. Constitutum sit summum efficere 20. at productum multiplicationis 96. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. Et quoniam summa ipsorum est 20. si hanc bifariam secuero, erit pars quælibet diuisionis, seu semissis summæ 10. Et si semissem interualli, puta 1 N. vni parti adiecero, & detraxero ab altera, manebit rursus vtriusque summa 20. & interuallum 2 N. Ponatur ergo maior 1 N. + 10. erit minor 10 − 1 N. & manet summa 20. interuallum 2 N. Restat vt productus multiplicationis sit 96. sed productus ille est 100 − 1 Q. Hoc ergo æquatur 96. & fit 1 N. 2. Est igitur maior 12. minor 8. & satisfaciunt proposito.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ συνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸ διορισθέντων τὸ ἀπὸ τῆς ἡμίσεως τῆ συναμφοτέρω τετράγωνον, τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν. ὑποκείσθω δὴ τοὺς μὲν συνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας ϟϛ̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ϛ̄ᵅ β̄. καὶ ἐπεὶ τὸ συνθεμα αὐτῶν ἐστι μ̄ᵒ κ̄. ἐὰν τοῦ τόπου δίχα. ἔσται ἑκάτερος αὐτῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως. ἥμισυ τοῦ συνθέματος μ̄ᵒ ῑ. καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τουτέστι ϛ̄ᵅ ἑνὶ, ἵνα μὲν τὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως ποιῶ. τὸν δὲ λοιπὸν ἀφῶ, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μ̄ᵒ κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω ἐλάσσων μὲν ὁ μείζων ϛ̄ᵅ ἑνὸς, ἡ δὲ μ̄ᵒ ῑ. τὸν ἥμισυν τοῦ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔστι μ̄ᵒ ῑ. λείψει ϛ̄ᵅ ἑνός. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα μ̄ᵒ κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ̄ᵅ β̄. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϟϛ̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστι μονάδες ρ̄. λείψει δυνάμεως μιᾶς. ταῦτα ἴσα μονάσι ϟϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ᵅ μ̄ᵒ β̄. ἔστι ἄρα ὁ μὲν μείζων μ̄ᵒ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ᵒ η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τοῦ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXX.

DVO indicat conditio apposita. Primum an absolutè possibilis sit quæstio necne, secundum an per numeros rationales solui possit, vel per surdos tantum. Primo enim cùm constet per secundam secundi porismatum. Quadratum semissis summæ duorum numerorum æquari producto multiplicationis eorundem, & quadrato semissis interualli ipsorum, fieri non potest vt productum multiplicationis sit maius quadrato semissis summæ, sed oportet æquale esse, vel minus. Æquale

quidem si æquales sint numeri, nam semissis summæ æqualium numerorum, idem est atque alter ipsorum, ac proinde productum multiplicationis æquatur quadrato eiusdem semissis. Minus vero, si sint inæquales numeri, quia tunc, vt dictum est, productum multiplicationis vnà cum quadrato semissis interualli æquatur quadrato semissis summæ. Quare oportet, vt à quadrato semissis summæ auferendo productum, supersit quadratus semissis interualli. Vnde constat Diophantum per conditionem appositam supponere quæsitos numeros esse inæquales. Deinde patet vt solutio contingat rationalis, oportere vt detracto producto à quadrato semissis summæ, residuum sit quadratus numerus. Nam cum hoc residuum sit quadratus semissis interualli, si residuum illud non sit quadratus numerus, erit interuallum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Verbi gratia, si diuidendus sit 20. in duos numeros, quorum productum sit 98. operando cum Diophanto inueniemus tandem 1 Q. æqualem 2. Quare semissis interualli erit R 2. atque ipsi numeri 10 − R 2. & 10 + R 2. Porro tam ex conditione apposita, quàm ex ipsa operatione elicitur iste Canon.

A quadrato semissis summa, aufer productum multiplicationis, residui radix quadrata, addita & adempta eidem semissi summa, quæsitos exhibebit numeros.

Aliter etiam proponi poterat conditio, nimirum.

Oportet numerorum summæ quadratum, quadrato numero superare quadruplum producti.

Nam vt ostensum est quinta secundi porismatum. Quadratus, summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris, vnà cum quadrato interualli ipsorum. Vnde etiam alius Canon formabitur, nimirum.

Aufer quadruplum producti à quadrato summæ, residui radicem quadratam adde & adime ipsi summæ, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Sed & notatu dignum est ad hanc quæstionem, illam etiam posse reduci.

Dato medio trium proportionalium, & aggregato extremorum, extremos inuenire.

20. *septimi* Vt dato medio 8. & summa extremorum 20. sint inueniendi ipsi extremi. Quia in tribus proportionalibus, planus sub extremis æquatur quadrato medij, cùm medij quadratus sit 64. patet eo reduci propositam quæstionem, vt diuidatur 20. in duos numeros, quorum mutuò ductu fiat 64. Quod idem est cum Diophantæo problemate, & per illud, vel per eius Canones inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Quod autem attinet ad verba illa, ὅτι δὲ τοῦτο πλασματικόν, quæ nos retento Græco vocabulo vertimus, *Est autem hoc plasmaticum*, Xilander verò Diophanti mentem minimè assecutus, malè interpretatur, *Hoc autem est effectum aliunde.* Nos ea explicabimus infra quæstione trigesima tertia.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸν δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τῷ ἀπὸ συναμφοτέρων αὐτῶν τετραγώνῳ ὑπερέχειν τετραγώνῳ. * ὅτι ἡ καὶ τοῦτο πλασματικόν. * ὑπετεάχθω δὴ ἡ μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιοῦν μονάδας κ̄. τὸν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σπ̄. τετάχθω δὴ ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ̄ᵘ β̄ καὶ ἔστω ὁ μείζων ϛ̄ᵘ ἰσὸς καὶ μ̄ᵘ ῑ̄. τῶν ἡμίσεων πάλιν τῶν συναμφοτέρων, ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ᵘ ῑ̄. λείψει ϛ̄ᵘ ἑνός. καὶ μένει πάλιν τὸ σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σπ̄. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις δύο μονάδας σ̄. ταῦτα ἴσα μονάδι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ᵘ μ̄ᵘ β̄. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων μ̄ᵘ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ᵘ η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt & summa ipsorum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum summæ quadratorum, quadrato superare quadratum summæ numerorum. * Et hoc quoque Plasmaticum est. * Imperatum sit summam numerorum esse 20. & summam quadratorum ab ipsis ortorum esse 208. Ponatur itaque interuallum ipsorum 2 N. & esto maior 1 N. + 10. vnitates, quot scilicet continet semissis summæ, minor autem sit 10 − 1 N. & manet rursus eorum summa 20. Interuallum verò 2 N. Supereſt vt summa quadratorum ab ipsis, sit 208. Atqui summa quadratorum facit 2 Q. + 200. Hoc igitur æquale est vnitatibus 208. & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit maior 12. minor 8. & satisfaciunt postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXI.

HIc etiam conditio indicat an possibilis sit quæstio, & an per numeros rationales solui possit, idémque prorsus dicit quod septima secundi porismatum, nimirum. Quadratus summæ duorum numerorum & quadratus interualli eorum æquantur duplo aggregati quadratorum. Quare vt quæstio sit possibilis necesse est duplum aggregati quadratorum, esse maius quadrato summæ, nisi propositi numeri sint æquales, tunc n. duplum quadratorum æquabitur quadrato summæ. ' Quia quadratus summæ æquatur quadratis numerorum & duplo ducti, at cum numeri sunt æquales, duplum ducti æquatur ipsis quadratis. Quare in hoc casu quadratum summæ æquatur duplo quadratorum. Vt vero solutio sit rationalis necesse est duplum quadratorum excedere quadratum summæ, quadrato numero, cum enim hic excessus sit quadratus interualli numerorum, vt docuimus, si huiusmodi excessus non sit quadratus, erit interuallum numerorum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Cæterùm ex hac conditione sic explicata pendet Canon à Xilandro traditus, nimirum. 4. secundi.

A duplo aggregati quadratorum, aufer quadratum summa numerorum, residui latus quadratum adde & adime ipsi summa numerorum, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet summam quadratorum superare duplum quadrati semissis summa numerorum duplo quadrati numeri.

Quia enim per sextam secundi porismatum constat summam quadratorum duplam esse quadratorum qui fiunt à semisse summæ laterum, & à semisse interualli eorumdem, patet si à summa quadratorum, auferatur duplum quadrati à semisse summæ numerorum, residuum æquari duplo quadratis semissis interualli numerorum. Itaque ex hac etiam conditione sic explicata, & ex ipsamet Diophanti operatione elicietur alter Canon.

A summa quadratorum aufer duplum quadrati semissis summa numerorum, residui semissis latus quadratum additum vel ademptum ipsi semissi numerorum, quæsitos dabit numeros.

Verba autem illa, ὅτι δὲ καὶ τῶν πλασματικῶν, hîc, vt arbitror, subreptitia sunt, vt ad trigesimam tertiam fusius docebo, nolui tamen ea de textu tollere, ne audax plus æquo vel temerarius alicui forte viderer, sed ea asteriscis includere satis habui.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, datos faciant numeros. Constitutum sit summam numerorum esse 20. Interuallum verò quadratorum ab ipsis ortorum esse 80. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. erit similiter maior 1 N. + 10. Minor autem 10 − 1 N. & manet rursus summa ipsorum 20. interuallum verò 2 N. supereſt vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sit 80. sed interuallum quadratorum ab ipsis est 40 N. Hoc ergo æquatur 80. & fit rursus maior 12. Minor 8. & soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. ὑποτετάχθω δὴ τῶν μὲν συνθέσει αὐτῶν ποιῶν μονάδας κ̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ̄ β̄. ἔσαι ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ϛ̄ ἴσος μ̄ ᾱ. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ ῑ, λείψει ϛ̄ ἴσος. καὶ μίσει πάλιν τὸ μὲν σύνθετον αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ̄ β̄. λοιπὸν ὅτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ μ̄ π̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἐστὶν ϛ̄ μ̄. ταῦτα ἴσα μονάδι π̄. καὶ σωάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μ̄ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ η̄. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXII.

HIc nulla opus est conditione vt solutio contingat rationalis, semper enim, dum quæstio sit possibilis eam per numeros rationales solui continget, verum vt sit possibilis sanè aliqua limitatione indiget, quicquid dicat Scholiastes, quam ego ita concipio.

[*Oportet excessum quadrati super quadratum minorem esse quadrato summæ numerorum.*

Cuius necessitas euidens est, quia ' Quadratus summæ æquatur ipsis quadratis numerorum, & duplo producti, quare nisi pars ponatur æqualis toti, vel etiam maior, impossibile est interuallum 4. secundi.

per vnicam tantum positionem, etiam sine auxilio regulæ quantitatis, quicquid dicat Xilander. Quod ita fiet. Ponatur primus 1 N. ergo secundus & tertius simul erunt 4 N. & trium summa 5 N. quæ si diuidatur in duas partes, quarum altera alterius sit tripla, habebimus hinc tertium, inde summam primi & secundi. Diuidemus autem 5 N. in duas partes seruantes proportionem triplam per Canonem secundæ huius, eruntque 1 ¼ N & 3 ¾ N. est ergo primus 1 N. tertius 1 ¼ N. & siue à summa secundi & tertij quæ est 4 N. auferatur tertius, siue à summa primi & secundi quæ est 3 ¾ N. auferatur primus, remanet secundus 2 ½ N. Omnes autem simul faciunt 5. N. Igitur 5 N. æquantur 100. & fit 1 N. 20. Ad hypostases, erit primus 20. secundus 55. tertius 25. & constat.

QVÆSTIO XXIII.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὕπως ὁ μέγιστος τῦ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ ὴ μέσος τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τῦ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ ὴ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τῦ τῦ μέσου δοθέντος μέρους. δεῖ δὴ τὸν μέσον τῦ ἐλαχίστου, τοσούτῳ μέρει τῦ μεγίστου ὑπερέχειν, ὥστε τὸν ὁμώνυμον τῦ τοιούτου μέρους ὅπερ ὑπερέχει τῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάχιστον πολλαπλασιαζόμενον, ποιεῖν ἐν αὐτῷ πλῆθος ἀριθμῶν πλεῖον, ἢ ἐν τῷ μέσῳ. ὑπεταχθω δὴ τὸν μέγιστον τῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῦ ἐλαχίστου τρίτῳ, τὸν ὴ μέσον τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τ μεγίστου ἥμισυ, τὸν ὴ ἐλάχιστον ὑπερέχειν μονάδας ῑ τῦ τῦ μέσου τρίτου μέρους. τετάχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ς̄ ἴνος, ᾧ ὢν ὑπερέχει τῦ μέσου τρίτου μονάδων ῑ. ὁ ἄρα μέσος ἔσαι ἀριθμῶν τριῶν, ἵνα ἔχῃ ὁ ἐλάχιστος τὸ τρίτον τῦ μέσου καὶ μονάδας ῑ. ἢ καὶ ἅπας. τετάχθω ὁ μέσος ἀριθμοὶ ξεῖς, ᾧ ἐπὶ θέλω τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχειν τῦ τρίτῳ μέρει τῦ μέσου μ̄ ῑ. ἔσαι ς̄ ἴνος, καὶ μ̄ ῑ. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν μέσον τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχειν τῷ τ πρώτου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέσος τῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει ς̄ν δυσὶ λείψει μ̄ ῑ. ταῦτα ἄρα τρίτον μέρος ἐστὶ τῦ μεγίστου, αὐτὸς ἄρα ὁ μέγιστος ἔσαι ις̄ ε̄ λείψει μ̄ λ̄. δεῖσῃ ἄρα καὶ τ μέγιστον τῦ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῦ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ' ὁ μέγιστος τῦ μέσου ὑπερέχει ις̄ν ξεισὶ λείψει μ̄ λ̄. ταῦτα ἄρα τρίτον ἐστὶ μέρος τῦ ἐλαχίστου, ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσαι ἀριθμῶν τ λείψει μ̄ δ. ἀλλὰ καὶ ἀριθμῶ ἴνος μ̄ ῑ ἐμέτρει. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ ιβ̄. καὶ ἥμισυ. ἔσαι ἄρα ὁ μὲν τρίτος μ̄ κβ̄ καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέσος λζ̄. καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μέγιστος μ̄ μ̄. καὶ ποιῦσι τὰ τῆς ὑποτάσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum maximus medium excedat minimi data parte; medius minimum superet maximi data parte. At minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem medium tanta parte maximi præstare minimo, vt denominatore partis illius ducto in id quo medius excedit minimum, maior in eo existat Numerorum multitudo, quàm in medio. Constitutum sit maximum medio præstare, triente minimi. Medium autem minimo superaddere trientem maximi. Minimum denique superare trientem medij 10. vnitatibus. Ponatur itaque minimus 1 N. & 10. vnitatum quibus præstare debet triente medij. Erit ergo medius 3 N. vt contineat minimus trientem medij & vnitates 10. vel sic. Ponatur medius 3 N. & quia volo minimum superare trientem medij decem vnitatibus, erit minimus 1 N. + 10. Restat vt medius minimum superet maximi triente, sed quo medius minimum superat est 2. N. — 10. hoc ergo est triens maximi, ipse igitur maximus est 6 N. — 30. Oportet itaque & maximum medio præstare, triente minimi, sed quo maximus medium excedit est 3 N. — 30. hoc ergo est triens minimi, minimus ergo est 9 N. — 90. sed & repertus est 1 N. + 10. Quamobrem fit 1 N. 12. ½ erit igitur tertius 22 ½. Medius 37 ½. Maximus 45. & satisfaciunt propositio.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPORTET *autem medium* &c. Refertur hæc conditio ad Algebricos numeros nota N. affectos, & eius necessitas ita demonstrari potest. Quia Diophantus ponit pro medio certam Numerorum multitudinem, erit & minimus certa Numerorum multitudo + certis vnitatibus, quia videlicet minimus est certa pars medij + certis vnitatibus. Quare medius excedet minimum certa mul-

titudine Numerorum — certis vnitatibus, cùm enim in medio nullæ sint vnitates absolutæ, non poterunt ab eo subtrahi vnitates quæ sunt in minimo, nisi per signum —. Cùm ergo excessus iste medij supra minimum sit certa pars maximi, vt habeatur maximus, ducetur hic excessus in denominatorem partis, fietque maximus constans ex multitudine Numerorum — certis vnitatibus. Necesse est autem vt hæc Numerorum multitudo existens in maximo, sit maior Numerorum multitudine existente in medio, alioquin si ponatur minor vel æqualis, cum præterea adiunctum habeat defectum vnitatum, sequetur maximum minorem esse medio. Quod est absurdum. Quæ omnia ex ipsamet Diophanti operatione manifesta sunt. Sed (quod pace Diophanti dictum velim) hæc conditio, parum congruenter assignata videtur. Etenim cùm quæstioni apponitur conditio, id fit vt per eam agnoscamus vtrum possibilis sit quæstio, necne, ne videlicet oleum operamque perdamus circa impossibilem frustra operantes, ac proinde talis esse debet conditio, vt ante ipsam operationem naturam quæstionis nobis aperiat. Quod sane non præstat hæc Diophanti conditio, cùm per eam non nisi iam prouecta operatione, de statu quæstionis iudicium fieri possit. Itaque solitum authoris acumen hîc desidero. Certè non erat difficile legitimam conditionem præscribere, hoc modo.

Oportet denominatorem partis medy minorem esse numero, qui fit ex eodem denominatore vnitate multato in denominatorem partis maximi.

Canonem hîc si formare libet, necesse erit eum perplexiorem fieri, hoc scilicet modo.

Duc inter se denominatores partium maximi & minimi, & productum vnitate auctum ducito in datum numerum, productúmque diuide per solidum sub tribus denominatoribus multatum vnitate & numero qui fit ex denominatore partis minimi in summam aliorum duorum denominatorum. Quotienti adde datum numerum, fiet minimus quæsitorum. Et eundem quotientem ducito in denominatorem partis medij, fiet ipse medius.

Verbi gratia debeat maximus superare medium quarta parte minimi. Medius minimum sexta parte maximi. minimus quintam partem medij numero 12. ducito inter se 4. & 6. producto 24. adde 1. fit 25. quem ducito in 12. fit 300. quem diuide per solidum sub denominatoribus 5. 6. 4. multatum vnitate & producto ex 4. in summam aliorum, hoc est diuide 300. per 75. fit 4. cui si addas 12. fit minimus quæsitorum 16. & si ducas 4. in denominatorem 5. fiet 20. medius, vnde facile est reperire maximum 24. cùm sit sextuplus ad interuallum medij & minimi.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros vt maximus medium superet, minimi data parte. Medius minimum excedat, maximi data parte. Minimus dato numero superet datam medij partem. Oportet autem maximi talem partem dari, vt adiecta minimo, numeros pauciores conficiat iis qui pro medio numero ab initio ponebantur. Ponatur rursus minimus 1 N. & 10. vnitates quibus superat medij trientem 3 erit ergo medius 3. N. vt scilicet minimus superet 10. vnitatibus trientem medij. Rursus quia volo maximum medio præstare triente minimi, si addidero medio minimi trientem habebo maximum, nimirum $3\frac{1}{3}$ N. $+3\frac{1}{3}$. Restat vt medius æqualis sit minimo, & maximi trienti. Sed minimus cum triente maximi est $2\frac{1}{3}$. Hoc igitur æquatur medio seu 3 N. Aufero similia à similibus. Ergo $\frac{1}{3}$ N. æquantur $11\frac{1}{3}$. Omnia nouies. Igitur 8 N. æquantur 100.

ΕΤΡΕΙΝ ξῆς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ μέγιστος τῆ μέσου ὑπερέχῃ τῷ τ̄ ἐλαχίστου δοθέντι μέρει. ὁ δ̓ μέσος τῆ ἐλαχίστου ὑπερέχῃ τῷ τῆ μεγίστου δοθέντι μέρει. ὁ δ̓ ἐλάχιστος δοθέντι ἀριθμῷ τῆ τῆ μέσου δοθέντος μέρους· δεῖ δὴ τὸν διδόμενον τῆ μεγίστου μέρος τηλικοῦτον δίδεσθαι, ὥστε προσλιθέμενον τῷ ἐλαχίστῳ ποιεῖν τοὺς ἐν αὐτῷ ἀριθμοὺς ἐλάσσονας τ̄ ὀξ ἀρχῆς λαμβανομένων τῆ μέσου. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς̄ ἑνὸς, ᾧ ὧν ὑπερέχει τῆ μέσου ξ̄ίτου μέρος μονάδων ῑ̄. ἔσται ἄρα ὁ μέσος ςε̄ ξῆς, ἵνα ὑπερέχῃ ὁ ἐλάχιστος μονάδας ῑ̄ τῆ τῆ μέσου τρίτου μέρους. πάλιν ἐπεὶ θέλω τ̄ μέγιστον τῆ μέσου ὑπερέχειν τῷ τῆ ἐλαχίστου τρίτῳ μέρει, ἐὰν προσθῶ τῷ μέσῳ τῆ ἐλαχίστου τρίτον μέρος, ἕξω τ̄ μέγιστον ςξ̄ γ̄. α^{ν} μ^{α} γ^{ν} α^{ν}. λοιπὸν δεῖ ᾗ τ̄ μέσον ἴσον εἶ τῷ ἐλαχίστῳ, ϗ τῷ τ̄ μεγίστου τρίτῳ μέρει. ἀλλ̓ ὁ ἐλάχιστος μ̄ τῆ τρίτου μέρους τῆ μεγίστου ἀριθμοῦ εἰσι β^{α}. ϗ μονάδες ιᾱ α^{ν}. ταῦτα ἴσα τοῖς τῆ μέσου ἀριθμοῖς τρισίν.

Διὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀριθμοὶ ἄρα η^{ν}. ἴσά ἐστι μονάσι ιᾱ α^{ν}. παντα ἐννάκις. ςε̄ ὀκτὼ ἴσοι μ-

νάσιν ἑκατόν. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄. ιβ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ἡ αὐτὴ δεῖξις τῇ ἐπάνω.

& fit 1 N. 12 ½ & eadem est quæ suprà demonstratio.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EST eadem prorsus quæstio cum præcedente, sed alia operatio. Conditio adiecta eiusdem est naturæ cum ea quæ præcedenti apponitur, & eius necessitas simili ratiocinatione potest deprehendi, sed eodem vitio laborat atque præcedens, nec per eam determinari quicquam potest de quæstione proposita, antequam peracta operatione ad æquationem peruentum sit. Quare melius præscribetur sic.

Oportet denominatorem partis medij maiorem esse numero qui sit si eiusdem denominatoris aucti parte vnitatis à parte minimi denominata, sumatur pars à parte maximi denominata, vnitate aucta.

Canon etiam ab hac operatione formari posset, sed intricatus. Quare cum huiusmodi Canones vix vsui esse possint ob eorum perplexitatem, illis supersedere satius erit.

QVÆSTIO XXV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὰς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς, ἑαυτοῦ δεδῷ μέρος τὸ ὑποτεταγμένον. ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἑαυτοῦ τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. καὶ ἔτι τὸν τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ πέμπτον, καὶ γενέσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τινῶν τρίτον ἐχόντων μέρος, ἐπεὶ τρίτον δέδωσιν. ἔστω δὴ ἀριθμὸς τριῶν. ὁ δὲ δευτέρῳ μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τέταρτον δέδωκεν. ἔστω δὴ μονάδων τεσσάρων, καὶ μένει ὁ δεύτερος δοὺς καὶ λαβὼν ς̄ ἑνὸς μ̄ τριῶν. λοιπὸν ὄντι τῷ πρώτου δόντα καὶ λαβόντα γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ς̄ ἵνα λαβὼν δὲ μονάδας τρεῖς λείπει ἀριθμῷ ἑνὸς, γίνεται ς̄ ἑνὸς, μ̄ γ̄. μονάδες ἄρα τρεῖς λείπει ς̄ ἑνὸς πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἐστὶ μ̄ ιε̄ λείπει ςς̄ ε̄. διπλῆ ἄρα καὶ ὁ τρίτον δεδωκὼς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ τριῶν. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον μονάδας τρεῖς λείπει ς̄ ἑνὸς, λοιπός ὄντι μονάδων ιβ̄ λείπει ςς̄ δ̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, γίνεται μ̄ ιγ̄ λείπει ςς̄ δ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἑνὶ μονάδι τεσσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ β̄. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ς̄. ὁ δὲ δευτέρῳ μ̄ δ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ ε̄. ὃ ἔφαμεν τὰ τῆς ἀσκήσεως.

INVENIRE tres numeros, quorum si quisque proximè ipsum sequenti sui partem quæ mandatur dederit, inter eos qui dederunt & acceperunt fiat æqualitas. Statutum sit vt primus secundo det sui trientem; secundus tertio sui quadrantem; Tertius primo sui quintantem, & post mutuam hanc contributionem fiant æquales. Ponatur primus quotlibet numerorum qui trientem habeant, quandoquidem daturus est trientem, esto itaque 3. N. Statuatur secundus quotlibet vnitatum quæ quadrantem habeant, quia daturus est quadrantem; esto itaque vnitatum 4. & erit secundus datis & acceptis quæ imperata sunt 1 N. + 3. Restat vt & primus vbi dederit acceperitque, fiat 1 N. + 3. sed dans sui trientem 1 N. accipiens autem 3 − 1 N. fit 1 N. + 3. Igitur 3 − 1 N. est quinta pars tertij. ipso ergo tertius est 15 − 5 N. Oportet ergo & tertium dantem quidem sui quintantem, accipientem verò à secundo quadrantem illius, nempe vnitatem, fieri 1 N. + 3. sed dans sui quintantem, nimirum 3 − 1 N. relinquitur 12 − 4 N. Accipiens autem à secundo quadrantem, puta vnitatem, fit 13 − 4 N. Hoc ergo æquatur 1 N. + 3. & fit 1 N. 2. Ad positione. Erit primus 6. secundus 4. tertius 5. & constat propositum.

IN QVAESTIONEM XXV.

HÆC quæstio infinitas recipit solutiones, vt patet, cùm posito primo 3 N. poni possit pro secundo quilibet vnitatum numerus. Eodemque modo si ponas secundum 4 N. poni poterit

tertius

tertius quilibet vnitatum numerus. Et ſi ponatur tertius 5 N. ponetur primus ad libitum quilibet vnitatum numerus.

Quod ſi determinare velis huiuſmodi quæſtiones ad vnicam ſolutionem, præſcribendus eſt numerus in quo fieri debet æqualitas, vt ſi proponatur quæſtio hoc modo. Sint inueniendi tres numeri, ita vt primus imperticndo ſui triente ſecundum, ſecundus ſui quadrante tertium. Tertius ſui quintante primum, poſt hanc mutuam contributionem quilibet trium numerorum inueniatur eſſe 10. Tunc autem ſic erit operandum. Eſto primus 3 N. qui dando ſui trientem ſecundo, remanebit 2 N. Quare cùm accipiendo quintantem tertij, debeat eſſe 10. Erit quintans tertij 10 — 2 N. ac proinde ipſe tertius 50 — 10 N. qui dando ſui quintantem remanet 40 — 8 N. vnde cùm accipiendo quadrantem ſecundi, debeat eſſe 10. erit vtique quadrans ſecundi 8 N. — 30. ac proinde ipſe ſecundus 32 N — 120. ſupereſt vt ſecundus dando ſui quadrantem, & accipiendo trientem primi, fiat etiam 10. fit autem 25 N. — 90. Igitur 25 N. — 90. æquantur 10. & fit 1 N. 4. Ad poſitiones. Erit primus 12. ſecundus 8. tertius 10. Ab hac quæſtione parum differunt decima octaua & decima nona ſecundi vt fuſius eo loco docebimus, ita vt videantur hinc eò tranſlatæ.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE quatuor numeros quorum quilibet proximè ſequenti ſe, det ſui partem quæ imperabitur, ita vt dantes & accipientes fiant æquales. Imperatum ſit primum ſecundo dare ſui trientem; ſecundum tertio dare ſui quadrantem; tertium quarto, ſui quintatem; Quartum primo, ſui ſextantem, vt poſt hanc mutuam contributionem fiant æquales. Ponatur primus aliquot numerorum trientem habentium, quoniam trientem daturus eſt ſitque 3 N. ſecundus autem ponatur aliquot vnitatum quadrantem habentium, quandoquidem quadrantem daturus eſt, ſitque 4. ſecundus igitur dans ſui quadrantem, nempe 1. & accipiens primi trientem, puta 1 N. fit 1 N. + 3. Oportet ergo & primum cùm dederit ſui trientem 1 N. & acceperit ſextantem quarti fieri 1 N. + 3. ſed cùm dedit 1 N. relinquitur 2 N. oportet igitur hoc adſcito, ſextantem quarti fieri 1 N + 3. Quamobrem 3 — 1 N. eſt ſextans quarti, atque ipſe quartus eſt 18 — 6 N. Reſtat vt & quartus dato ſui ſextante, & accepto quintante tertij, fiat 1 N. + 3. ſed dato ſui ſextante, nempe 3 — 1 N. remanet 15 — 5 N. Oportet igitur hunc adſumentem quintantem tertij fieri 1 N. + 3 ſed ſi adſumat 6 N. — 12. fit 1 N. + 3. Igitur 6 N — 12. eſt quintans tertij. Ipſe ergo tertius eſt 30 N — 60. Oportet ergo & tertium dato ſui quintante, accepto vero quadrante ſecundi

ΕΤΡΕΙΝ τέτταρας ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ δίδῳ μέρος τὸ ὁπισθενόν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες ἡρώνται ἴσοι. ὑποτάσσω τὸν μὲν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι ἕβδομον. τὸν δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον τῷ τετάρτῳ τὸ πέμπτον. καὶ ἔτι τὸν τέταρτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕκτον, καὶ ἡμίσεσθαι ἴσους μετὰ τὴν ἀντίδοσιν. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμῶν τινῶν ἕβδομον μέρος ἐχόντων ὑπὸ τρίτον δίδωσιν. ἔστω ἀριθμῶν τεσσάρων. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων τινῶν τέταρτον μέρος ἐχουσῶν, ὑπὸ τέταρτον δίδωσιν, ἔστω μ̄ δ̄. ὁ ἄρα δεύτερος δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ τέταρτον μονάδα μίαν, λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἵνα γένηται ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. δείσει ἄρα καὶ τὸν πρῶτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ τρίτον ἀριθμὸν ἵνα, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τετάρτου τὸ ἕκτον γίνεσθαι ἀριθμῶν ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ς̄ ἵνα λοιπους ἔχει ἀριθμοὺς δύο. δείσει ἄρα τὸ τοῦ τετάρτου ἕκτον λαβόντα αὐτὸν γένεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. μονάδες ἄρα ξεῖς λείψει ς̄ ἑνὸς ἕκτον μέρος εἰσὶ τοῦ τετάρτου. αὐτὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται μ̄ ὧν λείψει ςξ̄ ϛ̄ λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν τέταρτον δόντα μὲν ἑαυτοῦ τὸ ἕκτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ τρίτου τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸν ἕκτον μονάδας ξεῖς λείψει ς̄ ἑνὸς, λοιπὸς ὅτι μ̄ ὧν λείψει ςξ̄ ε̄. δείσει ἄρα αὐτὸν καὶ λαβόντα τὸ τοῦ τρίτου πέμπτον γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ αὖ λάβῃ ἀριθμοὺς ε̄ λείψει μ̄ ιβ̄ γίνεται ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. οἵτε ἀριθμοὶ ε̄ λείψει μ̄ ιβ̄. πέμπτον μέρος εἰσὶ τοῦ τρίτου. αὐτὸς ἄρα ἔσται ςξ̄ λ̄ λείψει μ̄ ξ̄. δείσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον δόντα μὲν τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον, λαβόντα δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. ἀλλὰ δοὺς μὲν ἑαυτοῦ τὸ πέμπτον ἀριθμοὺς ε̄ λείψει μ̄ ιβ̄. λοιποὺς ἔχει ἀριθμοὺς κδ̄ λείψει μ̄ μη̄. λαβὼν δὲ παρὰ τοῦ δευτέρου τὸ τέταρτον

γίνεται ις̄ καὶ λείψει μ̄ μς̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμῷ ἐπὶ μηδὲν τρισί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ϙ̄ εἰκοσιτρίτων. ὅτι τὰς ὑποστάσεις. ἔστι ὁ μὲν πρῶτος ρν̄, εἰκοσιτρίτων. ὁ δὲ δεύτερος ϡβ̄, εἰκοσιτρίτων. ὁ δὲ τρίτος ρκ̄, εἰκοσιτρίτων, ὁ δὲ τέταρτος ριδ̄ εἰκοσιτρίτων, σεσημείωται τὸ μόριον. ἔσται δηλαδὴ ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ρν̄ ὁ δὲ δεύτερος ϡβ̄. ὁ δὲ τρίτος ρκ̄. ὁ δὲ τέταρτος ριδ̄. καὶ ποιοῦσι τὰς τῆς προτάσεως.

fieri 1 N. + 3. sed dato sui quintante, puta 6 N. — 12. remanent 24 N — 48. Accepto autem secundi quadrante fit 24 N. — 47. Hoc ergo æquale est 1 N. + 3. & fit 1 N. ♯ Ad positiones erit primus ♯ secundus ♯. tertius ♯. quartus ♯. Abiiciatur denominator partium. Erit itaque primus 150. secundus 92. tertius 120. quartus 114. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XXVI.

EADEM ratio est huius quæstionis, quæ & præcedentis. Quæstio infinitas recipit solutiones, & si determinanda sit ad vnicam, præscribendus est numerus in quo fieri debet æqualitas, tuncque operabimur vt in præcedente traditum est. Quod autem denominatores abiici iubet Diophantus, vt solutio in integris habeatur, id fit quia si inuenti semel numeri quæstioni satisfacientes, per eundem multiplicentur vel diuidantur, producta itidem & quotientes quæstionem soluent, cuius rei ratio est quam attingit Xilander, quia scilicet quæsiti numeri, partes proportionales vicissim dant & accipiunt, quæ autem partium cognominum eadem totorum inter se, ac vicissim est ratio. Vnde etiam colligi potest alius modus soluendi huiusmodi quæstiones, cùm numerus præscribitur in quo fiat æqualitas. Nam si quæstio prius soluatur per operationem Diophanti, & numerus in quo fit æqualitas diuidatur per eum qui præscribitur, & per quotientem diuidantur item inuenti numeri per operationem Diophanti, habebuntur quæsiti numeri. Verbi gratia, si quærantur quatuor numeri dantes & accipientes easdem partes quas requirit Diophantus, ita vt facta contributione quilibet repetiatur 59. ½ solues prius quæstionem cum Diophanto, & inuenies numeros 150. 92. 120. 114. Et numerus in quo fit æqualitas erit 119. Hunc ergo si diuidas per numerum præscriptum 59. ½ erit quotiens 2. per quem si diuidas sigillatim inuentos numeros, fient 75. 46. 60. 57. quæsiti numeri. Posset etiam tam hæc quàm præcedens paulò aliter proponi, requirendo scilicet vt facta mutua contributione fiant numeri, diuersi non æquales. Verbi gratia, sint inueniendi quatuor numeri vt primus dando sui trientem & accipiendo sextantem quarti fiat 6. Secundus dando sui quadrantem, & accipiendo trientem primi fiat 7. Tertius dando sui quintantem, & accipiendo quadrantem secundi fiat 14. Quartus dando sui sextantem, & recipiendo quintantem tertij, fiat 23. Et tunc imitabimur artificium operationis quæ ad præcedentem tradita est, hoc modo. Ponatur primus 3 N. cum ergo multatus suo triente & auctus sextante quarti faciat 6. erit 6 — 2 N. sextans quarti, & ipse quartus 36 — 12 N. vnde ablato sextante, manent 30. — 10 N. quæ cùm quintante tertij debent facere 23. Igitur quintans tertij est 10 N. — 7. Ideoque ipse tertius est 50 N. — 35. qui multatus quintante manet 40 N — 28. debetque tunc cum quadrante secundi facere 14. Quare 42 — 40 N. est quadrans secundi, & ipse secundus 168 — 160 N. vnde ablato quadrante manent 126 — 120 N. quæ cum triente primi debent facere 7. sed faciunt 126 — 119 N. hoc ergo æquatur 7. & fit 1 N. 1. Ad positiones primus est 3. secundus 8. tertius 15. quartus 24.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅτους ἕκαστος αὐτῶν τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λάβῃ μέρος τὸ ὁπισχνεῖται, καὶ γίνωνται ἴσοι. ὑποτάσσω δὴ τὸν μὲν πρῶτον αὐτὸν τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον αὐτὸν τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τέταρτον. τὸν δὲ τρίτον παρὰ τῶν λοιπῶν δύο ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ πέμπτον, καὶ γίνεσθαι ἴσους. ὑποτάσσω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνός, οἱ δὲ λοιποὶ δύο μονάδων ποιοῦσι τῶν πρώτου ἕνατον μέρος ἑξήκοντα, ἐπὶ τρίτον διδόασιν. ἴσονται μ̄ γ̄. οἱ ἄρα τρεῖς ἔσονται ς̄ ἑνὸς μ̄ γ̄. καὶ δὴ ὁ πρῶτος λαβὼν παρὰ τῶν λοιπῶν δύο τὸ τρί-

INVENIRE tres numeros vt quilibet à reliquis duobus coniunctis partem imperatam accipiat, & fiant æquales. Statutum sit primum à reliquis duobus coniunctis sumere trientem. Secundum à reliquis duobus coniunctis accipere quadrantem. Tertium à reliquis duobus conjunctis sumere quintantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò duo compendij gratia, quia trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet, trientem habentium, sintque 3. Tres ergo numeri simul erunt 1 N. + 3.

& ſanè primus ſumens à reliquis duobus trientem, fit 1 N. + 1. Oportet ergo & ſecundum à duobus reliquis coniunctis ſumpto quadrante fieri 1 N. + 1. Sumantur omnia quater. Quater igitur ſecundus adſcitis duobus reliquis, eſt ter ſecundus adſciſcens ipſos tres numeros. Ter ergo ſecundus adiunctis tribus numeris fit 4 N. + 4. Si igitur inde abſtulero tres numeros relinquuntur 3 N. + 1. quod eſt ter ſecundus, ipſe ergo ſecundus eſt 1 N. + $\frac{1}{3}$ Oportet itaque & tertium ſumpto reliquorum duorum quintante fieri 1 N. + 1. Omnia ſimiliter ſumantur quinquies, & eadem ratione inuenietur tertius 1 N. + $\frac{1}{5}$. Supereſt vt tres ſimùl iuncti ſint æquales 1 N. + 3. & fit N. $\frac{11}{2}$ & omiſſa denominatione partis, fit primus 13. ſecundus 17. tertius 19. & implent poſtulata.

τον, γίνεται ς^{ε} ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δεῖσει ἄρα καὶ τὸν δεύτερον σὺν τῷ δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς^{ε} ἑνὸς μονάδος μιᾶς, πάντα τετράκις. τετράκις ἄρα ὁ δεύτερος συνλαβὼν τοὺς δύο, τρίς ἐστι ὁ δεύτερος συνλαβὼν τοὺς ἕξις. τρὶς ἄρα ὁ δεύτερος συνλαβὼν τοὺς ἕξις γίνεται ἀριθμοὶ δ̄ μονάδες θ̄. ἐὰν ἄρα λάβω τοῦτον ἀπὸ πάντων τοὺς ἕξις. λοιποὶ ἀριθμοὶ ἕξις μονάς μία τρίς ἐστι ὁ δεύτερος. αὐτὸς ἄρα ὁ δεύτερος, ἴσται ς^{ε} ἑνὸς, μονάδος τρίτου. δεῖσει ἄρα καὶ τὸν τρίτον σὺν τῷ δύο ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ πέμπτον γίνεσθαι ς^{ε} ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα ὁμοίως πεντάκις, καὶ συνάγεται διὰ τῆς ὁμοίων ὁ τρίτος ς^{ε} ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. λοιπὸν ἐστι τοὺς τρεῖς συνπάντας ἴσους γενέσθαι ἀριθμῷ ἐπὶ μονάσι τεσσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιθ̄ δωδεκάτων. καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ μορίου. ἴσται ὁ μὲν πρῶτος μ^{ι} ιη̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ι} ιζ̄. ὁ δὲ τρίτος μ^{ι} ιθ̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

IN QVAESTIONEM XXVII.

SVMANTVR *omnia quater*, &c. Hæc ſi obſcutiora videantur, ſic poterunt elucidari. Quia oportet ſecundum ſumpto quadrante reliquorum fieri 1 N + 1. ſumendo huius quadruplum patet 4 N + 4. continere quater ſecundum, & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſemel ſumma trium numerorum, nempe 1 N + 3. patet reſiduum 3 N + 1. continere ter ſecundum. Quare fiet ipſe ſecundus 1 N. + $\frac{1}{3}$ Similiter quia 1 N. + 1. continet ſemel tertium, & quintantem reliquorum, ſi ſumatur huius quintuplum, patet 5 N. + 5. continere quinquies tertium, & ſemel reliquos. Quare ſi auferatur inde ſumma omnium, nimirum 1 N. + 3. reſiduum 4 N. + 2. erit tertij quadruplum, erit ergo tertius 1 N. + $\frac{1}{2}$ cætera patent.

Hæc etiam quæſtio infinitas ſolutiones recipit, & inuentis ſemel numeris quæſtionem ſoluentibus, quotquot ſumentur in iiſdem rationibus, ij ſatisfacient propoſito, vt ſatis indicat Diophantus cùm denominatorem abiicit. Quod ſi præſcribatur numerus in quo fiat æqualitas, iam determinabitur quæſtio ad vnicam ſolutionem. Verbi gratia. Sit propoſitum inuenire tres numeros vt primus cum $\frac{1}{3}$ reliquorum faciat 40. Itemque ſecundus cum $\frac{1}{4}$ reliquorum, & rurſus tertius cum $\frac{1}{5}$ reliquorum faciat etiam 40. Ponatur primus 1 N. ergo $\frac{1}{3}$ reliquorum erunt 40 − 1 N. Quare ipſa ſumma ſecundi & tertij fiet 60. − 1 $\frac{1}{3}$ N. & ſumma omnium 60 − $\frac{1}{3}$ N. Itaque cùm 40. contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ reliquorum, huius quadruplum 160. continebit quater ſecundum, & ter reliquos, auferatur ergo hinc triplum ſummæ omnium, puta 180 − 1 $\frac{1}{3}$ N. remanebit ſecundus 1 $\frac{1}{3}$ N. − 20. Similiter quia 40. continet tertium, & $\frac{1}{5}$ reliquorum, huius quintuplum, nempe 200. continet quinquies tertium, & quater reliquos, auferatur hinc quadruplum ſummæ omnium, nimirum 240 − 2 N. remanet tertius 2 N. − 40. Supereſt vt huic addendo $\frac{1}{3}$ tam primi, quàm ſecundi nempe $\frac{1}{3}$ N. & $\frac{4}{3}$ N. − 16. fiat 40. fiunt autem 4 N. − 56. æqualia 40. & fit 1 N. 24. Ad hypoſtaſes. Eſt primus 24. ſecundus 16. tertius 8.

Eodem artificio ſoluetur quæſtio, ſi ſinguli numeri cum certa parte aliorum diuerſos conficiant numeros, vt ſi primus cum $\frac{1}{2}$ aliorum faciat 32. ſecundus cum $\frac{1}{3}$ aliorũ faciat 28 tertius cum $\frac{1}{4}$ aliorũ faciat 31. Ponatur enim primus 1 N. ergo ſemiſſis aliorum eſt 32 − 1 N. ſummaque ipſorũ 64 − 2 N. & ſumma omniũ 64 − 1 N. Cùm ergo 28. contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ reliquorum, huius triplum 84. continet ter ſecundum & ſemel reliquos, quare ſi hinc auferatur ſumma omnium 64 − 1 N. reſiduum 20 + 1 N. erit duplum ſecundi, ac proinde ipſe ſecundus eſt 10 + $\frac{1}{2}$ N. Similiter quia 31. continet tertium & $\frac{1}{4}$ reliquorum, huius quadruplum 124. continet quater tertium & ſemel reliquos. Quare ſi inde auferatur ſumma omnium 64 − 1 N. reſiduum 60 + 1 N. eſt triplum tertij: ergo ipſe tertius eſt 20 − $\frac{1}{4}$ N. ſupereſt, vt huic addendo $\frac{1}{4}$ tam primi quàm ſecundi nempe $\frac{1}{2}$ N. & 2 $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ N. fiat 31. fit autem 22$\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ N. hoc ergo æquatur 31. & fit 1. N. 12. Ad poſitiones. Primus eſt 12. ſecundus 16. tertius 24.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμὸὺς ὅπως ἕκαστος αὐτῶν τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνῃ μέρος τὸ ὁπιταχθέν, καὶ γένωνται ἴσοι. ὑπιτάχθω δὴ τὸν μὲν πρῶτον αὐτῶν τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνειν τὸ τρίτον. τὸν δὲ δεύτερον αὐτῶν τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς τὸ τέταρτον, τὸν τρίτον ὁμοίως τὸ πέμπτον. τὸν δὲ τέταρτον τὸ ἕκτον. καὶ γίνεσθαι ἴσους. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνός. οἱ δὲ λοιποὶ τρεῖς μονάδων τινῶν τρίτον μέρος ἐχουσῶν, ἐπεὶ τρίτον διδόασιν. ἔστωσαν μ̄ γ̄. ὁ ἄρα πρῶτος αὐτῶν τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαμβάνων τὸ τρίτον γίνεται ς̄ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. δώσει ἄρα καὶ ὁ δεύτερον αὐτῶν τῶν λοιπῶν τριῶν ὡς ἑνὸς λαβόντα τὸ τέταρτον γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. πάντα πάλιν ὁμοίως πεπράχθω. καὶ συναγεται διὰ τῶν αὐτῶν ὁ μὲν δεύτερος ς̄ ἑνὸς μονάδος τρίτου. ὁ δὲ τρίτος ς̄ ἑνὸς μονάδος ἡμίσεως. ὁ δὲ τέταρτος ς̄ ἑνὸς μονάδος τριῶν πέμπτων. λοιπόν ὅτι τοὺς τέσσαρας συμπθέντας ἴσους γίνεσθαι ς̄ ἑνὶ μονάδι τρισί. συνάγεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ μζ̄ ἐν μορίῳ ἑνενηκοστῷ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄. μζ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ οζ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ ϟβ̄. ὁ δὲ τέταρτος μ̄ ρᾱ. καὶ πεπλήρωται τὰ τοῦ προτάσεως.

INVENIRE quatuor numeros, vt quilibet à tribus reliquis coniunctis accipiat partem imperatam, & fiant æquales. Imperatum sit primum à reliquis tribus coniunctis sumere trientem. Secundum à reliquis tribus coniunctis sumere quadrantem. Tertium similiter sumere quintantem. Quartum verò, capere sextantem, & omnes fieri æquales. Ponatur primus 1 N. reliqui verò tres, quandoquidem trientem dare debent, statuantur vnitatum quotlibet trientem habentium, putà 3. Primus igitur à tribus reliquis coniunctis sumpto triente fit 1 N. + 1. Oportet ergo & secundum sumpto à reliquis tribus quadrante fieri 1 N. + 1. Rursus omnia vt in præcedenti quater sumantur, & iisdem de causis inuenietur secundus 1 N. + ½ Tertius verò 1 N. + ⅓ At quartus 1 N. + ¼ Restat vt quatuor numeri simul iuncti æquentur 1 N. + 3. & fit tandem 1 N. 32/37 Erit ergo primus 47. secundus 77. tertius 92. quartus 101. & hi satisfaciunt proposito.

IN QVÆSTIONEM XXVIII.

EADEM omnia quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent. Vnde apparet simili prorsus artificio extendi posse quæstionem ad quinque, ad sex vel ad plures numeros, siue ea determinetur ad vnicam solutionem, siue non; & siue singuli numeri cum certa parte reliquorum æquales faciant numeros, siue diuersos. Itaque de his satis.

QVÆSTIO XXIX.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς προσευρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς ἑκάτερον πολλαπλασιάσας ποιῇ ὁ μὲν τετράγωνον, ὁ δὲ πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, ὅτε σ̄, καὶ ὁ ε̄. καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος ς̄ εἷς, καὶ ἂν μὲν ᾖ τὰς σ̄ μονάδας πολλαπλασιάσῃ ποιεῖ ς̄ σ̄. ἐὰν δὲ ᾖ τὰς ε̄ μονάδας, ποιεῖ ςς̄ ε̄. δεῖ δὲ τούτων τὸν μὲν εἶναι τετράγωνον, τὸν δὲ πλευρὰν αὐτοῦ. ἐὰν τοίνυν τὰς ε̄. ἀριθμὰς τετραγωνίσω, γίνονται δυνάμεις κε̄ ἴσαι ςς̄ σ̄. πάντα γὰρ ἀριθμὸν. ἀριθμοὶ ἄρα κε̄ ἴσοι μονάσι σ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ η̄. καὶ ποιεῖ τὰ τοῦ προτάσεως.

DVOBVS datis numeris, inuenire aliquem numerum qui in vtrumque ductus, hunc quidem quadratum efficiat, illum verò latus eiusdem quadrati. Sint dati duo numeri 200. & 5. & ponatur is qui quæritur 1 N. qui si ducatur in 200. facit 200 N. At si ducatur in 5. facit 5 N. Oportet autem horum alterum quadratum esse, alterum latus eius; si ergo quadrauero 5 N. fient 25 Q. æquales vtique 200 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 25 N. æquantur 200. & fit 1 N. 8. Ac is quæstioni satisfacit.

IN QVAESTIONEM XXIX.

DVPLEX casus hîc considerari potest, prout tertius quæsitus ductus in vtrumque datorum, productum ex maiore facit quadratum, & ex minore latus quadrati. Vel contra productum ex minore facit quadratum, & ex maiore latus. In priorem casum incidit æquatio Diophanti. In posteriorem ista. Ponatur 5 N. quadratus, & eius latus 200 N. ergo 5 N. æquantur 40000. Q. & fit 1 N. $\overline{\text{ō}}$. qui quæstioni satisfacit. Pro vtroque autem casu fiet vnus Canon vniuersalior eo quem affert Xilander.

Alterum datorum numerorum diuide per quadratum alterius, orietur quæsitus numerus.

Porro quod ait Xilander, si quidem in numeris non surdis & integris quæstio consistat, duos propositos numeros semper esse quadratorum similes, falsissimum est si per propositos numeros, datos ab initio intelligat, vt ex ipso Diophanti exemplo manifestum fit, nam 200. & 5. non sunt plani similes. Si autem intelligat tertium quæsitum, & alterum datorum, id verum est. Semper enim tertius quæsitus & is in quem ille ductus quadratum facit, sunt quadratorum similes. Sed si hoc voluit Xilander obscurè locutus est, & malè ad integros numeros id restrinxit. Quicumque enim sumantur Numeri, idem euenire necesse est, ' cùm ponatur ex eorum mutuo ductu produci quadratum. ' oftani.

Quod autem ait Diophantus, πάντα ἐπὶ ἀριθμὸν, depressionem specierum intelligit, quam alibi vocat ὑποβιβασμὸν, de qua definitione vndecima actum est. Cùm enim 5 N. sint æquales 25 Q. si vtraque æquationis pars per 1 N. diuidatur, fiunt 5. æquales 25 N. quia scilicet Æquales numeri per eundem numerum diuisi, æquales dant quotientes.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & productus ex eorum multiplicatione datos efficiant numeros. Oportet autem inueniendorum numerorum summæ semissis quadratum, quadrato superare productum multiplicationis. Est autem hoc Plasmaticum. Constitutum sit summum efficere 20. at productum multiplicationis 96. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. Et quoniam summa ipsorum est 20. si hanc bifariam secuero, erit pars quælibet diuisionis, seu semissis summæ 10. Et si semissem interualli, puta 1 N. vni parti adiecero, & detraxero ab altera, manebit rursus vtriusque summa 20. & interuallum 2 N. Ponatur ergo maior 1 N. + 10. erit minor 10 − 1 N. & manet summa 20. interuallum 2 N. Restat vt productus multiplicationis sit 96. sed productus ille est 100 − 1 Q. Hoc ergo æquatur 96. & fit 1 N. 2. Est igitur maior 12. minor 8. & satisfaciunt proposito.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ συνθεσις αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιεῖ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὲ τὸ διορισμένων τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς συναμφοτέρου τετράγωνον, τοῦ ὑπ' αὐτῶν ὑπερέχειν τετραγώνῳ. ὅρος ἡ τοῦ πλασματικοῦ. ὑποτετάχθω δὴ τοὺς μὲν συνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας $\overline{\text{κ}}$. τὸ δὲ πολλαπλασιασμὸν ποιεῖν μονάδας $\overline{\text{ϛ}}$. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, ϛ^{ος} $\overline{\beta}$. καὶ ἐπεὶ τὸ συνθεμα αὐτῶν ὄζι μ^{ος} $\overline{\text{κ}}$. ἐὰν τοῦτο τέμω δίχα. ἔσται ἑκατέρου τῶν ἐκ τῆς διαιρέσεως. ἥμισυ τοῦ συνθέματος μ^{ος} ι. καὶ τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τούτου ϛ^{ος} $\overline{\text{α}}$, ἵνα, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐκ τῆς διαιρέσεως προσθῶ. τῷ δὲ λοιπῷ ἀφέλω, μένει πάλιν τὸ σύνθεμα μ^{ος} $\overline{\text{κ}}$. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. τετάχθω ἡ μὲν μείζων ϛ^{ος} ἑνὸς καὶ μ^{ος} ι. τοῦ ἡμίσεως τοῦ συνθέματος. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μ^{ος} ι. λείψει ϛ^{ος} ἑνός. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα μ^{ος} $\overline{\text{κ}}$. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ϛ^{ος} $\overline{\beta}$. λοιπὸν ὄζι καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιεῖν μονάδας $\overline{\text{ϛ}}$. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ὄζι μονάδες ρ λείψει δυνάμεως μιᾶς. πάντα ἴσα μονάσι $\overline{\text{ϛ}}$.

καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ος} μ^{ος} $\overline{\beta}$. ἔσται ἄρα ὁ μὲν μείζων μ^{ος} ιβ. ὁ δὲ ἐλάσσων μ^{ος} η. καὶ ποιοῦσι τὰ προτεθέντα.

IN QVAESTIONEM XXX.

DVO indicat conditio apposita. Primum an absolutè possibilis sit quæstio necne, secundum an per numeros rationales solui possit, vel per surdos tantum. Primo enim cùm constet per secundam secundi porismatum. Quadratum semissis summæ duorum numerorum æquari producto multiplicationis eorundem, & quadrato semissis interualli ipsorum, fieri non potest vt productum multiplicationis sit maius quadrato semissis summæ, sed oportet æquale esse, vel minus. Æquale

quidem si æquales sint numeri, nam semissis summæ æqualium numerorum, idem est atque alter ipsorum, ac proinde productum multiplicationis æquatur quadrato eius dem semissis. Minus verò, si sint inæquales numeri, quia tunc, vt dictum est, productum multiplicationis vnà cum quadrato semissis interualli æquatur quadrato semissis summæ. Quare oportet, vt à quadrato semissis summæ auferendo productum, supersit quadratus semissis interualli. Vnde constat Diophantum per conditionem appositam supponere quæsitos numeros esse inæquales. Deinde patet vt solutio contingat rationalis, oportere vt detracto producto à quadrato semissis summæ, reliquum sit quadratus numerus. Nam cum hoc residuum sit quadratus semissis interualli, si residuum illud non sit quadratus numerus, erit interuallum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Verbi gratia, si diuidendus sit 20. in duos numeros, quorum productum sit 98. operando cum Diophanto inueniemus tandem 1 Q. æqualem 2. Quare semissis interualli erit R 2. atque ipsi numeri 10 − R 2. & 10 + R 2. Porro tam ex conditione apposita, quàm ex ipsa operatione elicitur iste Canon.

A quadrato semissis summa, aufer productum multiplicationis, residui radix quadrata, addita & adempta eidem semissi summæ, quæsitos exhibebit numeros.

Aliter etiam proponi poterat conditio, nimirum.

Oportet numerorum summæ quadratum, quadrato numero superare quadruplum producti.

Nam vt ostensum est quinta secundi porismatum. Quadratus, summæ duorum numerorum, æqualis est quadruplo plani sub ipsis numeris, vnà cum quadrato interualli ipsorum. Vnde etiam alius Canon formabitur, nimirum.

Aufer quadruplum producti à quadrato summæ, residui radicem quadratam adde & adime ipsi summæ, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Sed & notatu dignum est ad hanc quæstionem, illam etiam posse reduci.

Dato medio trium proportionalium, & aggregato extremorum, extremos inuenire.

10. *septimi* Vt dato medio 8. & summa extremorum 20. sint inueniendi ipsi extremi. [a] Quia in tribus proportionalibus, planus sub extremis æquatur quadrato medij, cùm medij quadratus sit 64. patet eo reduci propositam quæstionem, vt diuidatur 20. in duos numeros, quorum mutuò ductu fiat 64. Quod idem est cum Diophantæo problemate, & per illud, vel per eius Canones inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Quod autem attinet ad verba illa, ὅ ἐστι δὲ τοῦτο πλασματικὸν, quæ nos retento Græco vocabulo vertimus, *Est autem hoc plasmaticum*, Xilander verò Diophanti mentem minimè assecutus, malè interpretatur, *Hoc autem est effectum aliunde.* Nos ea explicabimus infra quæstione trigesima tertia.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τοὺς δὶς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρων αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετραγώνῳ. * ὅ ἐστι καὶ τοῦτο πλασματικόν. * ὑποκείσθω δὴ ἡ μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας κ̄. τοῦ δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σπ̄. τετάχθω δὴ ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ϛ̄ β̄ καὶ ἔστω ὁ μείζων ϛ̄ ἰσ̄ καὶ μ̄ ῑ̄. τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ ῑ̄. λείψει ϛ̄ ἰσ̄. καὶ μένει πάλιν τὸ σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμοὶ δύο. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας σπ̄. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις δύο μονάδας σ̄. ταῦτα ἴσα μονάδι σπ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ μ̄ β̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν μείζων μ̄ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ η̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt & summa ipsorum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum summæ quadratorum, quadrato superare quadratum summæ numerorum. * Et hoc quoque Plasmaticum est. * Imperatum sit summam numerorum esse 20. & summam quadratorum ab ipsis ortorum esse 208. Ponatur itaque interuallum ipsorum 2 N. & esto maior 1 N. + 10. vnitates, quot scilicet continet semissis summæ, minor autem sit 10 − 1 N. & manet rursus eorum summa 20. Interuallum verò 2 N. Superest vt summa quadratorum ab ipsis, sit 208. Atqui summa quadratorum facit 2 Q. + 200. Hoc igitur æquale est vnitatibus 208. & fit 1 N. 2. Ad positiones. Erit maior 12. minor 8. & satisfaciunt postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXI.

HIc etiam conditio indicat an possibilis sit quæstio, & an per numeros rationales solui possit, idémque prorsus dicit quod septima secundi porismatum, nimirum. Quadratus summæ duorum numerorum & quadratus interualli eorum æquantur duplo aggregati quadratorum. Quare vt quæstio sit possibilis necesse est duplum aggregati quadratorum, esse maius quadrato summæ, nisi propositi numeri sint æquales, tunc n. duplum quadratorum æquabitur quadrato summæ. ' Quia quadratus summæ æquatur quadratis numerorum & duplo ducti, at cum numeri sunt æquales, duplum ducti æquatur ipsis quadratis. Quare in hoc casu quadratum summæ æquatur duplo quadratorum. Vt vero solutio sit rationalis necesse est duplum quadratorum excedere quadratum summæ, quadrato numero, cum enim hic excessus sit quadratus interualli numerorum, vt docuimus, si huiusmodi excessus non sit quadratus, erit interuallum numerorum irrationale, ac proinde & ipsi numeri. Cæterùm ex hac conditione sic explicata pendet Canon à Xilandro traditus, nimirum. 4. secundi.

A duplo agregati quadratorum, aufer quadratum summæ numerorum, residui latus quadratum adde & adime ipsi summæ numerorum, semissis aggregati & residui quæsitos exhibebit numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet summam quadratorum superare duplum quadrati semissis summæ numerorum duplo quadrati numeri.

Quia enim per sextam secundi porismatum constat summam quadratorum duplam esse quadratorum qui fiunt à semisse summæ laterum, & à semisse interualli eorumdem, patet si à summa quadratorum, auferatur duplum quadrati à semisse summæ numerorum, residuum æquari duplo quadratis semissis interualli numerorum. Itaque ex hac etiam conditione sic explicata, & ex ipsamet Diophanti operatione elicietur alter Canon.

A summa quadratorum aufer duplum quadrati semissis summæ numerorum, residui semissis latus quadratum additum vel ademptum ipsi semissi numerorum, quæsitos dabit numeros.

Verba autem illa, ὅτι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν, hîc, vt arbitror, subreptitia sunt, vt ad trigesimam tertiam fusius docebo, nolui tamen ea de textu tollere, ne audax plus æquo vel temerarius alicui forte viderer, sed ea asteriscis includere satis habui.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE duos numeros, vt summa ipsorum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, datos faciant numeros. Constitutum sit summam numerorum esse 20. Interuallum verò quadratorum ab ipsis ortorum esse 80. Ponatur interuallum ipsorum 2 N. erit similiter maior 1 N. + 10. Minor autem 10 − 1 N. & manet rursus summa ipsorum 20. interuallum verò 2 N. superest vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum sit 80. sed interuallum quadratorum ab ipsis est 40 N. Hoc ergo æquatur 80. & fit rursus maior 12. Minor 8. & soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. ὑποτετάχθω δὴ τῶν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιῶν μονάδας κ̄. τὴν δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖν μονάδας π̄. τετάχθω ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ες̄ β̄. ἔσται ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ς̄ ἐπὶ μ̄ ῑ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων μ̄ ῑ̄, λείψει ς̄ ἑνός. καὶ μοῦσι πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν μονάδες κ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ς̄ β̄. λοιπὸν ὅτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῶν μ̄ π̄. ἀλλ' ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἴση ἐς μ̄. ταῦτα ἴσα μονάσιν π̄. καὶ σωάγεται πάλιν ὁ μὲν μείζων μ̄ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μ̄ η̄. καὶ πάλιν ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXII.

HIc nulla opus est conditione vt solutio contingat rationalis, semper enim, dum quæstio sit possibilis eam per numeros rationales solui continget, verum vt sit possibilis sanè aliqua limitatione indiget, quicquid dicat Scholiastes, quam ego ita concipio.

Oportet excessum quadrati super quadratum minorem esse quadrato summæ numerorum.

Cuius necessitas euidens est, quia ' Quadratus summæ æquatur ipsis quadratis numerorum, & duplo ducti, quare nisi pars ponatur æqualis toti, vel etiam maior, impossibile est interuallum 4. secundi.

quadratorum esse æquale vel maius quadrato summæ numerorum. Itaque in exemplo Diophanti posita summa numerorum 20. cùm eius quadratus sit 400. poterit interuallum quadratorum præscribi quilibet numerus minor quàm 400. æqualis, autem vel maior nequaquam. Cæterum ex operatione Diophanti elicitur huiusmodi Canon.

Diuide interuallum quadratorum per duplum summæ numerorum, quotiens additus vel ademptus semissi summæ, dabit quæsitos numeros.

Hoc autem idem fere est quod demonstratum est prop. tertia secundi porismatum. nimirum.

Diuide interuallum quadratorum per summam numerorum, orietur interuallum numerorum.

Data porro summa numerorum & eorum interuallo soluitur quæstio per Canonem primæ huius. Potest etiam aliter institui operatio, & tamen ad æquationem simplicem deuenietur. Esto alter numerorum 1 N. alter 20 − 1 N. horum quadrati sunt 1 Q. & 1 Q. + 400. − 40 N. quorum interuallum est 400 − 40 N. hoc ergo æquatur 80. & fit 1 N. 8. Hinc etiam elicietur Canon alius, priore non deterior.

Quadrato summæ adde vel adime interuallum quadratorum, summam & residuum diuide seorsim per duplum summæ numerorum, orientur quæsiti numeri.

QVÆSTIO XXXIII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν, καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὴ τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ποιεῖν τετράγωνον. ὅζι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν. ὑποκείσθω δὴ τῶν μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν εἶναι μονάδας δ̄. τὸν δὲ πολλαπλασιασμὸν μονάδας ϡ̄ς̄. τετράκις δὲ τὸ συνθεμα αὐτῶν ις̄ β̄. ἴσον μὲν καὶ τῶν ὑπεροχῶν μ̄ δ̄. ἔσται ὁμοίως ὁ μείζων ς̄ ἴσος μ̄ β̄ ὁ δὲ ἐλάσσων ς̄ ἴσος λείψει μ̄ β̄. καὶ μένει τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν ἀριθμοὶ β̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ μονάδες δ̄. λοιπὸν ὅζι ἐστὶν τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ποιεῖν μονάδας ϡ̄ς̄. ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν ὅζι δ̄ ᾱ. γ μ̄ δ̄. ταῦτα ἴσα μ̄ τετράσι ϡ̄ς̄. ἑκὰς γίνεται πάντων ὁ μὲν μείζων μ̄ ιβ̄. ὁ δὲ ἐλάττων μ̄ η̄. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

INVENIRE duos numeros vt interuallum ipsorum, & productum multiplicatione faciant datos numeros. Oportet autem quadruplum producti multiplicationis cum quadrato interualli iunctum, facere quadratum. Et hoc quoque Plasmaticum est. Statutum sit interuallum esse 4. productum vero multiplicationis 96. Ponatur summa ipsorum 2 N. habemus autem & interuallum 4. erit itaque maior 1 N. + 2. Minor 1 N − 2. & manet summa ipsorum 2. N. interuallum 4. Restat vt productum multiplicatione sit 96. est autem huiusmodi productum 1 Q. + 4. Hoc ergo æquatur 96. & fit rursus maior 12. minor 8. & soluunt quæstionem.

IN QVÆSTIONEM XXXIII.

HIC apposita conditio non est ad ostendendum an quæstio sit possibilis, sed tantùm an per numeros rationales solui possit. Etenim non potest absolutè proponi huiusmodi quæstio impossibilis, quodcumque enim præscribatur numerorum interuallum, & qualecumque statuatur productum multiplicationis eorum, soluetur quæstio. Sed vt solutio contingat rationalis, necesse est vt quadruplo producti addendo quadratum interualli, quadratus fiat, quia scilicet, ' quadruplum producti cum quadrato interualli æquatur quadrato summæ numerorum. Hinc autem elicitur Canon à Xilandro traditus. 1. 2. poris.

Quadrato interualli adde quadruplum producti, aggregati latus est summa numerorum, cui si addas & adimas interuallum, semissis summa & residui quæsitos dat numeros.

Poterat etiam aliter proponi conditio, & quidem magis appositè ad operationem Diophanti.

Oportet quadratum semissis interualli additum producto, conficere quadratum.

' Quia scilicet quadratus interualli cum producto, quadratum efficit semissis summæ. Vnde etiam & ex ipsamet operatione Diophanti alium elicimus Canonem. 2. 2. poris.

Adde producto quadratum semissis interualli, aggregati latus est semissis summa numerorum, cui addendo & adimendo semissem interualli, fient quæsiti numeri.

Est etiam notatu dignum non differre quæstionem istam ab illa. *Dato medio trium proportionalium & differentia extremorum, inuenire extremos.* Vt dato medio 8. & interuallo extremorum 12. quærantur extremi. Quia planus sub extremis æquatur quadrato medij, & is est 64. eò reducitur quæstio,

vt

vt inueniantur duo numeri, quorum interuallum sit 12. productum multiplicationis 64. Quod idem est cum quæstione ista Diophanti. Quare per eam vel per Canones allatos inuenientur extremi quæsiti 4. & 16. Superest vt explicem verba illa, ὅρα δὲ τὸ πλασματικὸν, quæ tum huic quæstioni tum trigesimæ & trigesimæ primæ adiecta sunt statim post conditionem, quæque hoc loco dilucidanda recepi. Prius tamen monendus est lector, nec Scholiastem, nec Xilandrum mentem Diophanti assequutum esse, quod cuilibet fiet manifestum qui ea quæ vterque ad trigesimam commentus est legere voluerit. Sanè non vacat in eorum nugis refellendis diutius immorari. Præterea Xilander verba ipsa male reddidit, nam Plasmaticum, interpretatus est, effictum aliunde; cum potius significet id à quo aliud quippiam effingi & plasmari potest. Ego itaque nil aliud voluisse Diophantum aio, quam indicare ex huiusmodi quæstionum solutione, seu ex conditionibus adiectis, vel ex canonibus inde deductis formari & plasmari quodammodo regulas illas quas vocant compositas, cum scilicet ex tribus infimis speciebus, duæ vni æquales reperiuntur, seu vt loquitur Franciscus Vieta, regulas de quadrato affecto sub latere. Etenim prima & secunda illarum regularum, ab hac ipsa quæstione trigesima tertia facilè deducuntur. Tertia verò pendet omnino à trigesima. Quamobrem cum à trigesima prima nulla formetur huiusmodi regula, non dubito eadem verba ibi temerè inculcata esse, ab ipso scilicet Scholiasta, vel imperito amanuensi ex aliis quæstionibus eò translata.

Quomodo autem ab his quæstionibus formentur supradictæ regulæ, non pigebit in tyronum gratiam adscribere, ipsas etiam tradendo regulas, tum eo modo quo communiter absoluuntur, tum eo quem tradit Petrus Nonius ad vitandas Fractiones sæpe commodo, ac denique methodum ipsam Diophanti exhibendo.

PRIMA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati & Numeri æquales vnitatibus.

Fiat prius reductio ad vnum Quadratum per paraboliſmum, diuidendo scilicet singulas æquationis partes per numerum Quadratorum. Tunc capiatur semissis Numerorum, & eius quadrato addantur vnitates, ab aggregati latere auferatur semissis Numerorum, residuum est valor Numeri.

Verbi gratia 2 Q. + 8 N. sint æquales 42. fiet reductio ad 1 Q. diuidendo omnia per 2. fientque 1. Q. + 4 N. æqualia 21. Tunc sumpto semisse Numerorum 2. eius quadratum 4. addo vnitatibus 21. fit 25. cuius latus 5. vnde auferendo semissem Numerorum, remanet 3. valor Numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Facto vt supra paraboliſmo si opus sit. Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum; ab aggregati latere aufer numerum Numerorum, residuum erit valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q + 5 N. sint æquales 24. Quia nullo hic opus est paraboliſmo, quadrato ipsius 5. nimirum ipsi 25. adde quadruplum ipsius 24. nimirum 96. fit 121. cuius latus 11. vnde auferendo 5. remanet 6. duplum numeri, ergo Numerus est 3. vtrumque autem modum ab hac quæstione trigesima tertia deduci sic ostendemus. Ponantur 1 Q. + 4 N. æquales 21. & sit CD 1 N. cui addatur BC ipsi æqualis. Et illis addatur adhuc AB æqualis numero Numerorum, puta 4. Tunc constat ex CD in BC. fieri 1 Q. & ex CD in AB fieri 4 N. Igitur ex CD in totum AC fit 21. Quamobrem cùm notum sit duorum AC. CD. interuallum esse AB, nempe 4. & productum ex eorum multiplicatione esse 21. patet nos eo deduci vt quæramus duos numeros quorum interuallum 4. productum multiplicatione sit 21. Quod ipsum quærit Diophantus quæstione hac trigesima tertia. Minor autem quæsitorum erit CD. seu 1 N. quod inueniendum proponebatur. Itaque si vtamur secundo Canone supra allato, capiemus semissem Numerorum, seu interualli, nempe ipsius 4. & eius quadratum addemus vnitatibus seu producto 21. vnde fient 25. cuius latus 5. vnde si auferantur 2 semissis ipsius 4. remanet 3 minor quæsitorum, seu CD. seu 1 N. vnde patet à secundo illo Canone deduci modum communem perficiendi hanc regulam.

A....B...C...D

Quod si ad inueniendum duos numeros quorum interuallum sit 4. productum 21. vtaris primo Canone supra allato, incides sane in regulam Petri Nonij. Nam quadrato ipsius 4 qui est 16. addes quadruplum ipsius 21. nempe 84. vnde fiet 100. à cuius latere 10. auferes 4. & residuum 6. erit duplum Numeri, nempe ipsius 3.

SECVNDA REGVLA COMPOSITARVM.

Quadrati æquales Numeris & vnitatibus.

Facto si opus sit paraboliſmo, adde vnitatibus quadratum ſemiſſis Numerorum, lateri aggregati adde ipſum ſemiſſem Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 1 Q. ſit æqualis 4 N. + 21. addo ad 21. quadratum ſemiſſis ipſius 4. nempe 4. fit 25. cuius lateri 5. addo ſupradictum ſemiſſem 2. fit 7. valor numeri.

EADEM EX PETRO NONIO.

Quadrato numeri Numerorum adde quadruplum vnitatum, lateri aggregati adde numerum Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 1 Q. ſi æqualis 5 N. + 24. Adde 25. ad quadruplum ipſius 24. nempe ad 96. fit 121. cuius lateri 11. adde 5. fit 16. duplum Numeri. Quare ipſe Numerus eſt 8. Vtrumque modum deriuari quoque ab hac quæſtione trigeſima tertia ſic probabimus. Sit 1 Q. æqualis 4. N. + 21. imprimis patet 1 N. maiorem eſſe quàm 4. numerum Numerorum, nam ex quolibet latere in ſeipſum, vel in numerum ipſo maiorem, fit vel quadratus lateris, vel numerus eodem quadrato maior. Quare ſi 4. eſſet æqualis vel major quàm 1 N. eſſent 4 N. æquales vel maiores quàm 1 Q. ac proinde non poſſet 1 Q. æquari 4 N. + 21. Hoc poſito. Sit A C. 1 N. erit ergo A C maior quàm 4. vt probatum eſt. Sumatur igitur in eo A B 4. & reliquo B C addatur æqualis ei C D.

A....B...C...D

Patet ergo quadratum ex A C eſſe 1 Q. & productum ex A C in A B eſſe 4 N.

2. *ſecundi.* Quare cùm quadratus ex A C ſit æqualis productis ex A C. in A B. & ex A C. in B C. ſeu in C D. ſequitur productum ex A C. in C D. æquari 21. Igitur vt prius quærendi ſunt duo numeri A C. C D. quorum interuallum A B ſeu 4. & productum multiplicationis eſt 21. nam horum maior A C. erit valor numeri. Itaque à duplici Canone, duplex vt ſupra eruitur regula, primæ prorſus ſimilis, finali tantum ſubſtractione in additionem mutata, quia videlicet ibi quærebatur minor numerus C D. Hîc vero quæritur maior A C.

TERTIA REGVLA COMPOSITARVM.

Numeri æquales Quadratis & vnitatibus.

Facto ſi opus ſit Paraboliſmo. A quadrato ſemiſſis Numerorum auſer vnitates, reſidui latus adde vel adime ſemiſſi Numerorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 10 N. ſint æquales 1 Q. + 21. Quadratus ſemiſſis Numerorum eſt 25. vnde ſi auferas 21. vnitates ſupereſt 4. cuius latus 2. ſi addas & adimas ſemiſſi Numerorum 5. fit valor Numeri vel 3. vel 7.

EADEM EX PETRO NONIO.

A quadrato numeri Numerorum auſer quadruplum vnitatum, reſidui latus adde vel adime ipſi numero Numerorum, fiet valor Numeri duplicati.

Verbi gratia 7 N. ſint æquales 1 Q. + 10. à quadrato ipſius 7. puta à 49. auſer quadruplum ipſius 10. nempe 40. ſupereſt 9. cuius latus 3. adde vel adime ipſi 7. fiet vel 4. vel 10. duplum Numeri. Quare Numerus eſt vel 2. vel 5. vtramque regulam deduci à trigeſima quæſtione Diophanti facilè probabitur. Sunto 10 N. æquales 1 Q. + 21. imprimis patet numerum Numerorum 10. maiorem eſſe quàm 1 N. nam ſi eſſet æqualis, vel minor, eo ducto in 1 N. fierent 10 N. æquales 1 Q. vel minores illo. Quare cùm 10 N. præter 1 Q contineant 21. oportet 10. eſſe maiorem quàm 1 N. Hoc poſito ſit A B 10. in quo ſumatur 1 N. A D. vel D B. & ſi ponatur 1 N. A D. conſtat ex A B in A D.

A.....D...B

3 *ſecundi.* fieri 10 N. & quadratum ex A D. eſſe 1 Q. Quare cùm productus ex A B. in A D. ſit æqualis quadrato ex A D. vnà cum producto ex A D. in D B. relinquitur productum ex A D in D B. eſſe 21. Igitur quærendi ſunt duo numeri quorum ſumma ſit 10. productum 21. Eodem modo ſi 1 N. ponatur D B. oſtendemus ex A B. in D B. fieri 10. N. & ex A D. in D B. fieri 21. Quare vt prius quærendi erunt duo numeri, quorum ſumma ſit 10. productum 21. Quod ipſum quærit Diophantus quæſtione trigeſima.

Itaque ſi libeat vti primo Canone ibi allato. Summæ 10. ſemiſſe capto nempe 5. ab illius quadrato

25. auferemus productum 21. & residui 4. latus 2. addemus vel adimemus ipsi 5. & fient quæsiti numeri 7. & 3. quorum alter est A D. alter D B. & vterque valor Numeri esse potest. Qui est primus modus hanc regulam perficiendi. Quod si vtaris secundo Canone, incides in regulam Petri Nonij vt manifestum est. Sed & ex annotatis ad trigesimam patet si quadratus semissis Numerorum æqualis sit vnitatibus, ipsum eundem semissem esse valorem Numeri, signum enim est quæsitos A D. D B. æquales esse.

Cæterum quia Diophantus vt iam monui ad definitionem vndecimam, peculiari vtens methodo, & nunquam adhibens paraboliſmum æquationes resoluit, quomodo id perficiat iam docendum est.

REGVLAE COMPOSITAE EX DIOPHANTO.

Ducito numerum Quadratorum in vnitates, producto adde quadratum semissis Numerorum in prima & secunda regula. vel ab eodem quadrato auter idem productum in tertia regula. Summæ vel residui cape latus; & huic adde vel adime semissem Numerorum in prima vel secunda regula. Contrà semissi numerorum adde vel adime idem latus in tertia regula. Summam vel residuum diuide per numerum quadratorum, fiet valor Numeri.

Verbi gratia 3 Q. + 20 N. sint æquales 52. ducito 3. in 52. fit 156. cui adde 100. quadratum semissis Numerorum, fit 256. cuius latus 16. vnde si auferas 10. remanet 6. quo diuiso per 3. fit 2. valor Numeri, eademque est aliarum regularum ratio. Differt Ergo Diophantæa methodus à communi in hoc solùm, quod in communi diuisio per numerum Quadratorum fit ab initio, in Diophantæa methodo, eadem diuisio fit in fine. Sed demonstrandum est vtramque methodum eodem recidere. Sit enim A numerus quadratorum, & B numerus Numerorum, & C vnitatum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in C. fiat D. sumptoque E semisse ipsius B. eius quadratus F addatur ad D. & fiat G. cuius latus esto H. vnde auferendo E superſit K.
Y 36. K 6. H 21. F 225. G 441. L 9. E 15. D 216.
Deinde per communem methodum diuidandur per A. ipsi A. B. C. vnde fiant vnitas M. & numeri N. P. sumptoque Q. semisse ipsius N. eius quadratus R. addatur ad P. & fiat T. cuius latus esto V. vnde ablato Q. superſit X. Erit ergo vt demonstratum est in prima regula, X. valor numeri. Dico si K. per A. diuidatur produci eundem X. valorem Numeri. Sumatur enim L. quadratus ipsius A. Quoniam ergo M. est vnitas, erunt continuè proportionales L A M. in ratione cuius denominator est A, & rationis ipsius L. ad M. denominator erit L. Cùm autem idem A. ductus in P & in C. producat C & D erit D ad C vt C ad P. & ipsi D C P. erunt proportionales ipsis L A M. eritque D ad P. vt L. ad M. Quare ex L in P. fiet D. Quia etiam A ductus in N. facit B, erit B ad N. vt A ad M. Quare & dimidium E. ad dimidium Q. erit vt A. ad M. Quamobrem & quadratus F. ad quadratum R erit vt L ad M. Igitur vt F ad R. ita est D ad P. Quare & antecedentes simul, puta G. ad consequentes simul, puta ad T. erunt vt L ad M. Ergo rursus latus H. ad latus V. erit vt A. ad M. Itaque cum ostensum sit esse quoque E. ad Q. vt A. ad M. erit vt totus H. ad totum V. ita ablatus E. ad ablatum Q. Quare & reliquus K ad reliquum X erit quoque vt A ad M. Quamobrem diuiso K per A prodibit X. Quod demonstrandum erat.
A 3. B 30. C 72. M 1. N 10. P. 24. R 25. Q 5. T 49. Z 12. X 2. V 7.
17. *septimi.* 12. *septimi.* 21. *septimi.*

Eadem prorsus ratione, idem euenire ostendetur in secunda regula. Nam omnia eodem modo perficiuntur, nisi quod in fine fit additio loco substractionis. Vt in communi methodo, addatur Q ad V. fiet Z valor Numeri. Itaque in Diophantæa methodo addatur E ad H. & fiat Y. dico si Y diuidatur per A. prodire eundem valorem Numeri Z. Cum enim vt ostensum est sit H ad V, sicut E ad Q. erunt & antecedentes simul, puta Y ad consequentes simul, puta ad Z in eadem ratione, quæ eadem est cum ratione A ad M. Quamobrem diuiso Y. per A, orietur Z. Quod erat ostendendum.

Non dissimili ratione ostendetur vtramque methodum conuenire in tertia regula. Sit enim A quadratorum numerus & B vnitatum, & C numerorum. Tunc per Diophantæam methodum ducto A in B fiat D. & semissis ipsius C. esto E cuius quadratus F vnde auferendo D. superſit G. cuius latus H. quo detracto ex E superſit K, & eodem H addito ad eundem E fiat Y. Deinde per communem methodum diuidantur per A ipsi A B C. & fiant M N P. & ipsius P semissis esto Q. cuius quadratus R, vnde auferendo N. superſit T. cuius latus V. quo detracto ex Q superſit X, & eodem V ad Q addito fiat Z. Erit igitur valor Numeri tam X quàm Z. Dico itaque si ipsi K. Y. per A diuidantur prodire eosdem X Z. Nam sumpto L quadrato ipsius A, rursus vt prius ostendemus esse L ad M vt D ad N. sed & est C ad P vt A ad M. ergo rursus semissis E ad semissem Q. est vt A ad M. Quare & quadratus F ad quadratum R est vt L ad M. seu vt D ad N. Quamo-
Y 24. H 9. K 6. G 81. F 225. L 9. D 144. E 15. A 3. B 48. C 30. M 1. N 16. P 10.

R 25. T 9. Q 5.
11. *septimi.* Z 8. V 3. X 2.

brem & reliquus G ad reliquum T est vt L ad M, ac proinde & latus H ad latus V est vt A ad M seu vt E ad Q. Itaque cùm sit E ad Q. vt H ad V. siue addantur H E, itemque Q V. siue detrahatur H ex E itemque V ex Q.' erit rursus compositorum Y & Z, ' Itemque residuorum K & X eadem ratio quæ A ad M. Quare si ipsi Y & K diuidantur per A orientur ipsi Z & X. Quod demonstrandum erat.

21. *septimi.*

Ex his tribus modis absoluendi regulas compositas, eum seliget peritus logista, quem compendiosiorem iudicabit. Sanè si paraboliſmus citrà fractiones fieri possit, communem præstat amplecti methodum, sin secus, Diophantæa compendiosior est. In vtraque porrò si numerus Numerorum sit impar, Nonij methodum adhibere iuuabit, nam ea commodè aptari potest, non minus Diophantææ quàm communi, Vt si 3 Q + 7 N. æquentur 26. ducto 3 in 26. fit 78. & quia numerorum Numerus est impar sumo eius quadratum 49. cui addo quadruplum ipsius 78. puta 312. fitque 361. cuius latus 19. vnde si auferas 7. supereſt 12. quo diuiso per numerum quadratorum 3. fit 4 valor numeri duplicati, ac proinde ipse Numerus est 2. vel si placet diuide 12. per duplum numeri quadratorum, nimirum per 6. fiet statim valor Numeri 2. sed de his satis.

Quoniam vero quærendo duos numeros quorum summa, vel summa quadratorum, vel interuallum, vel interuallum quadratorum, aut productum multiplicationis data sint diuersimodè, multæ aliæ non inelegantes quæstiones fieri possunt, quas omisit Diophantus, libet hic earum nonnullas subiicere, in quibus nobis non erit magnoperè cauendum, ne in regulas compositas æquatio deuoluatur, cùm illæ iam nobis sint familiares, dum per conditiones adiectas innotescat, an in numeris rationalibus solutio contingat.

QVAESTIO PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt summa quadratorum ab iis ortorum, & productus eorum multiplicatione sint quales poscimur. Oportet autem, siue addatur, siue adimatur, summæ quadratorum, duplum producti, fieri vtrimque quadratum.

4. *secundi.* 8. 2. *poris.*

Esto summa quadratorum 34. productum multiplicationis 15. si placet per reductionem ad alias quæstiones, ista variis modis solui potest. ' Quia enim summa quadratorum adscito duplo producti, æquatur quadrato summæ numerorum. ' At summa quadratorum multata duplo producti, relinquit quadratum interualli numerorum; si ad 34. addas 30. fiet 64. quadratus summæ. Quare ipsa summa est 8. Item si à 34. auferas 30. remanet 4. quadratus interualli. Quare ipsum interuallum est 2. Iam ergo per quatuor quæstiones inueniri possunt quæsiti numeri. Primò per trigesimam quærendo duos numeros quorum summa 8. productum 15. Secundò per trigesimam primam quærendo duos numeros quorum summa 8. & summa quadratorum 34. Tertiò per trigesimam tertiam quærendo duos numeros, quorum interuallum 2. productum 15. Quartò denique per primam quærendo duos numeros, quorum summa 8. interuallum 2.

Sed si peculiari operatione rem absoluere placeat. Ponatur interuallum quadratorum 2. N. erunt ipsi quadrati 17 − 1 N. & 17 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 289 − 1 Q. æquale quadrato producti 15. nempe 225. Quare tandem 64. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 8. Ad positiones sunt quæsiti quadrati 25. & 9. quorum latera 5. & 3. sunt quæsiti numeri. Hinc etiam Canonem formare licet.

A Quadrato semissis summæ quadratorum aufer quadratum producti, residui latus additum & ademptum semissi summæ quadratorum, ipsos exhibebit quadratos.

QVAESTIO SECVNDA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & summa quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimur. Oportet autem duplum summæ quadratorum multatum quadrato interualli, relinquere quadratum.

7. 2. *poris.*

Esto interuallum 6. summa quadratorum 68. si per reductionem, quæstionem propositam soluere libet. ' Quia duplum summæ quadratorum, æquatur quadrato summæ numerorum, & quadrato interualli, à duplo ipsius 68. nempe à 136. aufer quadratum ipsius 6. nempe 36. remanet 100. cuius latus 10. est summa numerorum. Iam ergo soluetur quæstio per trigesimam primam, quærendo duos numeros quorum summa 10. & summa quadratorum 68. & rursus per primam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum 6. sed si peculiari est vtendum operatione id ita fiet. Cùm interuallum præscribatur 6. Ponatur alter numerorum 3 + 1 N. alter 1 N − 3. fiet summa quadratorum 18 + 2 Q. æqualis 68. Quare fit 1 N. 5. & sunt quæsiti numeri 8. & 2. Hinc etiam Canon formabitur.

Dimidium quadrati interualli aufer à summa quadratorum, residui semissis latus additum & ademptum semissi interualli quæsitos numeros exhibebit.

Qui sanè Canon prorsus conuenit cum sexta secundi poriſmatum, vt manifestum est.

QVAESTIO TERTIA.

Inueniantur duo numeri, quorum interuallum, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum datos conficiant numeros. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse interuallo quadratorum.

Sit interuallum numerorum 6. interuallum quadratorum 60. si libet vti reductione. ' Quia ex interuallo numerorum in summam eorundem, fit interuallum quadratorum, diuidendo 60. per 6. quotiens 10. erit summa numerorum. Igitur soluetur quæstio per trigesimam secundam quærendo duos numeros, quorum summa 10. interuallum quadratorum 60. Rursus soluetur per primam quærendo duos numeros quorum summa 10. interuallum 6. Sed si peculiarem requiras operationem. Pone minorem quæsitorum 1 N. ergo maior 1 N. + 6. interuallum quadratorum est 36 + 12 N. quod æquatur 60. & fit 1. N. 2. minor numerus. Vel, Pone maiorem 1 N. erit minor 1 N. − 6. Interuallum quadratorum est 12 N. − 36. quod æquatur 60. & fit 1 N. 8. maior numerus. Hinc formatur Canon. 3. 2. *perisi.*

Quadratum interualli numerorum adde & adime interuallo quadratorum, summam & residuum diuide per duplum interualli numerorum, prodibunt quæsiti numeri.

Aliter etiam esto minor 1 N − 3. maior 1 N + 3. fiet interuallum quadratorum 12 N. æquale 60. Quare fit 1 N. 5. & sunt numeri vt prius 2. & 8. Hinc etiam Canon alius formari potest.

Diuide interuallum quadratorum per duplum interualli numerorum, quotienti adde & adime semissem interualli numerorum: habebis quæsitos numeros.

QVAESTIO QVARTA.

Inueniantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione, & interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, sint quales poscimur. Oportet autem quadratum dupli producti additum quadrato interualli quadratorum, efficere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur duplum producti, fiat quadratus.

Esto productus 15. interuallum quadratorum 16. Ponatur summa quadratorum 1 N. Ergo si addatur ei duplum producti ', fiet 1 N. + 30. æquale quadrato summæ numerorum: & si ab 1 N. auferatur idem duplum producti 30. ' fiet 1 N. − 30. æquale quadrato interualli numerorum. Porro ' quia ex interuallo numerorum in summam ipsorum fit interuallum quadratorum, patet ex quadrato interualli numerorum in quadratum summæ, fieri quadratum interualli quadratorum. Quamobrem ex 1 N. − 30. in 1 N. + 30. productus 1 Q. − 900. æquatur quadrato ipsius 16. nempe 256. & fit 1 N. 34. summa quadratorum. Reducetur ergo iam quæstio ad primam istarum quærendo duos numeros, quorum productum 15. summa quadratorum 34. vel etiam ex summa quadratorum 34. & interuallo ipsorum 16. reperientur sigillatim ipsi quadrati 25. & 9. per primam huius libri, vnde & latera 5. 3. innotescent. 4. *secundi,* 4. 2. *perisi.* 3. 2. *perisi.*

Aliter etiam, & facilius institui potest operatio, & alia quoque conditio præscribi. nimirum. Oportet quadratum producti additum quadrato semissis interualli quadratorum facere quadratum, cuius lateri siue addatur siue adimatur semissis interualli quadratorum, fiat item quadratus. Ponatur quadratorum alter 1 N. + 8. alter 1 N. − 8. Sic enim est eorum interuallum 16. Igitur cùm ex quadratorum mutuo ductu fiat quadratus plani sub lateribus, ex 1 N. + 8. in 1 N. − 8. fiet 1 Q. − 64. æquale quadrato producti 15. nempe 225. & fit 1 N. 17. suntque quadrati quæsiti 25. & 9. vnde & ipsa latera 5. & 3. noscuntur. Hinc elicietur huiusmodi Canon.

Quadratum producti adde quadrato semissis interualli quadratorum, summa lateri adde & adime semissem interualli quadratorum, fient quadrati quæsitorum numerorum.

QVAESTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex summa quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem quadruplum aggregati ex producto multiplicationis, & ex summa quadratorum multatum triplo quadrati summæ, relinquere quadratum.

Esto summa 10. aggregatum ex producto & ex summa quadratorum 76. Esto alter numerorum 5 + 1 N. alter 5. − 1 N. erit summa quadratorum 50 + 2 Q. productum multiplicationis 25 − 1 Q. ergo aggregatum horum erit 75 + 1 Q. æquale 76. & fit 1 N. 1. sunt ergo quæsiti numeri 6. & 4. Hinc formatur iste Canon.

Ab aggregato ex ſumma quadratorum & ex producto multiplicationis aufer, dodrantem quadrati ſumma, reſidui latus additum & ademptum ſemiſſi ſumma, quæſitos dabit numeros.

Vel quod idem eſt.

A quadruplo aggregati aufer triplum quadrati ſumma, reſidui latus additum & ademptum ipſi ſumma, præſtabit duplum quæſitorum numerorum.

4. ſecundi. Quod ſi per reductionem velis hoc problema ſoluere. ' Quoniam quadratus ſummæ æquatur ſummæ quadratorum & duplo producti, ſi à quadrato ſummæ 100. auferas 76. compoſitum ex ſumma quadratorum & ex producto ſemel, reſiduum 24. æquabitur producto. Iam ergo tripliciter reducetur quæſtio. Primo ad trigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. productum multiplicationis 24. ſecundo ad trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 10. & ſumma quadratorum 52. nam cognito producto 24. cognoſcitur & ſumma quadratorum auferendo 24. de 76. Tertio ad primam iſtarum quærendo duos numeros quorum productum 24. ſumma quadratorum 52.

QVAESTIO SEXTA.

Dato aggregato ex ſumma quadratorum, & ex producto multiplicationis, datoque altero è duobus numeris, alterum inuenire. Oportet autem datum aggregatum multatum dodrante quadrati dati numeri, relinquere quadratum.

Eſto datum aggregatum 124. alter numerorum 10. Ponatur compoſitum ex quæſito numero & ex ſemiſſe dati 1. N. ergo quæſitus 1 N. – 5. cuius quadratus eſt 1 Q. + 25 – 10 N. At alterius quadratus eſt 100. productum verò multiplicationis ipſorum eſt 10 N. – 50. Quæ omnia ſimul efficiunt 1 Q. + 75. æqualia 124. Quare fit 1 N. 7. ergo quæſitus numerus qui ponebatur 1 N. – 5. erit 2. Hinc elicietur huiuſmodi Canon.

A dato aggregato aufer dodrantem quadrati dati numeri, à reſidui latere aufer ſemiſſem dati numeri, relinquetur quæſitus.

QVAESTIO SEPTIMA.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex producto multiplicationis, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum huius compoſiti vnitate auctum, additum ſummæ quadratorum, efficere quadratum, cui proximè minor quadratus, ablatus à duplo ſummæ quadratorum relinquat etiam quadratum.

Sit ſumma quadratorum 34. Compoſitum ex ſumma numerorum, & ex producto multiplicationis ſit 23. Ponatur ſumma numerorum 1 N. ergo productum eſt 23 – 1 N. cuius duplum 46 – 2 N.
4. ſecundi. quo addito ſummæ quadratorum 34. ' fit 80. – 2 N. æquale quadrato ſummæ 1 Q. & tandem 1 Q. + 2 N. æquantur 80. quæ eſt prima compoſitarum, & fit 1 N. 8. ſumma ſcilicet numerorum. Quare productum multiplicationis eſt 15. Itaque iam reducetur quæſtio ad tres alias. Primò ad trigeſimam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. productum 15. ſecundò ad trigeſimam primam quærendo duos numeros quorum ſumma 8. & ſumma quadratorum 34. tertiò ad primam iſtarum, quærendo duos numeros quorum productum 15. ſumma quadratorum 34. & omnibus modis inuenientur quæſiti numeri 3. & 5. Hinc fiet Canon.

Summa quadratorum adde duplum compoſiti ex ſumma numerorum & ex producto, vnitate auctum. Aggregati latus vnitate multatum, erit ſumma numerorum.

Porro hic & in ſequentibus per quadratum proximè minorem, intelligo illum cuius latus deficit vnitate à latere quadrati cuius ſit mentio.

QVAESTIO OCTAVA.

Inueniantur duo numeri, vt productum multiplicationis eorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem octuplum producti vnitate auctum, additum quadruplo compoſiti conficere quadratum, cui proximè minor quadratus multatus ſedecuplo producti relinquat quadratum.

Eſto productum 6. Compoſitum ex ſumma numerorum & quadratorum 18. Ponatur ſumma numerorum 1 N. ergo ſumma quadratorum 18 – 1 N. cui addendo 12. duplum producti ' fiet 30. –
4. ſecundi. 1 N. æqualis quadrato ſummæ numerorum, puta 1 Q. Quare 1 Q. + 1 N. æquatur 30. & fit 1 N. 5. ſumma ſcilicet quæſitorum numerorum. Quamobrem ſumma quadratorum eſt 13. Itaque iam licet ad tres alias quæſtionem hanc reuocare, ſicut & præcedentem, nimirum ad trigeſimam primam,

& primam iſtarum. Inuenienturque quæſiti numeri 2. & 3. Hinc formatur huiuſmodi Canon.

Quadrupło compoſiti adde octuplum producti vnitate auctum, aggregati latus vnitate multatum, erit duplum ſummæ numerorum.

QVAESTIO NONA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & compoſitum ex eorum interuallo, & ex ſumma quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato compoſito auferendo ſemiſſem quadrati ſummæ, reſidui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Eſto ſumma 8. Compoſitum ex interuallo numerorum, & ex ſumma quadratorum 56. Ponatur minor 4 − 1 N. maior 4 + 1 N. horum interuallū eſt 2 N. ſumma quadratorum 32 + 2 Q. Quare 32 + 2 N. + 2 Q. æquantur 56. & tandem 2 Q + 2 N. ſunt æquales 24. vnde fit 1 N. 3. ſemiſſis interualli, ipſum ergo interuallum eſt 6. ſumma quadratorum 50. Itaque iam ad tres alias reuocabitur quæſtio. Primò ad primam quærendo duos numeros, quorum ſumma 8. interuallum 6. Secundò ad trigeſimam primam quærendo duos numeros, quorum ſumma 8. ſumma quadratorum 50. Tertiò ad ſecundam iſtarum quærendo duos numeros, quorum interuallum 6. ſumma quadratorum 50. & omnibus modis inuenientur quæſiti numeri 1 & 7. Hinc etiam elicitur facilis Canon.

Aufer à dato compoſito ſemiſſem quadrati ſummæ, reſidui duplo adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum ipſorum, & compoſitum ex ſumma numerorum, & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à dato compoſito auferendo ſemiſſem quadrati interualli, reſidui duplum vnitate auctum faciat quadratum.

Eſto interuallum 6. compoſitum ex ſummis numerorum & quadratorum 58. Ponatur ſumma numerorum 2 N. ergo ſumma quadratorum erit 58 − 2 N. ipſi verò numeri 1 N − 3. & 1 N. + 3. vt eorum interuallum maneat 6. Fiet autem ſumma quadratorum 2 Q. + 18. ſed iam erat 58 − 2 N. Igitur 58 − 2 N. æquantur 2 Q. + 18. & tandem 2 Q. + 2 N. æquantur 40. & fit 1 N. 4. ſemiſſis ſummæ numerorum. Eſt ſumma ergo numerorum 8. & ſumma quadratorum 50. Quare rurſus reuocabitur quæſtio ad eaſdem tres ad quas præcedens reduci oſtenſa eſt, & inuenientur quæſiti numeri 1 & 7. fiet etiam Canon.

Aufer à dato compoſito ſemiſſem quadrati interualli, reſidui duplum vnitate auctum quadratus fiet, cuius latus vnitate multatum erit ſumma numerorum.

Non adiicitur hic alia huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt ſumma quadratorum, & compoſitum ex ſumma numerorum & ex eorum interuallo datos conficiant numeros.

Quia facilè citra Algebram ſolui poteſt. Sit enim ſumma quadratorum 50. compoſitum ex ſumma numerorum, & ex eorum interuallo 14. Patet per Canonem primæ libri huius, vel per vigeſimam tertiam primi poriſm. 14. eſſe duplum maioris numeri. Quare ipſe maior numerus eſt 7. cuius quadratum 49. ſi auferas à 50. remanet 1. quadratus minoris.

QVAESTIO VNDECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum ſumma, & aggregatum ex producto multiplicationis & ex interuallo ipſorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt exceſſus quadrati ſemiſſis ſummæ ſuper aggregatum, vnitate auctus conficiat quadratum. Vel vt exceſſus aggregati ſuper quadratum ſemiſſis ſummæ, ab vnitate detractus, relinquat quadratum.

Eſto primum ſumma numerorum 16. aggregatum ex producto & interuallo 56. Ponatur interuallum 2 N. ergo productum erit 56. − 2 N. ipſi verò numeri 8 + 1 N. & 8 − 1 N. quorum productum fit 64 − 1 Q æquale 56 − 2 N. & tandem 2 N. + 8. æquantur 1 Q. vnde fit 1 N. 4. ſemiſſis interualli, ac proinde ipſum interuallum eſt 8. productum 48. Itaque iam reducetur quæſtio ad primam, cum ſumma ſit 16. interuallum 8. vel ad trigeſimam, cum ſumma ſit 16. productum 48. vel ad trigeſimam tertiam, cùm interuallum ſit 8. productum 48. & inuenientur numeri 4. & 12. Deinde eſto ſumma $\frac{1}{2}$ aggregatum ex producto & interuallo $\frac{1}{2}$. Poſito vt prius interuallo 2

N. erit productum $\frac{1}{2}$ − 2 N. ipsi verò numeri $\frac{1}{2}$ + 1 N. & $\frac{1}{2}$ − N. 1 quorum productum sit $\frac{11}{16}$ − 1 Q. æquale $\frac{1}{2}$ − 2 N. & tandem 1 Q. + . $\frac{11}{16}$ æquantur 2. N. & fit 1. N. $\frac{1}{4}$ semissis interualli, ergo ipsum interuallum est $\frac{1}{4}$ productum item $\frac{1}{4}$ & per quæstiones suprà citatas reperientur quæsiti numeri $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}$ Hinc fit iste Canon.

Aufer à quadrato semissis summa datum aggregatum, residuum vnitate auctum est quadratus, cuius latus vnitate auctum est semissis interualli numerorum. Vel.

Aufer à dato aggregato quadratum semissis summa, residuum ab vnitate detractum relinquit quadratum, cuius latus detractum ab vnitate est semissis interualli numerorum.

QVAESTIO DVODECIMA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex summa, & ex producto ipsorum, datos faciant numeros. Oportet autem vt quadrato semissis interualli ad datum aggregatum vnitate auctum adiecto, fiat quadratus.

Esto interuallum 8. aggregatum ex summa & producto 32. Ponatur summa 2 N. ergo productum relinquetur 32 − 2 N. ipsi autem numeri erunt 1 N. + 4 & 1 N. − 4. quorum productum 1 Q. − 16. æquatur 32. − 2 N. & tandem 1 Q. + 2 N. æquatur 48. & fit 1 N. 6. semissis summæ. Ipsa ergo summa est 12. productum 20. Soluetur igitur quæstio per eaſdem per quas superior, & inuenientur quæsiti numeri 2 & 10. & fiet Canon.

Quadrato semissis interualli adde datum aggregatum vnitate auctum, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum erit semissis summa numerorum.

Hic etiam non subiicitur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, quorum productum, & aggregatum ex summa ipsorum & interuallo, datos conficiant numeros.

Etenim nullo negotio absque Algebra soluitur. Esto productum 48. aggregatum summæ & interualli 24. patet per Canonem primæ huius, vel per vigesimam tertiam primi porism. 24. esse duplum maioris numeri. Est ergo maior 12. per quem si diuidas 48. fit minor 4.

QVAESTIO DECIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex producto multiplicationis, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt à quintuplo quadrati semissis summæ auferendo datum aggregatum, supersit quadratus.

Esto summa 12. aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 116. Ponatur minor 1 N. maior 12 − 1 N. interuallum quadratorum erit 144 − 24 N. productum verò 12 N. − 1 Q. quæ iuncta faciunt 144 − 12 N. − 1 Q. æqualia 116. & tandem 1 Q. + 12 N. æquantur 28 & fit 1 N. 2. minor numerus. Ergo maior est 10. Hinc formatur Canon.

A quintuplo quadrati semissis summa aufer datum aggregatum, remanebit quadratus cuius latus multatum semisse summa, minorem exhibet numerum.

Hic videntur desiderari duæ quæstiones quibus quæruntur duo numeri dato producto, & aggregato ex summa numerorum, & ex interuallo quadratorum. Vel dato interuallo quadratorum & aggregato ex summa numerorum & ex producto. Sed quia resolui non possunt per regulas Algebræ perfectè Canonicas, quandoquidem incidunt in æquationes in quibus duæ species duabus speciebus æquales reperiuntur, non possunt hic commode tractari. Qua de causa nonnullas etiam alias omisimus eiusdem naturæ.

QVAESTIO DECIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros, quorum summa, & aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, datos conficiant numeros. Oportet autem aggregatum interuallorum esse minus quadrato summæ aucto suo latere.

Esto summa 10. aggregatum interuallorum 44. Ponatur interuallum Numerorum 2. N. erunt ipsi 5 − 1 N. & 5 + 1 N. quadratorum interuallum fiet 20. N. æquale 44. − 2 N. & fit 1 N. 2. semissis interualli, quare quæsiti numeri sunt 3. & 7. Hinc fit Canon.

Diuide aggregatum interuallorum per duplum summa binario auctum, orietur semissis interualli numerorum.

Reducitur ergo ad primam vel ad trigesimam secundam Diophanti, vel ad tertiam harum. Aliter

ter ponatur alter numerorum 1 N. alter 10 − 1 N. fiet aggregatum interualli numerorum & quadratorum 110 − 22 N. vel 22 N. − 110. prout 1 N. nunc maior nunc minor ſtatuetur. Igitur 110 − 22. N. æquantur 44. & fit 1 N. 3. minor numerus. Vel 22. N − 110. æquantur 44. & fit 1. N. 7. maior numerus. Hinc etiam fiet Canon.

Quadrato ſummæ ſuo latere auctо adde vel adime aggregatum interuallorum: ſummam, & reſiduum diuide per duplum ſummæ binario auctum, orientur quæſiti numeri.

QVAESTIO DECIMA QVINTA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum, & aggregatum ex ſumma ipſorum, & ex interuallo quadratorum, datos conficiant numeros.

Oportet autem datum aggregatum maius eſſe interualli quadrato auctо ſuo latere.

Eſto interuallum 4. aggregatum ex ſumma numerorum, & ex interuallo quadratorum 50. Ponatur alter 1 N. alter 1 N + 4. fiet aggregatum ex ſumma numerorum & interuallo quadratorum 10. N + 20 æquale 50. vnde fit 1 N. 3. minor numerus. Quod ſi ponatur maior 1 N. minor 1 N. − 4. fient 10 N − 20 æqualia 50. vnde erit 1 N. 7. maior numerus. Hinc formatur Canon.

Dato aggregato adde vel adime interualli quadratum auctum ſuo latere, ſummam & reſiduum diuide per duplum interualli auctum binario, orientur, quæſiti numeri.

Aliter etiam fiet operatio poſita ſumma 2 N. & ipſis numeris 1 N − 5. & 1 N + 5. vt tibi conſiderandum relinquo. Hic quoque prætermitto quæſtionem de inueniendis duobus numeris dato interuallo quadratorum, & aggregato ex ſumma & interuallo numerorum, nam ſoluitur abſque Algebra.

QVAESTIO DECIMA SEXTA.

Inueniantur duo numeri, vt ſumma quadratorum, & aggregatum ex interuallo numerorum, & ex producto multiplicationis datos conficiant numeros. Oportet autem vt ſi à ſumma quadratorum auferatur duplum dati aggregati vnitate multatum, remaneat quadratus.

Eſto ſumma quadratorum 58. aggregatum interualli & producti 25. Ponatur interuallum 1 N. erit ergo productum 25 − 1 N. Sed a ſumma quadratorum 58. auferendo quadratum interualli 1 Q. reſiduum 58 − 1 Q. duplum eſt producti. Ergo 58 − 1 Q. æquatur 50 − 2 N. & fit 1 N. 4. interuallum numerorum, productum ergo eſt 21. Itaque iam reducetur quæſtio vel ad trigeſimam tertiam Diophanti, vel ad primam, vel ad ſecundam harum, & inuenientur quæſiti numeri 3. & 7. 4. 2. *periſ.*

Aduertendum autem fieri poſſe vt ſumma quadratorum ſit minor duplo aggregati. Quo caſu ſic præſcribenda erit conditio. Oportet vt ſummam quadratorum auferendo à duplo aggregati, reſiduum ab vnitate detractum, relinquat quadratum. Et pro vtroque caſu Canon formabitur.

A ſumma quadratorum aufer duplum aggregati, reſiduum vnitate auctum quadratus erit, cuius latus vnitate auctum erit interuallum numerorum.

Vel in alio caſu.

A duplo aggregati aufer ſummam quadratorum, reſiduum ab vnitate detractum relinquet quadratum, cuius latus ab vnitate detractum, erit interuallum numerorum.

QVAESTIO DECIMA SEPTIMA.

Inuenire duos numeros quorum interuallum, & aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt ſi ab aggregato auferatur quadratus ſemiſſis interualli, reſidui triens ſit quadratus.

Eſto interuallum 4. aggregatum ex producto & ex ſumma quadratorum 79. Per ſolam reductionem ſolui poteſt quæſtio hac arte. Quia ſumma quadratorum continet duplum producti & quadratum interualli, patet 79. continere ter productum & ſemel quadratum interualli. Quare ſi inde auferatur 16. quadratus interualli, reſiduum 63. erit triplum producti, erit ergo productum 21. ſumma quadratorum 58. Quare multis modis reducetur quæſtio, vt manifeſtum eſt. Aliter ponatur ſumma Numerorum 2 N. ergo ipſi numeri ſunt 1 N. − 2 & 1 N. + 2. aggregatum ex ſumma quadratorum & ex producto eſt 3 Q. + 4. æquale 79. vnde fit 1 N. 5. ſemiſſis ſummæ. Quare ipſa ſumma 10. ex qua & interuallo per primam huius libri noſcuntur numeri 3. & 7. Canon. 4. 2. *periſ.*

Aufer ab aggregato quadratum ſemiſſis interualli, reſidui triens eſt quadratus ſemiſſis ſummæ numerorum.

QVAESTIO DECIMA OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt productum multiplicationis & aggregatum ex interuallo ipsorum, & ex summa quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadruplum excessus aggregati suprà duplum producti, adscita vnitate faciat quadratum.

Esto productum 21. aggregatum ex interuallo numerorum, & ex summa quadratorum 62. Ponatur interuallum numerorum 2 N. erit ergo summa quadratorum 62 — 2 N. vnde si auferatur quadratus interualli, nimirum 4 Q. ' residuum 62 — 2 N. — 4 Q. æquatur duplo producti, hoc est vni-
4. 2. poris. tatibus 42. Quare tandem 4 Q + 2 N. æquantur 20. & fit 1 N 2. semissis interualli numerorum. Quare ipsum interuallum est 4. summa quadratorum 58. Itaque reducitur quæstio ad trigesimam tertiam Diophanti. Vel ad primam istarum, vel ad secundam, & inueniuntur quæsiti numeri 3. & 7. Hinc etiam fit Canon.

Quadruplo excessus aggregati suprà duplum producti adde vnitatem, fiet quadratus cuius latus vnitate multatum duplum est interualli numerorum.

QVAESTIO DECIMA NONA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum & aggregatum ex producto, & ex interuallo quadratorum datos conficiant numeros.

Oportet autem vt quintuplum interualli quadratorum ortorum à data summa, & à dato aggregato, additum vel ademptum quadrato aggregati summam vel residuum faciat quadratum.

Esto summa quadratorum 58. aggregatum ex producto, & ex interuallo numerorum 61. Ponatur productum 1 N. Igitur eius duplo addito ad summam quadratorum, ' fit 58 + 2 N. quadratus
4 secundi. summæ numerorum. At eodem duplo detracto ab eadem summa quadratorum, ' remanet 58 — 2 N.
4. 2. poris. quadratus interualli numerorum. Quoniam igitur ex summa numerorum in eorum interuallum, "
3. 2. poris. fit interuallum quadratorum; vtique ex quadrato summæ numerorum in quadratum interualli eorum, fiet quadratus interualli quadratorum. Igitur ex 58. + 2 N. in 58 — 2. N. fiet 3364. — 4 Q. æqualis quadrato ipsius 61 — 1 N. nimirum 3721. + 1 Q. — 122 N. & tandem 5 Q + 357 æquabuntur 122 N. & fiet 1 N. 21. productum scilicet. Ergo interuallum quadratorum erit 40. vnde licet varia vti reductione, & inuenire quæsitos numeros 3. & 7.

Accidit autem vt data summa nunc minor sit, nunc verò maior dato aggregato, vt in superiore exemplo minor extitit, sed in sequente maior est. Esto summa quadratorum 34. Aggregatum ex producto & ex interuallo quadratorum 31. eodem vtentes ductu inueniemus tandem 62 N. + 195. æquales 5 Q. & fiet 1 N. 15. productum scilicet, vnde interuallum quadratorum est 16. & ipsi quadrati 25. & 9. Hinc elicitur Canon.

Quintuplum excessus quadrati à dato aggregato super quadratum à data summa, aufer à quadrato aggregati, residui latus adde aggregato, summæ quinta pars erit productum. Vel.

Quintuplum excessus quadrati à data summa super quadratum à dato aggregato, adde quadrato aggregati, summæ latus adde aggregato, compositi quinta pars erit productum.

Aduertendum porrò, vt omnino solutio sit rationalis, præter appositam conditionem, necesse esse vt inuento interuallo quadratorum, id ademptum vel additum summæ quadratorum, summam & residuum faciat quadratum.

QVAESTIO VIGESIMA.

Inuenire duos numeros vt interuallum quadratorum, & aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto datos conficiant numeros.

Oportet autem vt triplum excessus quadrati à dato aggregato super quadratum à dato interuallo, additum quadrato aggregati efficiat quadratum, cuius latus multatum eodem aggregato, numerum relinquat cuius triens additum rursus eidem aggregato, faciat quadratum.

Esto interuallum quadratorum 40. Aggregatum ex summa quadratorum, & ex producto 79.
4. 2. poris. esto productum 1 N. ergo summa quadratorum 79 — 1 N. vnde auferendo duplum producti,
4. secundi. ' residuum 79 — 3 N. est quadratus interualli numerorum. Sed etiam si ad 79 addatur productum 1
3. 2. poris. N. ' fit 79 + 1 N. quadratus summæ numerorum. ' Igitur cùm ex summa numerorum in eorum

interuallum fiat interuallum quadratorum, vtique ex quadrato summæ 79 + 1 N. in quadratum interualli 79 − 3 N. fiet 6241 − 158 N. − 3 Q. æquale quadrato interualli quadratorum, nimirum 1600. & tandem 4641. æquantur 3 Q. +. 158 N. & fit 1 N 21. productum. Quare per reductionem ad præcedentes regulas soluitur quæstio. Hinc fiet Canon.

Triplum excessus quadrati ab aggregato super quadratum ab interuallo, adde ipsi quadrato aggregati; à summa latere aufer idem aggregatum, residui triens erit productum multiplicationis.

Alia quæstio qua quæruntur numeri dato producto, & aggregato ex summa & interuallo quadratorum facilis est, & soluitur absque algebra.

QVAESTIO VIGESIMA PRIMA.

Quæruntur duo numeri, vt aggregatum ex interuallis numerorum & quadratorum, itemque aggregatum ex summis numerorum & quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem siue aggregatum interuallorum addatur aggregato summarum, siue admittatur, duplum summæ & residui addita vnitate fieri vtrimque quadratum.

Esto aggregatum interuallorum 14. aggregatum summarum 26. Quoniam ' igitur addendo interuallum numerorum summæ numerorum, fit duplum maioris numeri, & addendo interuallum quadratorum summæ quadratorum, fit duplum maioris quadrati, patet addito 14. ad 26. summam 40. continere bis maiorem numerum, & bis eius quadratum. Ergo 20. est maior numerus & eius quadratus. Ponatur maior numerus 1 N. erit eius quadratus 1 Q. Igitur 1 Q. + 1 N. æquatur 20. fitque 1 N. 4. maior numerus. Eadem ratione auferendo 14. de 26. residuum 12. est duplum minoris numeri & eius quadrati. Quare 6. est minor numerus & eius quadratus. Posito ergo minore numero 1 N. fiet 6. æqualis 1 Q. + 1 N. & erit 1 N. 2. minor numerus. Hinc formatur Canon. 23. 1. *perif.*

Duplo summa duorum aggregatorum, & duplo interualli ipsorum, adde seorsim vnitatem, fient duo quadrati, quorum latera vnitate multata, dupla manebunt quæsitorum numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt aggregatum ex summa ipsorum, & ex interuallo quadratorum, itemque aggregatum ex summa quadratorum, & ex interuallo numerorum datos faciant numeros. Oportet autem vt duplum summæ aggregatorum addita vnitate faciat quadratum. Et vt duplum interualli eorundem vel additum vnitati, vel detractum ab vnitate faciat quadratum.

Esto prius aggregatum 18. posterius 22. Patet ob rationem allatam in præcedente horum summam 40. esse duplum maioris numeri & quadrati ipsius. Quare vt suprà inuenietur maior numerus 4. Quia vero auferendo 18. de 22. supereſt 4. patet 4. esse duplum minoris quadrati minus duplo lateris. Quare posito minore numero 1 N. duplum minoris quadrati erit 4 + 2 N. Quare 2 + 1 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 2.

Sed esto prius aggregatum 20 $\frac{1}{2}$. Posterius 19. $\frac{1}{2}$. Quia horum summa est quoque 40. erit 4 maior numerus vt prius. Sed quia prius aggregatum excedit posterius, erit horum interuallum $\frac{1}{2}$ dupium minoris numeri, minus duplo sui quadrati. Quare posito minore numero 1 N. fient $\frac{1}{2}$ + 2 Q. æqualia 2 N. vnde erit 1 N. $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{4}$ Et vtrumque satisfacit proposito. Hinc fit Canon.

Duplum summa aggregatorum vnitate auctum fit quadratus, cuius latus vnitate multatum est duplum maioris lateris, & duplum excessus posterioris aggregati super prius aggregatum; addita vnitate quadratus fit, cuius latus vnitate auctum est duplum minoris lateris. At duplum excessus prioris aggregati super posterius aggregatum, detractum ab vnitate quadratum relinquit, cuius latus additum & ademptum semissi vnitatis, vtroque modo exhibet duplum minoris numeri.

Sed & aduertendum est, si vnum aggregatum alteri sit æquale, tunc minorem numerum esse semper vnitatem vt facilè est demonstrare.

QVAESTIO VIGESIMA TERTIA.

Inuenire duos numeros vt productum ex interuallo numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex summa numerorum in summam quadratorum datos conficiant numeros. Oportet autem duplum posterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Esto prius productum 32. posterius 272. Ponatur summa numerorum 1 N. Igitur $\frac{32}{272}$ est summa quadratorum, & quia ex summa numerorum in interuallum eorundem fit interuallum quadratorum, quo rursus ducto in numerorum interuallum fit 32. erit $\frac{32}{272}$ quadratus interualli numerorum, qui si auferatur à duplo summæ quadratorum, nimirum à $\frac{544}{272}$ residuum $\frac{512}{272}$ æquatur quadrato summæ numerorum 1 Q. & omnia ducendo in 1 N. fiunt 512 æquales 1 C. & fit 1 N 8. summa numerorum, & 34. summa quadratorum, & 2. interuallum eorundem. Vnde facilè reperiuntur numeri 3. & 5. Hinc fit Canon.

3. 2. *poris.*

7. 2. *poris.*

Auser prius productum à duplo posterioris, residuum est cubus summa numerorum, per quam si diuidas prius productum, fit quadratus interualli numerorum.

QVAESTIO VIGESIMA QVARTA.

Inuenire duos numeros vt productum ex summa numerorum in interuallum quadratorum, & productum ex summa quadratorum in interuallum numerorum, datos conficiant numeros. Oportet autem duplum posterioris producti multatum priore producto, relinquere cubum, ita vt per eius latus diuidendo prius productum, oriatur quadratus.

Esto prius productum 128. posterius 68. Ponatur interuallum numerorum 1 N. ergo summa quadratorum erit $\frac{68}{128}$ & ob causam in precedente allatam $\frac{68}{128}$ erit quadratus summæ numerorum. Itaque si à duplo summæ quadratorum quod est $\frac{136}{128}$ auferatur quadratus summæ numerorum nimirum $\frac{68}{128}$ residuum $\frac{68}{128}$ est quadratus interualli numerorum. Quare $\frac{68}{128}$ æquatur 1 Q. & omnia in 1 N. fiunt 8. æquales 1 C. est ergo 1 N 2. interuallum numerorum, & summa quadratorum 34. & quadratus summæ numerorum 64. vnde licet variis modis quæstionem soluere, & inuenire quæsitos numeros 3. & 5. Hinc fit Canon.

7. 2. *poris.*

Auser prius productum à duplo posterioris, residuum est cubus interualli numerorum, itaque per eius latus diuidendo prius productum, oritur quadratus summa numerorum.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας διελμμένον ὅπως ᾖ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ διωρισμένον. ὑπεπτάχθω δὴ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος τριπλασίονα, πλευρὰ δὲ συνθέσεως τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου πενταπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς̄ ἀρ̄ς̄. ὁ ἄρα μεῖζων ἔσται ς̄ γ̄. λοιπὸν ἔσται τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρων τριπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθεμα, τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ῑ. τὸ δὲ αὐτῶν σύνθεμα ς̄ δ̄. ἔστι δυνάμεις ῑ πενταπλασίονες εἰσὶ ς̄ δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα εἰσὶν οἱ ἔχοντες δυνάμεις ῑ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ β̄. ἔστω ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ β̄ ὁ δὲ μεῖζων μ̄ ϛ̄. καὶ ποιῶν τὰ τῆς ὑποθέσεως.

INVENIRE duos numeros, datam inter se rationem habentes, vt & summa quadratorum ab ipsis, ad summam ipsorum datam habeat rationem. Imperatum sit maiorem minoris esse triplum; summam autem quadratorum; summæ numerorum esse quincuplam. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Superest vt summa quadratorum ab ipsis, summæ vtriusque sit quincupla. Cæterùm summa quadratorum ab ipsis ortorum fit 10 Q. summa verò ipsorum est 4 N. vnde constat 10 Q. quincuplos esse ad 4 N. Quamobrem 20 N. æquantur 10 Q. & fit 1 N. 2. Est igitur minor 2. maior 6. & quæstioni satisfaciunt.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

CIRCA hanc quæstionem & octo sequentes nulla est difficultas, nec ampliori indigent explicatione. Canones etiam pro qualibet formari nullo negotio possunt, quod tibi relinquo peragendum.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt summa quadratorum ab

ipſis ortorum, ad interuallum ipſorum datam habeat rationem. Iniunctum ſit maiorem minoris triplum eſſe 3 ſummam autem quadratorum ab ipſis ortorum, interualli ipſorum eſſe decuplam. Ponatur minor 1 N. Maior ergo erit 3 N. Cæterum volo ſummam quadratorum ab ipſis, interualli ipſorum eſſe decuplam. Sed ſumma quadratorum ab ipſis facit 10 Q. Interuallum autem ipſorum 2 N. Igitur 10 Q. decupli ſunt ad 2 N. ſed & 20 N. decupli ſunt ad 2 N. Igitur 20 N. æquales ſunt 10 Q. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 10 N. æquales 20. & ſit 1 N. 2. & eſt rurſus minor 2. maior 6. & ſatisfaciunt propoſito.

τετραγώνων πρὸς τὴ ὑπεροχὴν αὐτῆς λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος ϛ̄ πλασίονα, τὸ δὲ σύνθημα τῆς ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων τῆ ὑπεροχῆς αὐτῆς ῑ δεκαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς̄ ἀρ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ις̄ γ̄. λοιπὸν θέλω τὸ σύνθημα τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆς ῑ δεκαπλασίονα. ἀλλὰ τὸ σύνθημα τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων ποιεῖ δυνάμεις ῑ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῆς ις̄ β̄ δυνάμεις ἄρα ῑ δεκαπλάσιαί εἰσιν ις̄ β̄. ἀλλὰ καὶ ις̄ κ̄ δεκαπλάσιαί εἰσιν ις̄ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ῑ. καὶ πάντα διῃρῆσθω ἀριθμῶν. ις̄ ἄρα ῑ ἴσοι μονάσιν κ̄. ἓ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ β̄. καὶ ἔσται πάλιν ὁ ἐλάσσων μ̄ β̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ϛ̄. ἓ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt & interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, ad ſummam ipſorum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit maiorem minoris eſſe triplum. Interuallum autem quadratorum ab ipſis ſummæ ipſorum eſſe ſeſcuplum. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. Supereſt vt & interuallum quadratorum ab ipſis ortorum ſummæ vtriuſque ſit ſeſcuplum. Sed interuallum quadratorum ab ipſis eſt 8 Q. ſumma autem numerorum ipſorum eſt 4 N. Igitur 8 Q. ſeſcupli ſunt ad 4 N. Quamobrem 24 N. æquantur 8 Q. & fit 1 N. 3. & eſt minor quidem 3. Maior verò 9. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ δοθέντι ὅπως ἓ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων πρὸς ἀμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τοῦ ἐλάττονος ϛ̄ τριπλασίονα. τῶν δὲ ὑπεροχῶν τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων συναμφοτέρων ῑ ἑξαπλασίονα. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς̄ ἀρ, ὁ ἄρα μείζων ἔσται ις̄ γ̄. λοιπὸν ὅτι καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων συναμφοτέρων ῑ ἑξαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων ὅτι δυνάμεις η̄. συναμφότερος δὲ ις̄ δ̄. δυνάμεις ἄρα η̄. ἑξαπλασίονες εἰσὶ ις̄ δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄. ἴσοι εἰσὶν δυνάμεσιν η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ γ̄, καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ γ. ὁ δὲ μείζων μ̄ θ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

QVÆSTIO XXXVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt etiam interuallum quadratorum ab ipſis ortorum, ad interuallum ipſorum datam habeat rationem. Imperatum ſit maiorem minoris eſſe triplum; interuallum quadratorum, interualli numerorum eſſe duodecuplum. Ponatur rurſus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. ſupereſt vt & interuallum quadratorum, interualli numerorum ſit duodecuplum. Sed interuallum quadratorum eſt 8. Q. Hoc ergo duodecuplum eſt ad 2 N.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων πρὸς τὴ ὑπεροχὴν αὐτῆς λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τοῦ ἐλάσσονος ϛ̄ τριπλασίονα, τὴ δὲ ὑπεροχὴν τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆς ῑ δωδεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς̄ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ις̄ γ̄. λοιπὸν ὅτι καὶ τῶν ὑπεροχῶν τῶν ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆς ῑ δωδεκαπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ τῆς ἀπ' αὐτῆς τετραγώνων ὅτι δυνάμεις η̄. αὐται ἄρα δω-

δυναπλασίονές ἐισιν ς̄ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι η̄. καὶ γίνεται πάλιν ὁ ς̄ μ̄ γ̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

Ομοίως δὲ διὰ τῆς αὐτῆς διορισθήσονται καὶ ἀριθμοὶ δύο πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχειν δεδομένον. Ἐὰν πάλιν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντες δεδομένον, ὅστε τὸν ὑπ' αὐτῶν πρὸς τὸν ὑπαρχοῦν αὐτῶν λόγον ἔχειν δεδομένον.

Quamobrem 24. N. æquantur 8 Q. & fit rursus 1 N. 3. & demonstratio est manifesta.

Similiter hac ipsa ratione inuenientur duo numeri datam ad inuicem rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam ipsorum datam habeat rationem. Et rursus duo numeri datam inter se rationem habentes, vt productus ex eorum multiplicatione ad ipsorum interuallum datam habeat rationem.

QVÆSTIO XXXVIII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος πρὸς τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. διωρίσθω δὴ τὸν μὲν μείζονα τῆς ἐλάττονος τετράκις τὸν δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς μείζονος ἐφάπλασίονα. τετάχθω πάλιν ὁ ἐλάσσων ς̄ ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς̄ γ̄. λοιπὸν ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος τῆς μείζονος ἐξαπλάσιόν. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τ̄ ἐλάσσονός ὅτι δυνάμεως ἑνός. δύναμις ἄρα μία ἐξαπλασίων ἐστὶν ἀριθμοῦ ξ̄ δύο. ἀριθμοὶ ἄρα ιη̄ ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ π̄. ἔστω ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ ιη̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ν̄δ̄. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus à minore ortus ad maiorem datam habeat rationem. Iniunctum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum autem minoris, esse maioris sesquiplum. Ponatur rursus minor 1 N. Maior igitur erit 3 N. supereſt vt & quadratus à minore ortus, sit maioris sesquiplus. Sed quadratus minoris est 1 Q. Igitur 1 Q. sesquiplus est ad 3 N. Quamobrem 18 N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 18. Erit ergo minor 18. Maior 54. & hi satisfaciunt quæstioni.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς αὐτὸν τὸν ἐλάττονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. διωρίσθω τὸν μείζονα τῆς ἐλάσσονος ἐφάπλασίονα, τὸν δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτῆς τῆς ἐλάσσονος ἐξαπλάσιονα. ἔστω ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ς̄ γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς̄ ἑνός, καὶ μένει ὁ μείζων τῆς ἐλάττονος τετραπλάσιον. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνον αὐτῆς ἐλάσσονος ἐφάπλασίονα. δύναμις ἄρα μία ἐξαπλασίων ἐστὶν ἀριθμοῦ ἑνός. ἀριθμοὶ ἄρα ς̄. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ ς̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάττων μ̄ ς̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ιη̄. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad ipsum minorem datam habeat rationem. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum; Minoris autem quadratum ipsius minoris esse sesquiplum. Esto similiter maior 3 N. minor 1 N. & manet maior minoris triplus. Restat vt minoris quadratus, ipsius minoris sit sesquiplus. Quamobrem 1 Q. sesquiplus est ad 1 N. Proinde 6. N. æquantur 1 Q. & fit 1 N. 6. erit igitur minor 6. Maior 18. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XL.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τ̄ ἐλάσσονος τριπλάσιον πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. διωρίσθω τὸν μείζονα τῆς ἐλάττονος ἐφάπλασίονα. τὸν δὲ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τετράγωνον συναμφοτέρου ἐφάπλασίονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ μὲν μείζων ς̄ γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς̄ ἑνός. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt quadratus minoris ad summam vtriusque datam habeat rationem. Statutum sit maiorem minoris esse triplum; quadratum verò minoris summæ vtriusque esse duplum. Esto rursus Maior 3 N. minor 1 N. Supereſt vt quadratus à minore ortus, summæ vtriusque sit du-

plus, ſed quadratus minoris eſt 1 Q. ſumma verò vtriuſque 4 N. Igitur 1 Q. duplus eſt ad 4 N. Quamobrem 8 N. æquales ſunt 1 Q. & fit 1 N. 8. Erit igitur minor 8. maior 24. Et ſatisfaciunt quæſtioni.

τριπλάσιον συναμφοτέρου ἓξ) διπλασίονα. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τριπλάσιος ὄζει δυνάμεως μιᾶς, συναμφοτέρων δὲ ἐξ δ. δύναμις ἄρα μία διπλασίων ὄζει ἐξ δ. ἀριθμοὶ ἄρα η. ἴσοι δυνάμει μιᾷ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ η. καὶ ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ η. ὁ δὲ μείζων μ̄ κδ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros in ratione data, vt quadratus minoris ad ipſorum interuallum datam habeat rationem. Conſtituatur ſit maiorem minoris eſſe triplum. Quadratum autem minoris interualli ipſorum eſſe ſeſcuplum. Eſto rurſus maior 3 N. minor verò 1 N. Superest vt quadratus minoris interualli ipſorum ſit ſeſcuplus. Igitur 1 Q. ſeſcuplus eſt ad 2 N. Quamobrem 12 N. æquales ſunt 1 Q. vnde fit 1 N. 12. Erit ergo minor 12. maior 36. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνος πρὸς τὸν ὑπεροχὸν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ τὸν μείζονα τῆ ἐλάσσονος ἓξ) τριπλάσιονα. τὸν δὲ ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ἑξαπλάσιονα. ἔστω πάλιν ὁμοίως ὁ ιθ̄ μείζων ἐξ γ̄. ὁ δὲ ἐλάσσων ς̄ ἑνός. λοιπὸν ὄζει καὶ τὸν ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνον τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ἓξ) ἑξαπλάσιονα. δύναμις ἄρα μία, ἑξαπλασίων ὄζει ἐξ β̄. ἀριθμοὶ ἄρα ιβ̄, ἴσοι εἰσὶ δυνάμει μιᾷ· ὁ ἄρα ἀριθμὸς ἔστω μ̄ ιβ̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδων ιβ̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ λς̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

QVÆSTIO XLII.

SIMILITER ob hæc eadem, inuenientur duo numeri in data ratione, ita vt maioris quadratus ad minorem datam habeat rationem. Et rurſus duo numeri in data ratione, vt quadratus maioris ad ipſum maiorem datam habeat rationem. Et ſimiliter duo numeri in data ratione, vt maioris quadratus ad ſummam vtriuſque datam habeat rationem. Et adhuc duo numeri in ratione data, vt & maioris quadratus ad interuallum ipſorum datam habeat rationem.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ διὰ τῶν αὐτῶν εὑρεθήσονται ἀριθμοὶ δύο ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ πάλιν δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος πρὸς αὐτὸν τὸν μείζονα λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ὁμοίως δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. καὶ ἔτι δύο ἀριθμοὶ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι, ὅπως καὶ ὁ ἀπὸ τῆ μείζονος τετράγωνος πρὸς τὸν ὑπεροχὸν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον.

QVÆSTIO XLIII.

DVOBVS datis numeris, alium numerum inuenire, vt ex his tribus bini quique coniuncti, & in reliquum multiplicati, producant tres numeros æqualibus ſe incrementis ſuperantes. Sint duo dati numeri 3. & 5. & oporteat inuenire alium numerum, vt bini coniuncti, & in reliquum multiplicati producant tres numeros, quorum æqualia ſint interualla. Eſto quæſitus 1 N. & ſi adiiciatur ad 5. fit 1 N. + 5. Quod ſi multiplicetur in reliquum, nimirum in 3. fit 3 N. + 15. Rurſus ſi 1 N. addatur ad 3. fit 1 N. + 3.

ΔΥΣΙ δοθεῖσιν ἀριθμοῖς, προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως τῶν τριῶν συγκειμένων σὺν δύο συντεθέντες καὶ ἑκὰς τὸ λοιπὸν πολλαπλασιαζόμενοι ποιῶσι ἴσους ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ ὅτε τρία καὶ πέντε, καὶ δεῖ ἔτι προσευρεῖν ἕτερον ἀριθμὸν ὅπως σὺν δύο συντεθέντες, καὶ ἑκὰς τὸν λοιπὸν πολλαπλασιαζόμενοι ποιῶσι ἴσους ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. ἔστω ὁ ζητούμενος ς̄ ἑνὸς ⓒ ἐὰν οὖν συντεθῇ μ̄ μ̄ ε̄. γίνεται ς̄ εἷς μ̄ ε̄. ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ ἑκὰς τὸν λοιπὸν τουτέστι τὸν Γ. γίνονται ις̄ ἴσοι μ̄ ιε̄. πάλιν ἐὰν ς̄ εἷς συντεθῇ μ̄ μ̄ Γ. γίνεται ς̄ εἷς μ̄ Γ. ἐὰν δὲ, πολλαπλασιασθῇ ἑκὰς τὸν

λειπὸν τουτέστι τὸν, ᾱ. γίνον) ςᾱ ι μ̄ ιᾱ. καὶ ἔτι ἐπὶ μ̄ ι. συντιθῶσι μῦ μ̄ Γ. καὶ αἱ γινόμεναι μ̄ ιᾱ. πολλαπλασιαθῶσα, ὅτι ς̄ ἑνί. γίνονται ςᾱ ιᾱ. ὅτι μὲν οὖν οὐδέποτε ἴσαι μέγιστος ὁ τ̄ ςᾱ γ̄. μ̄ ιᾱ φανερόν. μείζων γὰρ αὐτῶν ὅδε ὁ τῶν ἀριθμῶν ι μ̄ ιᾱ. ὁ ἄρα ςᾱ γ̄. μ̄ ιᾱ. ἔστι μέσος ὅδε ἢ ἐλάσσων. ὁ δὲ τῶν ςᾱ ι μ̄ ιᾱ. ἔστι μέγιστός ὅδε, ἢ μέσος. ὁ δὲ τῶν ςᾱ ᾱ. καὶ μέγιστος, καὶ μέσος, καὶ ἐλάχιστος δύναται τυγχάνειν τῷ ἄδηλον εἶναι τίνων τῶν ς̄ ὑποστάσεων. πεπάχθω οὖν πρῶτον μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςᾱ ι μ̄ ιᾱ. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςᾱ γ̄ μ̄ ιᾱ. μέσος δὲ δηλονότι ὁ τῶν ςᾱ ᾱ. ἐπεὶ δὲ ὧσιν ἀριθμοὶ ἓξῆς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συμπίπτοντες διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου, καὶ ἔστιν ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ςᾱ ᾱ μονάδες λ̄. ταῦτα ἴσα ςᾱ ιᾱ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δεκαπέντε τετάρτων μονάδος. τοσούτων ἔσται ὁ ζητούμενος. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςᾱ ι μ̄ ιᾱ. μέσος δὲ ὁ τῶν ςᾱ γ̄ μ̄ ιᾱ. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ςᾱ ᾱ. ἐπεὶ δὲ ὧσι ἓξῆς ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ᾧ ὑπερέχει ὁ μέγιστος τὸν μέσον, τούτῳ ὑπερέχει ὁ μέσος τὸν ἐλάχιστον ὑπερέχει δὲ ὁ μὲν μέγιστος τὸν μέσον ἀριθμοῖς β̄. ὁ δὲ μέσος τὸν ἐλάχιστον μονάδι ᾱ λείψει ςᾱ ι. μονάδες ἄρα ιᾱ λείψει ςᾱ ι. ἴσαι εἰσὶν ἀριθμοῖς δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιᾱ ἑβδόμων τοσούτων ἔσται ὁ ζητούμενος, καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω μέγιστος μὲν ὁ τῶν ςᾱ ᾱ. μέσος δὲ ὁ τ̄ ςᾱ ι μ̄ ιᾱ. ἐλάχιστος δὲ ὁ τῶν ἀριθμῶν γ̄ μονάδων ιᾱ. ἐπεὶ οὖν πάλιν ὁ μέγιστος καὶ ἐλάχιστος διπλάσιοί εἰσι τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος εἰσὶ ςᾱ ιᾱ μονάδες ιᾱ. ταῦτα διπλάσια εἰσὶ τοῦ μέσου. ὁ δὲ μέσος ὅδε ἐστὶ ι μ̄ ιᾱ. ςᾱ ἄρα ι. μ̄ λ̄. ἴσαι εἰσὶν ςᾱ ιᾱ μονάδι ιᾱ. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος μ̄ ιᾱ. καὶ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

quod si multiplicetur in reliquum, puta in 5. fit 5 N. + 15. Denique si 3. & 5. coniungantur, & qui conficitur 8. ducatur in 1 N. fiunt 8 N. Enimverò 3 N. + 15. non esse trium productorum maximum liquet, maior enim illo est 5 N. + 15. Ergo 3 N. + 15. aut minimus est, aut medius. At 5 N. + 15. aut maximus est, aut medius, Denique 8 N. & maximus, & medius, & minimus ésse potest, eo quod ignotum sit quantum valeat 1 N. Ponatur ergo primò maximus 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. medius subinde 8 N. Iam si tres numeri æqualibus se superent interuallis, maximus & minimus coniuncti, duplum sunt medij. Maximus autem & minimus faciunt 8 N. + 30. Hoc ergo æquale est 16 N. & fit 1 N. $\frac{15}{16}$. Tantus est quæsitus, & satisfacit postulatis.

Iam verò sit maximus quidem 5 N. + 15. sed medius 3 N. + 15. minimus verò 8 N. Atqui si tres numeri æqualibus se superent interuallis, quanto maximus medium superat, tanto medius superat minimum. Sed excessus maximi supra medium est 2 N. Medij autem supra minimum excessus est 15 — 5 N. Igitur 15 — 5 N. æquantur 2 N. & fit 1 N. $\frac{5}{7}$. Tantus est quæsitus, & quæstioni satisfacit. Denique maximus esto 8 N. medius autem 5 N. + 15. minimus 3 N. + 15. Quandoquidem rursus maximus & minimus duplum medij conficiunt, sed maximus & minimus faciunt 11 N. + 15. hoc duplum est medij; medius autem est 5 N. + 15. Igitur 10 N. + 30. æquantur 11 N. + 15. Erit ergo quæsitus numerus 15. & implet postulata.

IN QVÆSTIONEM XXXIII.

QVOD hîc assumit Diophantus. Si tres numeri fuerunt in arithmetica medietate, summa extremorum est æqualis duplo medij, demonstratum est propositione quinta libri primi porismatum. Cæterùm ex triplici operatione, triplex Canon formari potest nimirum.

Diuide duplum producti multiplicationis datorum numerorum, per summam eorundem, orietur tertius quæsitus.

vel.

Diuide productum multiplicationis per compositum ex maiore numero & interuallo numerorum, orietur tertius quæsitus.

vel denique.

Diuide productum multiplicationis per id quo duplum minoris numeri excedit maiorem, orietur tertius quæsitus.

Ex hoc autem vltimo Canone manifestum est requiri vt duplum minoris numeri excedat maiorem. Nec tertia operatio Diophanti absque tali limitatione locum habere potest.

DIOPHANTI

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER SECVNDVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE duos numeros, vt ſumma ipſorum, ad ſummam quadratorum ab ipſis ortorum datam habeat rationem. Imperatum ſit ſummam ipſorum ſummæ quadratorum ab ipſis ortorum eſſe decimam partem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. fit ſumma ipſorum 3 N. Summa verò quadratorum ab ipſis ortorum eſt 5 Q. Oportet igitur 3 N. eſſe decimam partem de 5 Q. Quare 30 N. ſunt æquales 5 Q. & fit 1 N. 6. Eſt ergo minor 6. maior 12. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ σύνθεσις αὐτῶν πρὸς τὴν τ ἀπ' αὐτῶν συνθέσιν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ τὴν συνθεσιν αὐτῶν τ τ ἀπ' αὐτῶν συνθέσεως ϊδ μέρος δεῖν ἔχειν. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς̄ ἀνός. ὁ δ μείζων ςς̄ β̄. γίνεται ἡ μὲν σύνθεσις αὐτῶν ςς̄ γ̄. ἡ δ συνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, δυνάμεις ῑ̄. καὶ δεήσει ἄρα ἀριθμὸς γ̄. δεκάδων μέρος ϊδ δυνάμεων ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ς̄ ἴσαι ἄρα ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ ς̄. ὁ δ μείζων μ̄ ιβ̄. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

In II. Librum Diophanti Commentarij.

IAM animaduerterunt & Scholiaſtes & Xilander quatuor quæſtiones initio libri huius expoſitas, cum quatuor priore libro traditis, in omnibus ferè conuenire, nimirum primam & ſecundam huius cum trigeſima quarta & trigeſima ſeptima primi. At quartam & quintam huius cum trigeſimaquinta & trigeſima ſexta illius. Nec in alio differunt hæ quæſtiones ab illis, niſi quod iſtæ vniuerſalius proponuntur, in illis verò numerorum quæſitorum ratio præſcribitur, ſed operandi modus idem eſt. Itaque vt quod ſentio, liberè dicam, vix adducor vt credam hæc ſcripſiſſe Diophantum, & in re facili tam inani vſum eſſe repetitione. Iudicent alij.

QVÆSTIO II.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum ipſorum, ad interuallum quadratorum ab ipſis ortorum datam habeat rationem. Conſtitutum ſit interuallum ipſorum 3; interualli quadratorum ab ipſis, eſſe ſexantem. Ponatur minor 1 N. maior autem 2 N. & fit interuallum ipſorum 1 N. At interuallum quadratorum ab ipſis ortorum eſt 3 Q. Oportet igitur 1 N. ſexantem eſſe de 3 Q. Quamobrem 6 N.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν τ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν τῆς τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχῆς ϊδ μέρος ἔχειν. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς̄ ἀνός, ὁ δ μείζων ςς̄ β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀριθμὸς εἷς, ἡ δ τ ἀπ' αὐτ τετραγώνων ὑπεροχὴ δυνάμεις γ̄. δεήσει ἄρα ς̄ ἴσα ἔχειν μέρος ϊδ δυνάμεων γ̄. ςς̄ ἄρα ς̄ ἴσοι δυνάμεσι τεσσί. καὶ

γίνεται ὁ ς^ν μ^ο β̄. ἴσαι ὁ μὲν ἐλάσσων μονάδι β̄. ὁ δὲ μείζων μ^ο δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

æquantur 3 Q. & fit 1 N. 2. Est ergo minor 2. maior 4. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO III.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρὸς σωματότερον ἢ πρὸς ἑκὰ ὑπερεχὸν λόγον ἔχῃ δοθέντα. ἐπιτετάχθω δὲ πρότερον τὸν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασιοῦ, τοῦ σωματοτέρου ιβ̄ ἑξαπλασίονα τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ς^ν ιβ̄, ἐστὶ δὲ ς^ν β̄. δύνανται ἢ ὅτι ἐνδέχεται καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. ἔστω ἄρα ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν δυνάμεις β̄. ὁ δὲ σωματοτέρος ς^ν γ̄. δοθήσει ἄρα δυνάμεις β̄ ἑξαπλασίους ιβ̄ ς^ν γ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ἐν ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ς^ν μ^ο θ̄. ἴσαι ὁ μὲν πρῶτος μ^ο θ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο ιη̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

Ἐαν δὲ ὑπερέχῃ ἡ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὑπερέχοντος ιβ̄ ἑξαπλασίονα. ἴσαι πάλιν ὁ μὲν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεις β̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἀριθμὸς εἷς, ἀριθμοὶ πάλιν γ̄. ἴσοι δυνάμεσι δυσί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο γ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ad summam vtriusque, vel ad interuallum ipsorum datam habeat rationem. Constitutum sit primò productum multiplicationis, summæ sesquplum esse. Ponantur quæsiti numeri 1 N. & 2 N. (Cæterùm possent etiam in qualibet data ratione poni.) Erit igitur productus ex eorum multiplicatione 2 Q. summa verò vtriusque 3 N. Oportet ergo 2 Q. sesquplos esse ad 3 N. Proinde 18. N. æquantur 2 Q. & fit 1 N. 9. Erit ergo primus 9. secundus 18. & soluunt quæstionem.

Quod si imperatum sit productum multiplicationis interualli esse sesquplum. Erit rursus productum multiplicationis 2 Q. At interuallum 1 N. Proinde rursus 6 N. æquabuntur 2. Q. & fiet 1 N. 3. Erit ergo primus 3. secundus 6. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM III.

HÆc quæstio cùm nulla primi libri conuenit, quicquid dicat Scholiastes, qui eam reuocat ad trigesimam & trigesimam tertiam. Sed quàm meritò, sola collatione fiet manifestum. Cæterùm sicut hîc Diophantus comparat productum ex multiplicatione duorum numerorum, cum eorum summa, & cum eorum interuallo, sic & idem productum comparari potest interuallo quadratorum, & summæ eorundem. vnde duæ huiusmodi formabuntur quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum ad productum multiplicationis datum habeat rationem. Oportet autem vt à quadrato semissis denominatoris rationis, auferendo vnitatem supersit quadratus.

Esto summa quadratorum ad productum vt 5. ad 2. Ponatur alter numerorum 1 N. alter 1. erit summa quadratorum 1 Q. + 1. productum 1 N. Quare 1 Q. + 1. æquatur $\frac{2}{5}$. N. & fit 1 N. vel 2. vel $\frac{1}{2}$. Itaque duo quilibet numeri in ratione dupla satisfacient proposito. Hinc fit Canon.

Quadrato semissis denominatoris rationis data, aufer vnitatem, residui latus adde vel adime eidem semissi, orietur vtroque modo denominator rationis, in qua duo quilibet sumpti numeri soluunt quæstionem.

Cæterùm notatu dignum est summam quadratorum ad productum, eandem semper habere rationem, quam habet ad vnitatem summa quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod etiam sic ostendetur. Sint latera A B. quorum quadrati E F, productum G. & diuiso A & B. sit quotiens C. diuisoque B per A sit quotiens D. Dico ambos E F. simul ad G. esse sicut ambos C D simul ad vnitatem. Etenim quia ducto D in A. & producto B in B fit F, idem F. fiet ducto A in B, & producto G in D. Eodem argumento ostendemus E fieri ex G in C. Cum ergo G ductus in singulos C D producat singulos E F. patet ex summa ipsorum C D. in G fieri summam ipsorum E F. Quare ex definitione multiplicationis est summa ipsorum E F. ad G. sicut summa ipsorum C D. ad vnitatem. Quod demonstrandum erat.

A 2. B 6.
C ½. D 3.
3. 1. *perism.* E 4. F 36.
G 12.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum quadratorum ad productum multiplicationis datam habeat rationem. Oportet autem vt quadrato semissis denominatoris rationis datæ addendo vnitatem, fiat quadratus.

Esto interuallum quadratorum ad productum, vt 8. ad 3. Ponatur alter Numerorum 1 N. alter 1. erit interuallum quadratorum 1 Q. — 1. At productum 1 N. Quare 1 Q. æquabitur 1 + $\frac{1}{3}$ N. & fiet 1 N. 3. vel si 1 N. supponatur minor quàm 1. erit interuallum quadratorum 1 — 1 Q. Quare 1. æquabitur 1 Q. + $\frac{1}{3}$ N. & fiet 1 N. $\frac{1}{3}$ Quare manifestum est quoslibet numeros in proportione tripla soluere quæstionem, hinc fiet Canon.

Quadrato semissis denominatoris ratione data adde vnitatem, lateri summæ adde vel adime eundem semissem, vtroque modo innotescet denominator rationis, in qua duo quilibet numeri sumpti satisfacient proposito.

Hic etiam accidit interuallum quadratorum ad productum multiplicationis eandem habere rationem, quam habet ad vnitatem interuallum quotientum qui fiunt ex mutua laterum diuisione. Quod ex demonstratis in præcedente, manifestè colligitur.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE duos numeros vt compositus ex quadratis ipsorum ad ipsorum numerorum interuallum, datam habeat rationem. Constitutum esto compositum ex quadratis ipsorum interualli esse decuplum. Ponatur rursus primus 1 N. secundus 2 N. erit igitur compositus ex quadratis ipsorum 5 Q. interuallum autem ipsorum est 1 N. Oportet ergo 5 Q. decuplos esse ad 1 N. Proinde 5. Q. æquantur 10. N. & fit 1 N. 2. erit ergo primus 2. secundus 4. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς τοῦ δεκαπλασίονα. τετάχθω πάλιν πρῶτος μὲν ς̄ ἑνός, ὁ δὲ, δεύτερος, ς̄ β̄. ἔσται ἄρα ὁ μὲν συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις ῑ. ἡ δὲ ὑπεροχὴ αὐτῶν ς̄ οἷς. δεῖ οὖν ἄρα δυνάμεις ῑ δεκαπλασίονας εἶναι ς̄ ἑνός. δυνάμεις ἄρα ῑ ἴσαι ἀριθμοῖς ῑ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ β̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ β̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ δ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

QVÆSTIO V.

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, ad summam ipsorum numerorum, datam habeat rationem. Imperetur vt interuallum quadratorum, summæ numerorum sit sescuplum. Ponantur rursus quæsiti numeri, hic quidem 1 N. ille verò 2 N. & fit interuallum quadratorum ab ipsis ortorum 3. Q. summa verò numerorum 3 N. Proinde 3 Q. æquantur 18. N. & fit 1 N. 6. & euidens est demonstratio.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δεδομένον. ὑποτετάχθω δὴ τοῦ ὑπεροχοῦ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συναμφοτέρου ἑξαπλασίονα. ἐπάλιν τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι, ὁ μὲν ς̄ ἑνός ὁ δὲ ς̄ β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δυνάμεις γ̄. συναμφότερος δὲ ς̄ γ̄. δεῖ οὖν ἄρα δυνάμεις γ̄. ἑξαπλασίονας εἶναι ς̄ γ̄. δυνάμεις ἄρα ξ̄ῖς ἴσαι εἰσὶ ἀριθμοῖς π̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ς̄. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE duos numeros, dato eorum interuallo, vt interuallum qua-

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ δοθείσῃ, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν

τετραγώνων τῆ ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχη δοθέντι ἀριθμῷ. δεῖ δὲ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆ τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου αὐτῆ τε τῆ τῆς ὑπεροχῆς, καὶ τῆ διπλασίονι τῆ ἀπ' αὐτῆ πρὸς τῆ αὐτῶν ὑπεροχῆ. ὑπὸ τετράχθω δὲ τῆ ὑπεροχῆ αὐτῶν εἶναι μονάδων β. τῆ δὲ ὑπεροχῆ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν ὑπερέχειν μονάδας κ. τετράχθω δὴ ὁ ἐλάσσων ς^ος ἀνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^ος ἀνός μ^ας β. ἐφ' ἑαυτὸν ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β. ἡ δὲ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ὑπεροχὴ ςγ^ους δ^ας μ^ας δ^ας. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ^ας μ^ας δ^ας. ὑπερέχειν μονάδων β μονάσιν κ. ὥστε ἀριθμοὶ δ^ας μονάδες δ^ας ἴσοι εἰσὶ μονάσιν κβ. καὶ γίνεται ὁ ς^ος μ^ας δ^ας καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ας δ^ας καὶ ἥμισυ. ὁ δὲ μείζων ε καὶ ἥμισυ. καὶ πεῖται τὰ τῆς ὑποστάσεως.

dratorum ab ipsis ortorum, interuallum ipsorum superet dato numero. Oportet autem quadratum interualli numerorum minorem esse composito tum ex ipsomet interuallo, tum ex dato numero quo quadratorum interuallum superat ipsum numerorum interuallum. Imperetur vt interuallum numerorum sit 2. Interuallum autem quadratorum superet interuallum numerorum vnitatibus 20. Ponatur minor 1 N. Maior igitur erit 1 N. + 2. & manet interuallum ipsorum 2. interuallum autem quadratorum est 4 N. + 4. Oportet igitur 4 N. + 4. superare vnitates 2. vnitatibus 20. Quamobrem 4 N. + 4. æquantur 22. & fit 1 N. 4½. Erit igitur minor 4½. maior 6½. & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM VI.

HÆc quæstio verbis paulum immutatis eadem est cùm tertia illarum, quas ad trigesimam tertiam primi sumus commenti. Nam verbi gratia quærere duos numeros quorum interuallum sit 2. & interuallum quadratorum superet ipsum 2. numero 20. nil aliud est quàm velle vt interuallum numerorum sit 2. interuallum verò quadratorum 22. Itaque conditio ibi apposita eadem est cum illa quam hic præscribit Diophantus, nimirum. *Quadratus interualli numerorum debet esse minor interuallo quadratorum*, cuius Theorematis si quis peculiarem requirat demonstrationem, eam afferre non pigebit. Sint dati numeri A B. B C. quorum interuallum A D. ita vt D B. B C. sint æquales. Dico quadratum ipsius A D minorem esse interuallo quadratorum ab ipsis A B. B C. etenim

4. secundi. A . . D . . . B . . . C

Quadratus A B est æqualis quadratis partium A D. D B. & duplo plani sub ipsis. Igitur interuallum quo quadratus ab A B superat quadratum abs D B seu abs B C est æquale quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D. in D B. Quare interuallum quadratorum superat quadratum interualli numerorum, duplo producti ex minore numero in ipsum interuallum numerorum. Quod erat propositum. Sic contra si interuallo quadratorum addatur quadratus interualli numerorum, fiet duplum producti ex maiore numero in idem interuallum numerorum. Nam si quadrato ipsius A D. & duplo producti ex A D in D B. addatur rursus quadratus ipsius A D. erit totum compositum æquale duplo quadrati ex A D, & duplo producti ex A D in D B, hoc est duplo producti ex A B. maiore numero in A D interuallum numerorum. Quod erat propositum. Quamuis itaque Canones allati ad tertiam illarum quas attulimus ad trigesimam tertiam primi, sint faciles & expediti, ex hoc tamen Theoremate alium colligemus Canonem, sane non inelegantem.

Interuallo quadratorum adde vel adime quadratum interualli numerorum, summam & residuum diuide per interuallum numerorum, quotientes erunt dupli quæsitorum numerorum.

QVÆSTIO VII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆ ὑπεροχῆς αὐτῶν δοθέντι ἀριθμῷ μείζων ᾖ καὶ ἐν λόγῳ δοθέντι. τετράχθω δὲ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῆ ὑπεροχῆς αὐτῶν εἶναι τριπλασίονα, καὶ ἔτι ὑπερέχειν μονάδας ι. δεῖ δὴ τὸν ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον ἐλάσσονα εἶναι συναμφοτέρου τῆ τε τριπλασίονος τῆς ὑπεροχῆς καὶ τῆ δοθεισῶν μονάδων ι. τετράχθω ἡ μὲν ὑπεροχὴ αὐτῶν μονάδες β. ὁ ἄρα ἐλάσσων

INVENIRE duos numeros, vt interuallum quadratorum ab ipsis, dato numero superet interuallum numerorum, & sic ad illum in data ratione. Constitutum sit interuallum quadratorum, interualli numerorum esse triplum, & superaddere adhuc vnitates 10. Oportet autem quadratum interualli numerorum, minorem esse composito ex triplo sui ipsius, & ex datis vnitatibus 10. Ponatur

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

ς^ε ἰνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς^ε ἰνὸς μ^ι β̄. δεήσει ἄρα ἀριθμὸς δ̄ μονάδας δ̄ τριπλασίονας ἢ) μ^ι β̄. ϗ ἔτι ὑπερέχειν μ^ι ῑ̄. τρὶς ἄρα μονάδες β̄ μ^ι ῑ̄. ἴσαι εἰσὶν ς^ια δ̄ μονάσι δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ι γ̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ^ι γ̄. ὁ δὲ μείζων μ^ι ε̄. καὶ πεῖσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 — 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto à 2 N. — 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. — 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 — 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ὑπερτεθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις̄ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας ἢ) τετραγώνῳ. πλάσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς̄ς̄. ὅσων δὴ ποτε λείψει πόσων μ^ι ὅσων ἔχει ἡ τοῦ ις̄ μ^ι πλευρά. ἔστω ς̄ς̄ β̄ λείψει μ^ι δ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ̄ μ^ι ις̄ λείψει ς̄ς̄ ις̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ις̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοῖα. δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ις̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄. πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν εἷς πεντηκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ̄ πεντηκοστοπέμπτων, ϗ οἱ δύο συντιθέντες ποιοῦσι ῡ πεντηκοστοπέμπτα, ἤτοι μονάδας ις̄. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. — 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. — 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. — 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις̄ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ς^ε ἀπὸς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ς̄ς̄ ὅσων δήποτε λείψει μ^ι ὅσων ἔχει ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ς̄ς̄ β̄ λείψει μ^ι δ̄. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὁ μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὁ δὲ δυνάμεων δ̄ μ^ι ις̄ λείψει ς̄ς̄ ις̄. βούλομαι τοὺς δύο λεῖπον συντιθέντας ἴσους ἢ) μ^ι ις̄. δυνάμεις ἄρα ε̄ μ^ι ις̄ λείψει ς̄ς̄ ις̄ ἴσαι μ^ι ις̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄ πέμπτων.

ἴσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ις̄ πέμπτων. αὐτὸς ἄρα σνς̄ εἰκοστοπέμπτων. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου πλευρὰ ιβ̄ πέμπτων. αὐτὸς ἄρα ἴσται μοναδ̄ ρμδ̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

ergo primi latus $\frac{16}{5}$. Atque ipse quadratus $\frac{256}{25}$. secundi latus verò erit $\frac{12}{5}$. Atque ipse quadratus $\frac{144}{25}$. & manifesta est demonstratio.

IN QVAESTIONEM VIII. & IX.

PARVM aut nil differunt hæ duæ quæstiones, cùm idem quærant, & eodem prorsus operandi modo. Quare vnica indigent explicatione. Operatio est subtilis & Diophanti propria, qua in sequentibus pulcherrima & difficillima perficit problemata, & ab alio ante ipsum nunquam excogitata. Proinde tyronibus hic omni ope laborandum est, vt methodum istam fingendorum laterum perfectè comprehendant, illique assuescant. Cùm igitur Diophantus æquare velit quadrato 16 − 1 Q. id tali artificio peragit vt æquatione ritè præparata, tandem inter duas species proximas æqualitas consi stat, sic enim cum nulla opus sit radicis extractione, sed sola diuisione inueniatur valor Numeri, patet solutionem contingere rationalem. Et hoc vnùm voluisse Diophantum præter quàm quod res ipsa clamat, ipsemet disertis verbis testatur quæstione vndecima infra, vbi cùm de fingendo latere quadrati præceptum dedisset, subiicit, *Sic enim vna specie vni speciei æquali remanente, expedietur quæstio.* Quod rursus iisdem ferè verbis repetit quæstione duodecima & decima tertia. Hic itaque vt æquatio ritè procedat, tria sunt obseruanda.

Primò vt in latere fictitij quadrati ponatur vnitatum numerus æqualis lateri quadrati diuidendi in duos quadratos, ita Diophantus fingit hoc latus 2 N. − 4. Quod fit idcirco, quia sic necesse est in quadrato fictitio reperiri vnitates æquales ipsi quadrato diuidendo, nimirum 16. cùm lex multiplicationis requirat vt ex − 4. in − 4. fiant 16. Quare cùm idem vnitatum numerus sit etiàm in altera æquationis parte, puta in 16 − Q. euidens est auferendo similia à similibus, vnitates omnino tolli ab vtraque parte, & æqualitatem consistere inter proximas duas species, Quadratos scilicet & Numeros.

Secundò necesse est vt vnitates quæ ponuntur in fictitio latere, adiunctum habeant signum defectus, sic Diophantus ponit huiusmodi latus 2 N. − 4. & ratio est quia si poneretur 2 N. + 4. nulla quadrati pars adiunctum haberet signum defectus, esset enim quadratus 4 Q. + 16 N. + 16. Quare cùm in altèra æquationis parte sint vnitates cum defectu quadratorum, nempe 16 − 1 Q. ablatis vtrimque vnitatibus 16. vt supra dictum est, & addendo defectum vtrinque, nempe 1 Q. remanerent 5 Q. + 16. N. æquales nihilo. Vt igitur Numeri deficiant necesse fuit ponere latus quadrati cum defectu vnitatum, puta 2 N. − 4. sic enim fit quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. Quare ablatis vtrimque vnitatibus 16. & addendo vtrimque 1 Q. tum 16 N. remanent hinc 5. Q. inde 16. N. inter se æquales. Denique multitudo Numerorum qui ponuntur in latere fictitio, debet esse maior vel minor vnitate. Nam si ponatur vnitas, orietur valor Numeri æqualis lateri ipsius quadrati diuidendi, & resoluendo hypostases, ipsum latus fictitium, reperietur nihil. Ita si ponas in exemplo Diophanti, latus fictitium 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q − 8 N. + 16 æquandus 16 − 1 Q. Quare auferendo similia à similibus, & supplendo defectus, remanent 2 Q. æquales 8 N. & fit 1 N. 4. Quare latus quod positum erat 1 N. − 4. erit 4 − 4. seu nihilum. Cur autem id contingat, ratio est euidens. Nam numerus quadratorum qui in æquatione remanet, semper æqualis est quadrato Numerorum qui ponuntur in latere ficto, adscita vnitate, quare cùm in latere ficto ponetur 1 N. numerus quadratorum qui manent in æquatione, erit 2. Q. At multitudo Numerorum cui æquantur 2 Q. est duplum lateris quadrati diuidendi, quia scilicet fit ex ductu 1 N. in dictum latus bis. Verbi gratia in dato exemplo 2 Q. æquantur 8 N. Quare cùm duplum lateris, puta 8. diuidetur per 2. necesse erit oriri ipsum latus 4 pro valore Numeri. Quod erat propositum.

His sanè probè intellectis totum Diophanti artificium percipietur. Sed abundantioris doctrinæ gratia libet aduertere, eandem solutionem contingere, quamuis dupliciter instituatur positio secundi lateris, nimirum, siue ponatur in eo quælibet multitudo Numerorum maior ea quæ posita est in primo latere, siue alia minor, ita tamen vt inter harum vtramque, illa sit media proportionalis. Verbi gratia in exemplo Diophanti, siue ponas latus fictitium 2 N. − 4. siue $\frac{1}{2}$ N. − 4. eadem continget solutio, fiet enim vtrobique 1 N. $\frac{+}{-}$ Quia scilicet 1 N. est medius proportionalis inter 2 N. & $\frac{1}{2}$ N. & sic de aliis. Cuius symptomatis causa pendet ab huiusmodi Theoremate.

Si fuerint tres numeri proportionales, vt se habet aggregatum quadratorum à duobus primis ad primum, ita & aggregatum quadratorum à duobus postremis ad postremum.

D 16. E 36. G. 81. A 4. B 6. C 9.

Sint tres proportionales A. B. C. quorum quadrati D E G. Dico esse D E simul ad A, sicut E G simul ad C. Quia enim D ad E est in duplicata ratione lateris A. ad latus B, sed & A ad C est duplicata ratio rationis A ad B, erit D ad E sicut A ad C. eodem argumento ostendetur esse E ad G vt A ad C. Quare est D ad E vt E ad G. & conuertendo G ad E vt E ad D. Quia verò est D ad E vt A ad C, est & vicissim D ad A vt E

C. Itaque cùm ſit E ad D vt G. ad E erunt componendo D E ſimul ad D, ſicut E G ſimul ad E, ſed vt D ad A, ſic E ad C. vt oſtenſum eſt iam. ' Igitur ex æquo vt D E ſimul ad A, ſic E G ſimul ad C. Quod erat propoſitum. 14. *ſeptimi.*

Hoc poſito eſto B numerus Numerorum primi lateris, medius proportionalis inter A & C. dico A ¦ N − D 4. B 1 N. C 2 N − D 4. ſiue A ponatur numerus Numerorum ſecundi lateris, ſiue C. eandem contingere ſolutionem. Sit enim D latus quadrati diuidendi in duos quadratos. Igitur A − D erit ſecundum latus, ' cuius quadratus conſtabit ex quadratis ipſorum A & D. minus duplo producti ex A in D. cui addendo quadratum ex B. totum compoſitum æquabitur quadrato diuidendo abs D. Quare auferendo vtrimque quadratum abs D, & transferendo defectum in alteram æquationis partem, manent quadrati ex A & B ſimul æquales duplo producti ex A in D. vnde fit valor Numeri diuidendo duplum producti ex A in D per aggregatum quadratorum ab, A & B. ſimiliter oſtendemus ſi ſecundum latus ſtatuatur C − D valorem Numeri haberi diuidendo duplum producti ex C in D per aggregatum quadratorum abs B & C. Cum ergo per præcedens Theorema ſit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad A. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad C. ac proinde per eundem duplum ipſius D multiplicando conſequentes, ' ſit vt aggregatum quadratorum abs A & B ad duplum producti ex A in D. ita aggregatum quadratorum abs B & C ad duplum producti ex C in D. patet diuiſo ſeorſim duplo producti ex A in D per aggregatum quadratorum abs A & B, & duplo producti ex B in C per aggregatum quadratorum abs B & C. fieri ob æqualitatem proportionis, eundem quotientem vtrobique, atque ideo eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quod demonſtrandum erat. 4. *ſecundi.* *Schol. 22. 6*

Aduertendum præterea primi quadrati latus poni poſſe quemlibet Numerorum numerum, dum in ſecundi latere ponatur maior vel minor Numerorum numerus, verbi gratia ponatur primi latus 3 N. erit quadratus 9 Q. Igitur ſecundus quadratus erit 16 − 9 Q. cuius latus fingatur 2 N. − 4. fiet quadratus 4 Q. − 16 N. + 16, æqualis 16 − 9 Q. & tandem 13 Q. æquabuntur 16 N. & fiet 1 N. $\frac{4}{13}$ erit igitur primum latus $\frac{12}{13}$ ſecundum $\frac{4}{13}$ quorum quadrati $\frac{144}{169}$ & $\frac{16}{169}$ quorum ſumma $\frac{160}{169}$ ſeu 16. vbi accidit (quod animaduerſione dignum eſt) reſoluendo hypoſtaſim ſecundi lateris illud reperiri non 2 N. − 4. ſed 4 − 2 N. Manet tamen eadem æquatio, & res æquè bene ſuccedit, quia quadratus 4 Q. − 16 N. + 16. cum quo æqualitas inſtituitur, habere poteſt duplex latus, nimirum 2 N. − 4. vel 4 − 2 N. nec intereſt à quo illorum effingi concipiatur. Quod ſemel monuiſſe ſufficiat, ne cui ſcrupulum moueat quotieſcunque deinceps ſimile quid continget. Sanè Franciſcus Vieta in tali caſu defectum ſub ambiguitate relinquens tali nota vteretur ad eum ſignificandum 2 N. − 4. Indicans ſcilicet ob indeterminationem Numeri qui talis eſſe poteſt vt 2 N. nunc maiores ſint quàm 4. nunc minores, latus illud poni vel 2 N − 4. vel 4 − 2 N. prout valor Numeri commodius poſitionibus applicari poterit.

Cæterum ex operatione Diophanti nullo negotio Canon erui poteſt. Sed omnium facillimus ad huiuſmodi quæſtiones ſoluendas, elicitur ex propoſitione tertia libri tertii poriſmatum. nimirum. Canon.

Dati quadrati latus diuide in duos numeros planos ſimiles, horum interuallum, & duplum medij proportionalis inter eos cadentis, latera exhibent quæſitorum quadratorum.

Vt ſi datus ſit quadratus 16. diuide latus eius 4. in planos duos ſimiles, habentes ſcilicet rationem quam 4 ad 1. quod fiet per Canonem ſecundæ primi, eruntque $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{5}$ quorum interuallum $\frac{3}{5}$ Quare latera quæſitorum quadratorum ſunt $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{5}$. Si autem 4. diuidatur rurſus in alios duos planos ſimiles ſeruantes aliam proportionem, alia reperietur ſolutio, vt ſi diuidatur in duas partes ſeruantes rationem quam habent 4. ad 9. erunt hæ $\frac{4}{13}$ & $\frac{9}{13}$ quarum interuallum, & duplum medij proportionalis ſunt $\frac{12}{13}$ & $\frac{36}{169}$ latera ſcilicet quæſitorum quadratorum. Attamen, ne quid tyrones fallat, aduertendum eſt fieri poſſe, vt idem numerus bis diuidatur in duos planos ſimiles, nec tamen per geminam illam diuiſionem quadratus illius bis componatur ex duobus quadratis. Quod accidit quotieſcunque partium prioris diuiſionis interuallum æquatur duplo medij proportionalis cadentis inter partes poſterioris diuiſionis, & è conuerſo. Vnde neceſſe eſt per vtranque diuiſionem eadem quadratorum latera reperiri, non autem diuerſa. Verbi gratia, ſi idem 4. diuidatur in planos ſimiles $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{5}$ quorum ratio eſt quæ 1 ad 9. ſunt hi diuerſi à iam expoſitis $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{5}$. Attamen quia eorum interuallum $\frac{1}{5}$ idem eſt cum duplo medij qui cadit inter $\frac{1}{5}$ & $\frac{2}{5}$. & è conuerſo interuallum ipſorum $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{25}$ idem eſt cum duplo medij qui cadit inter $\frac{2}{5}$ & $\frac{11}{25}$ nimirum $\frac{4}{25}$ patet per vtramque diuiſionem eadem reperiri latera $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{5}$. Vt autem hæc ex altiori principio repetantur, id huiuſmodi planis ſimilibus accidit, quia illi ſunt in ratione quadratorum 1 & 9. iſti verò in ratione quadratorum 1. & 4. at priorum latera æquantur ſummæ laterum poſteriorum & eorum interuallo, etenim poſteriorum latera ſunt 1. & 2. quorum ſumma & interuallum, nimirum 3. & 1. conficiunt latera priorum. Hanc porrò eſſe veram ſymptomatis huius cauſam more noſtro libet demonſtrare.

Sunto quadrati A C. quorum latera G H. itemque quadrati D F quorum latera K L, ita vt ipſorum K L ſumma ſit æqualis ipſi G, & eorumdem K L interuallum ſit æquale ipſi H. Tunc ducatur

idem numerus M in ipsos A C, vt fiant plani similes Q S. itemque ducatur idem N. in ipsos D F, vt fiant plani similes T X. ita tamen vt amborum Q S. summa sit æqualis summæ amborum T. X. & ipsorum Q S. medius proportionalis esto R, interuallum verò Y. Ipsorum quoque T X medius proportionalis esto V, interuallum Z. dico tam Z ipsius R. quàm vicissim Y ipsius V duplum esse. Sumantur enim & ipsorum A C. & D F medij proportionales B E, & eorumdem interualla O P. ' Quoniam igitur quadratorum D F interuallum P fit ex summa laterum K L in eorundem interuallum, fiet P ex G in H ex hypothesi, at ' ex G in H fit etiam B. igitur B P. sunt æquales. ' At verò quadrati A C, simul quadratorum D F. simul dupli sunt, & ex M in ipsos A C fiunt Q S. ex N autem in ipsos D F fiunt T X, cùm ergò summa duorum Q S. sit æqualis summæ amborum T X. patet ex M in summam ipsorum A C fieri eundem numerum qui fit ex N. in summam ipsorum D F. Igitur ' est vt summa ipsorum A C ad summam ipsorum D F, ita N. ad M. Quare & N. duplus est ipsius M. Rursus cum ex M in ipsos A C. fiant Q S. patet etiam ex M. in ipsos B. O fieri R Y. similiterque ex N in ipsos E P. fieri V. Z. Quoniam itaque ex N in P fit Z, & ex M in B fit R. & B. P. ostensi sunt æquales, patet ex eodem numero in ipsos N M. fieri ipsos Z R. ' Quamobrem est Z ad R sicut N ad M. ac proinde Z est duplus ipsius R. Quod erat ostendendum.

Deinde cum summa ipsorum G H constet ex summa ipsorum K L & eorum interuallo, ' erit summa ipsorum G H dupla ipsius K. & quia interuallum eorundem G H fit ex summa ipsorum K L. multata eorundem interuallo. ' erit interuallum ipsorum G H duplum ipsius L. Quare productus ex summa ipsorum G H in eorundem interuallum, ' nimirum O æquabitur producto ex duplo K in duplum L, seu quadruplo producti ex K in L. Igitur O quadruplus est ipsius E. Proinde productus ex N in O quadruplus erit producti ex N in E seu ipsius V. sed quia N est duplus ipsius M. idem productus ex N in O duplus est producti ex M in O seu ipsius Y. Igitur Y. duplus est ipsius V. Quod demonstrandum erat. Itaque ex omni parte constat propositum.

3. 2. *perism.* 11. *octaui.* 7. 2. *perism.* 19. *septimi.* 17. *septimi.* 23. 1. *perism.* 23. 1. *perism.* 3. 2. *perism.*

M 5. O 8. Y 40.
G 3. H 1. A 9. B 3. C 1. Q 45. R 15. S 5.
K 2. L 1. D 4. E 2. F 1. T 40. V 20. X 10.
N 10. P 3. Z 30.

Hinc euidens est cur etiam cum Diophanto positionibus diuersimodè institutis, eadem tamen nonnunquam solutio contingat, si enim primò statuantur numeri Numerorum vtriusque lateris quales sunt K L. & secundò statuantur iidem numeri Numerorum quales sunt G H. eadem per vtramque positionem inuenietur solutio. Nam si ponas cum Diophanto latus vnum 1 N, aliud verò 2 N − 4. fiunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}$ si autem rursus ponas latum vnum 1 N. aliud verò 3 N − 4. fient rursus eadem quadratorum latera $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}$ Eadem de causu si prima vice ponas numeros Numerorum 2. & 3. secunda vice 1 & 5. non contingit solutio diuersa, quia scilicet ipsorum 2 & 3. summa & interuallum conficiunt ipsos 5 & 1. & sic de aliis. Denique ex dictis melius & vniversalius quàm modo à Xilandro tradito, licebit cognoscere an propositus quadratus componatur ex duobus quadratis integris, immò & quoties in duos integros quadratos diuidi possit, respiciendo scilicet an latus eius è duobus planis similibus integris componatur, & quoties ex planis similibus integris & diuersis componatur, adhibita tamen cautione ne duorum ex iis planis similibus interuallum æquale sit duplo medij proportionalis inter alios duos cadentis. Hac arte inuenies quadratum lateris 65. quater componi ex duobus quadratis integris, quia scilicet ipse 65. quater componitur è duobus planis similibus integris, nimirum ex 1 & 64. & 13. & 52. ex 16. & 49. & denique ex 20. & 45. Itaque per Canonem suprà traditum inuenies latera quadratorum, ex quibus quadratus ipsius 65. componitur, videlicet 63. & 16. vel 39. & 52. vel 33. & 56. vel demum 25. & 60. Sed de his satis.

QVÆSTIO X.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ὃς σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, μεταλαβεῖν εἰς δύο ἑτέρους τετραγώνους. ἔστω τὸν ιη̄ συγκείμενον ἐκ τε τῶν δ̄. καὶ θ̄ τετραγώνων. μεταλαβεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους. εἰλήφθωσαν τῶν συγκειμένων τετραγώνων αἱ πλευραὶ μονὰς καὶ μονὰς β̄ μονὰς γ̄. ἐκ τετάχθωσαν αἱ τῶν ὑποζητουμένων τετραγώνων πλευραὶ, ἡ μὲν ς̄ ἑνὸς μ̄ β̄. ἡ δὲ ις̄ ὅσων δήποτε, λείψει μονάδων ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν λοιπῶν πλευρὰ γ̄. ἔστω ις̄ β̄ λείψει μ̄ γ̄. καὶ γίνονται οἱ τετράγωνοι. ὁ μὲν δωδέκις μονὰς μιᾶς ις̄ δ̄. μ̄ δ̄. ὁ δὲ δεκαπέντε δ̄ μ̄, ϟ̄. λοιπόν ἐστι τὼς δύο συνταθέντας ποιῆν μο-

DATVM numerum qui ex duobus componitur quadratis, in alios quadratos partiri. Numerum 13. compositum ex quadratis 4. & 9. diuidere oporteat in alios duos quadratos. Sumantur latera prædictorum quadratorum 2. & 3. & ponantur quæsitorum quadratorum latera: hoc quidem 1 N. + 2. Illud verò numerorum quotcunque, cum defectu tot vnitatum quot continet latus alterius quadrati, puta 3. & esto 2 N. − 3. & fiunt quadrati, ille quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Hic verò 4 Q. + 9. − 12 N.

Restat

Reſtat vt ambo ſimul iuncti conficiant vnitates 13. ſed ambo ſimul iuncti faciunt 5 Q. + 13. − 8 N. Hoc ergo æquatur 13. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad Poſitiones. Poſueram priorir latus 1 N. + 2. erit ergo $\frac{11}{2}$. ſtatueram autem poſterioris latus 2 N. − 3. erit vtique $\frac{1}{2}$. Ipſi ergo quadrati erunt, ille quidem $\frac{121}{4}$. Hinc autem $\frac{1}{4}$. Et ambo ſimul faciunt $\frac{122}{4}$ ſeu imperatas vnitates 13.

πάδας ιγ̄. ἀλλ' οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι δυνάμεις ε̄ μονάδας ιγ̄ λείψει ἀριθμῷ η̄. ταῦτα ἴσα μοναῖσι ιγ̄. καὶ γίνεται ὁ ς' π ε̄. ὅτι τὰς ὑποστάσεις, ὅταξ α τλω' τῆ σφ'του πλευρὰ ς' ἰσὸς μ' β̄. ἴσαι, ιη̄ ε̄. τλω' ϛ̄ ϝ̄ δευτέρα πλευρὰ ς' β̄ λείψει μ' ϛ̄ ἴσαι ἰσὸς πέμπτῳ, αὐτὴ ϛ̄ οἱ τετράγωνοι ἔσονται. ὃς μὲν τκδ̄ κε̄. ὃς δὲ ἰσὸς εἰκοσοπέμπτῳ, καὶ αἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι τκε̄ καὶ ἀφαιρεῖ τὰς ὑποτεθείσας μονάδας δυκατρεῖς.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm verò numerum ex duobus cubis compoſitum diuidere poterimus in alios duos cubos? Hæc quæſtio difficilis ſane nec Bacheto aut Vietæ cognita fortaſſe nec ipſi Diophanto; eius tamen ſolutionem dedimus infra in notatis ad quæſtionem ſecundam lib. 4.

IN QVAESTIONEM X.

PVLCHERRIMVM eſt hoc problema, & eiuſdem naturæ cum præcedente, cuius magnus eſt vſus in ſequentibus, præſertim libro quinto. Sed circa operationem Diophanti multa ſunt obſeruanda, quæ Scholiaſtes & Xilander, vel non viderunt omnino, vel imperfectè tractarunt.

Primò obſeruandum ne in vtroque latere fictitio idem ſtatuatur Numerorum numerus, alioquin non inuenientur diuerſa quadratorum quæſitorum latera à datis iam lateribus, ſed eadem prorſus, & inutilis erit operatio. Ita in exemplo Diophanti ſi ponas fictitia latera 1 N. − 2. & 1 N. − 3. vel rurſus 1 N. + 2. & 1 N. − 3. inuenies per vtramque poſitionem eadem latera 2. & 3. quæ iam data ſunt, & nihil actum erit. Quod vt ſua demonſtratione fulciatur ſunto B C. latera data quadratorum, quorum ſumma K. & ponatur A certus Numerorum numerus in vtroque latere fictitio, ita vt alterum ſit A − B, alterum A − C. duplum autem quadrati abs A eſto D. & duplum producti ex K in A eſto E. patet diuiſo E per D. oriri valorem Numeri. Nam ducere B in A, & C in A idem eſt atque ducere ſummam ipſorum B C. nempe K in A. Quare duplum productum ex B in A, & ex C in A, æquatur duplo producti ex K in A, puta ipſi E. Quamobrem E eſt numerus Numerorum qui reperiuntur in aggregato quadratorum à fictitiis lateribus A − B & A − C. Atqui D eſt numerus Quadratorum qui ſunt in eodem aggregato. Proinde diuiſo E per D fit valor Numeri. Itaque quia duplum A in ipſum A ductum facit D, & duplum A in K facit E, erit D ad E ſicut A ad K. Quare diuiſo K per A prodibit idem valor Numeri qui oſtenſus eſt prodire diuiſo E per D. Proinde cum reſoluendo hypoſtaſes, ducetur valor Numeri in A, fiet K, à quo auferendo B reſtabit vtique C, & auferendo C, reſtabit B. Igitur latus A − B idem erit quod ipſe C, & latus A − C idem erit quod B. Quod erat demonſtrandum.

K 5.
A 6 N. − B 2. A 6 N. − C 3.
D 72 Q. E 60 N.

Deinde ponatur vnum latus A + B. alterum A − C. & ſit K interuallum ipſorum B C ſit autem D vt prius duplum quadrati A. ſed E. ſit duplum producti ex A in K. Patet ob ſigni diuerſitatem, haberi numerum Numerorum contentorum in aggregato quadratorum qui fiunt à fictitiis lateribus, ſi à duplo producti ex A in C, auferatur duplum producti ex A in B. hoc autem idem eſt atque ducere duplum A in interuallum ipſorum B C. ſeu in K. Igitur E eſt ille numerus Numerorum. Itaque cùm D ſit numerus quadratorum in eodem aggregato contentorum, diuiſo E per D. orietur valor numeri. Quia ergo ducendo duplum A in A fit D, & ducendo idem duplum A in K fit E, erit A ad K vt D ad E. Proinde diuiſo K per A orietur item valor Numeri, & reſoluendo hypoſtaſes cùm A ducetur in valorem Numeri fiet K. Quamobrem A + B æquabitur ipſi C. & A − C hoc eſt C − A æquabitur ipſi B. Quod erat propoſitum.

K 1
A 6 N. + B 2 A 6 N. − C 3.
D 72 Q. E 12 N.

Aduertendum ſecundò ad hoc vt æquatio procedat, in lateribus fictitiis ponendum eſſe latus vtrumque datorum cum ſigno defectus, vel ſaltem alterum, ita vt in aggregato quadratorum fictitiorum numerus Nnmerorum reperiatur cum ſigno defectus, ac proinde tranſeat in alteram æquationis partem, & maneant Numeri æquales quadratis. Quare tutiſſimus omnium modus fingendi latera quadratorum eſt, cùm in vtroque ponuntur data latera cum ſigno defectus, & tunc nulla

tegris quæſtio ſolui poſſit, immò & an pluribus modis in integris ſolutio contingat: ſi enim ipſi B C tales deligi poſſint, vt vterque ſit par vel vterque impar, patet tam eorum ſummæ, quàm interualli ſemiſſem in integris haberi. Quare ipſi D E integri erunt vt iam docuimus ad primam primi. Si autem ipſorum B C. alter ſit par, alter impar, non poterunt ipſi D E haberi niſi diuiſa vnitate. Quamobrem quot modis reperiri poterunt duo numeri mutuo ductu conficientes datum interuallum, quorum vterque ſit par, vel vterque impar, tot modis per integros ſoluetur quæſtio. Vt dato interuallo eodem 60. quia id fit tum ex 10 in 6. tum ex 30. in 2. quorum vterque par eſt duobus modis in integris continget ſolui quæſtionem, eruntque quæſita latera 8 & 2 vel 16 & 14. ſimiliter dato interuallo 15. quia id fit tum ex 15 in 1. tum ex 5 in 3. duobus modis in integris ſoluetur quæſtio, eruntque quæſita latera 8 & 7. vel 4 & 1. Rurſus dato interuallo 48. quia id fit tum ex 2. in 24. tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. tribus modis ſoluetur quæſtio per integros, & erunt quæſita latera 13. & 11. vel 8 & 4. vel denique 7 & 1. Vnde ſequitur quod iam aliter demonſtrauimus in Corollario vigeſimæ ſecundæ primi poriſm. ſi datum interuallum ſit pariter impar tantum, non poſſe ſolui quæſtionem in integris, nam non metietur illud numerus par per parem, alioquin eſſet pariter par contra hypotheſim, non metietur etiam idem interuallum numerus impar per imparem, alioquin eſſet impar, quod eſt etiam contra hypotheſim. Quamobrem relinquitur vt metiatur tantùm illud numerus par per imparem, ac proinde, vt oſtenſum eſt, non continget ſolutio in integris. Si autem datum interuallum ſit impar, vel quilibet numerus pariter par ſupra quaternarium, ſoluetur quæſtio ſemper in integris. Quia quemlibet imparem vnitas metitur per ipſummmet imparem. At quemlibet pariter parem metitur binarius per eiuſdem pariter paris ſemiſſem qui ſemper eſt par. Excluditur autem quaternarius, quia metitur eum tantum binarius per binarium non poteſt autem idem binarius eſſe ſumma & interuallum duorum eorundem numerorum, niſi pars ponatur æqualis toti. 8. 1. poriſ.

QVÆSTIO XII.

DAtis duobus numeris addere eundē numerum, & vtrumque quadratum efficere. Sint dati numeri 2 & 3. & eſto addendus 1 N. erit ergo tum 1 N. + 2. tum 1 N. + 3. æqualis quadrato. Et hoc genus vocatur duplicata æqualitas, æquatur autem ſic. Interuallo conſpecto, quære duos numeros quorum vnius in alterum multiplicatio producat iſtud interuallum. Sunt autem hi 4. & $\frac{1}{4}$. Horum vel interualli ſemiſſis in ſe ductus æquatur minori, vel ſummæ ſemiſſis in ſe ductus æquatur maiori. Sed interualli ſemiſſis in ſe ductus facit $\frac{1}{4}$ hoc æquatur 1 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{7}{4}$. Summæ vero ſemiſſis in ſe ductus facit $\frac{49}{4}$ hoc æquatur maiori, nimirum 1 N. + 3. & fit 1. N. rurſus $\frac{37}{4}$. Erit igitur addendus numerus $\frac{33}{16}$ & manifeſtum propoſitum.

Ne autem in duplicatam æqualitatem incidamus, ſic agendum. Inuenire numerum qui & ad 2. & ad 3. additus, vtrumque quadratum efficiat. Quæro prius numerum aliquem qui adſumens binarium faciat quadratum, vel quis numerus adiecto ternario fiat quadratus. Porro à quocunque quadrato ſubtraxero 2. vel 3. is erit qui quæritur. Agamus de 2. is auſe-

Δοῦναι δύο ἀριθμοῖς τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἔστω τῷ β καὶ τῷ γ καὶ ἔστω ὁ προστιθέμενος ς̄ ἰσός. ἔσται ἄρα ὁ μὲν ς̄ ἑνὸς μ̄ β. ὁ δὲ ς̄ ἑνὸς μ̄ γ ἴσοι τετραγώνοις. καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοῦν ὑπερέχον, ἰστέον δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. ἐφ' ὧν τινῶν ὑπεροχῶν ζητεῖ δύο ἀριθμούς, ἵνα τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τινὰ ὑπεροχήν. εἰσὶ δὲ μ̄ δ καὶ μονάδος τέταρτον. τούτων ὅπου τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, ἢ τῆς συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι. ἀλλὰ δ ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἐστὶ σκθ̄ ιϛ̄. ταῦτα ἴσα ς̄ ἐπὶ μονάσι δυσὶ, ᾗ γίνεται ὁ ς̄ ξζ ιϛ̄. δ δ συνθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἐστὶ σπθ̄ ιϛ̄. ταῦτα ἴσα τῷ μείζονι, τουτέστι ς̄ ἐπὶ μονάσι τεσσί. ᾗ γίνεται ὁ ς̄ πάλιν ξζ ιϛ̄. ἔσται ἄρα ὁ προστιθέμενος ξζ ιϛ̄. ᾗ φανερὰ τὰ τῆς προτάσεως.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλοῦν ἰσότητα ἐμπέσῃ δεκτέον εὖπορον. τῷ δύο καὶ τῷ τρία προσδοῦναι τινὰς δύο ἑκατέρῳ προσκτῆσαι ποιεῖ τετράγωνον ζητῶ πρότερόν τινα ἀριθμὸν ὃς προσλαβὼν μονάδας δύο ποιεῖ τετράγωνον, ἢ ᾗ τὸς ἀριθμὸς προσλαβὼν μονάδας ξ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀφῶ τὰς μονάδας δεῖ ἔσαι ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ ὅπὲρ τ̄ μονάδων δύο, ᾗ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ δωδε-

μους μιᾶς, λοιπὸν ἴσαι δύναμις μία λείψει μ' β. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν προσλάβῃ μονάδας β ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν προσλάβῃ μονάδας ξ̄ς̄, γίνεται δύναμις μία, μονάδες μία. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ἑνὸς λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὴν ὑ δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προσκειμένας ὑ λείψεως μονάδας, εἶον ὡς; ὅτι τὰ παρόντος τὰς μονάδας β. οὔτως γὰρ ἐν ἑκατέρῳ αὐτῷ μερῶν ἓν εἶδος ἐπὶ ἴσον καθαιρεθήσεται. ἔστω ἀπὸ ς̄ ἑνὸς λείψει μ' δ'. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δύναμις μία, μ' ις̄ λείψει ς̄ς̄ῑ. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάδι μ.ᾱ. κενὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. λειποὶ ἀριθμοὶ ῑ̄ ἴσοι μονάδι ῑ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ῑᾱ. διὰ τὰς ὑποστάσεις ἔσχε ὁ προτεθεὶς ἀριθμὸς ξ̄ζ ῑ̄ᾱ.

ratur ab 1 Q. supereſt 1 Q. − 2 & eſt euidens hunc ſi abſumat 2. fore quadratũ. Sed ſi adſumat 3. fit 1 Q. + 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum vt reſolutis hypoſtaſibus 1 Q. ſuperetipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 2. Sic enim ex vtraque parte vna ſpecies vni ſpeciei æqualis relinquetur. Eſto ergo ab 1 N. − 4 ipſe quadratus erit 1 Q. + 16 − 8 N. Hoc æquatur 1 Q. + 1. Communis addatur defectus, & auferantur a ſimilibus ſimilia, relinquuntur 8 N. æquales 15. & fit 1 N. $\frac{1}{8}$. Ad poſitiones. Erit addendus numerus $\frac{63}{64}$.

IN QVAESTIONEM XII.

DVPLICI operatione quæſtionem hanc eleganter abſoluit Diophantus, ſed neutram Scholiaſtes, Xilanderve ſatisfeliciter explicauit. Sanè quod ad primam attinet, in qua duplicata æqualitate vtitur author, benè monet vterque eam niti primæ ſecundi. Sed id ſolùm non ſufficit vt eius adæquata ratio perfectè comprehendatur, nam licet inuenerimus duos quadratos eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri ea lege vt maior maiorem datorum ſuperet, & minor minorem, non ſtatim conſtat per hanc duplicatam æqualitatem vtrobique reperiri eundem valorem Numeri, quod vnum curandum eſt vt quæſtio perfectè ſoluta ſit. Hoc ergo ſic demonſtrabimus. Sint dati Numeri A B. quorum interuallum C. Ponendo ergo quæſitum numerum 1 N. erunt quadrato æquandi 1 N. + A & 1 N. + B. ſumantur duo quadrati D E eodem interuallo C diſtantes, ita vt D ſit maior quàm A, & E ſit maior quàm B. Dico ſiue D æquetur 1 N. + A. ſiue E æquatur 1 N + B. eundem vtrobique reperiri valorem Numeri. Quia enim ex conſtructione eſt in arithmetica medietate A ad B vt D. ad E. erit & permutando in eadem medietate A ad D, ſicut B ad E. Igitur ſi ſumatur F exceſſus D ſuper A, erit idem F exceſſus E ſuper B. Cùm ergo æquando D cum 1 N + A. detrahentur ſimilia à ſimilibus, nimirum cùm A vtrimque auferetur, remanebit F æqualis 1 N. ſed etiam æquando E cum 1 N + B auferetur vtrimque. B & remanebit idem F æqualis 1 N. Quare conſtat propoſitum.

A		B
1 N. + 30.		1 N. + 6.
	C 24.	
D 49.	F 19.	E 25.

7. 2. *poriſm.*

Hoc demonſtrato, patet totum duplicatæ æqualitatis negotium in eo verſari, vt inueniantur duo quadrati eodem interuallo diſtantes quo diſtant dati numeri, quod ſanè fit per Canonem poſtremum ad præcedentem allatum, qui vt oſtenſum eſt, totus pendet à tertia ſecundi poriſmatum, quæ eadem eſt cum quinta ſecundi elementorum. Verùm quilibet quadrati quorum ſit idem interuallum qui & datorum numerorum, non ſtatim apti ſunt duplicatæ æqualitati reſoluendæ, ſed tales deligendi ſunt, vt maior ſuperet maiorem datorum numerorum, & minor minorem.

Hoc quidem vidit Scholiaſtes, ſed in eo allucinatus eſt, vt benè monet Xilander, quod arte certa tales quadratos reperiri poſſe negauit. Ipſe quoque Xilander in affinem eius quem reprehendit errorem lapſus meliora non affert, ſed indicata tantum neceſſitate tales quadratos reperiendi, quo pacto id fieri oporteat, minimè docet. Res tamen facilis eſt, nam tales numeri ſumendi ſunt quorum mutuo ductu fiat datum interuallum, vt ſummæ illorum ſemiſſis quadratus excedat maiorem datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti, vbi interuallum eſt 1. maior numerorum 3. oportet inuenire duos numeros quorum mutuo ductu fiat 1. & quorum ſummæ ſemiſſis quadratus ſit maior quàm 3. Quare cùm ſummæ ipſius quadratus ſit quadruplus quadrati ſemiſſis, oportet ſummæ quadratum excedere 12. Proinde cùm latus proximè maius ipſius 12. ſit 3. $\frac{1}{2}$. neceſſe eſt ſummam quæſitorum numerorum quorum mutuo ductu fiat 1. excedere 3 $\frac{1}{2}$. vel ſanè non eſſe minorem. Hinc eſt cur abiectis 2. & $\frac{1}{2}$. Itemque 3. & $\frac{1}{2}$. ſe legerit Diophantus 4. & $\frac{1}{2}$. potueritque eorum loco ſumere 5. & $\frac{1}{2}$. vel 6. & $\frac{1}{2}$ alioſque infinitos, quorum ſumma maior eſt quàm 3 $\frac{1}{2}$. Ita ſi dati numeri ſint 30. & 6. cùm eorum interuallum ſit 24. maior vero ipſorum 30. cuius quadruplum 120. quærendi erunt duo numeri quorum mutuo ductu fiat 24. ita vt eorum ſummæ quadratus excedat 120.

His præmissis, si ponantur data latera C D. & sint A. B. numeri Numerorum, sitque vnum latus fictitium A − C, alterum B + D. fiet æquatio inter aggregatum quadratorum ab A & B, & inter duplum producti ex A in C multatum duplo producti ex B in D. nempe inter H & duplum ipsius K.

A 15 N. − C 6 F 5. E 2.
B 3 N + D 4. G 1.
H 234 Q. K 78 N.

Quare orietur valor Numeri diuidendo duplum ipsius K per H, Quia autem vt H ad K, sic est A ad F. erit & H ad duplum K, sicut A ad duplum F. hoc est ad summam ipsorum C D. Quare hac summa diuisa per A orietur quoque valor Numeri. Proinde resoluendo hypostases cum vnitates ipsius A ducentur in valorem Numeri, fiet A æqualis summæ ipsorum C D, vnde patet A − C fore æqualem ipsi D. Similiter quia vt H ad duplum K. sic est B ad duplum G. nempe ad E, diuiso E per B orietur rursus valor Numeri. Vnde resoluendo hypostases cùm vnitates ipsius B. ducentur in valorem Numeri, fiet B æqualis ipsi E. Quamobrem B + D necesse erit æquari ipsi C. Quare ex omni parte patet propositum.

Idem quoque absurdum sequitur, cùm in vtroque latere fictitio ponuntur data latera cum signo defectus, si Numerorum numerus minori appositus, ad appositum maiori eandem rursus habeat rationem quam habet summa datorum laterum ad eorundem interuallum, vt si in hypothesi Diophanti ponatur alterum latus 5 N. − 2 alterum 1 N. − 3. Quod eadem facilitate demonstratur, hoc præmisso Theoremate.

Datis quatuor numeris, quorum primus ad secundum sit vt summa tertij & quarti ad excessum quarti supra tertium, erit aggregatum quadratorum primi & secundi, ad aggregatum productorum ex primo in tertium, & ex secundo in quartum, sicut primus ad semissem summæ tertij & quarti, vel sicut secundus ad semissem interualli eorundem.

Demonstratur autem hoc theorema eadem ferè ratione qua & præcedens, imò ex illo facilè infertur, probando scilicet eundem K fieri siue à producto ex A in C. auferatur productus ex B in D; siue producto ex A in D. addatur productus ex B in C. Quod tibi relinquo considerandum exercitationis ergo.

Varij Canones ex varia positionum institutione formari possent, sed quia parum in eis esset compendij, huic labori supersedeo. Verùm Canonis loco libet explicare modum perficiendi hoc problema à Francisco Vieta traditum zetetico 3. libri quarti, qui talis est.

Constituantur latera data, hypotenusæ duorum triangulorum rectangulorum similium. Summa baseos primi & perpendiculi secundi; itemque interuallum perpendiculi primi & baseos secundi: vel interuallum baseos primi & perpendiculi secundi; itemque summa perpendiculi primi, & baseos secundi constituent quæsitorum quadratorum latera.

Porrò quilibet numerus fit hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, diuidendo scilicet eius quadratum in duos quadratos. Verbi gratia, sint data latera 2. & 3. si per Canonem præcedentis diuida 2. in duos planos similes, videlicet qui sint in ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$. Rursus diuide 3. in duos planos similes, quique sint in eadem ratione 1 ad 4. erunt hi $\frac{1}{5}$ & $\frac{4}{5}$ ex quibus formabuntur latera circa rectum trianguli rectanguli $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$. Habemus itaque latera circa rectum triangulorum similium, nimirum $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{5}$. $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{5}$. summa baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{7}{5}$ interuallum autem perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{1}{5}$. Sunt ergo latera quæsitorum quadratorum $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{5}$. vel summa perpendiculi primi & baseos secundi est $\frac{7}{5}$ interuallum autem baseos primi & perpendiculi secundi est $\frac{1}{5}$. Rursus ergo quæsitorum latera esse possunt $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{5}$. Huius rei demonstratio in promptu est. Sunto data latera A. B. & inuenienda sint alia latera, quorum quadrati æquentur quadratis ipsorum A B. fiat A hypotenusa trianguli rectanguli per præcedentem, sintque latera circa rectum C D. fiat item B hypotenusa similis trianguli, cuius latera circa rectum sint E F. Ita vt quadrati ipsorum C D sint æquales quadrato abs A & quadrati ab E & F. sint æquales quadrato abs B. & sit C ad D vt E ad F. Denique ipsorum C F summa esto G interuallum L. Item ipsorum E D summa esto K interuallum H. Dico latera quæsita esse G H. vel etiam K L. Quia enim est C ad D vt E ad F. Erunt tam quadrati duorum G H. quàm quadrati duorum K L æquales quadratis omnium C D. E F. At quadrati ipsorum C D. E F æquantur quadratis duorum A B ex hypothesi, igitur quadrati ipsorum A B æquantur quadratis ipsorum G H. vel etiam ipsorum K L. Quod erat demonstrandum.

A 10. B 15.
C 8. E 12.
D 6. F 9.
G 17. H 6.
K 18. L 1.

6. 3. *porism.*

QVÆSTIO XI.

INVENIRE duos quadratos numeros in dato interuallo. Constitutum sit interuallum ipsorum esse 60. Ponatur alterius latus 1 N. alterius verò 1 N. & quot-

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ. ὑποτετάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν εἰς μ ξ. τετάχθω δ' ἑνὸς πλευρὰ ς ἀριθμοῦ. ἔστω δὴ καὶ πλευρὰ ς ἀριθμοῦ, καὶ μ

Quare cùm radix proximè maior ipſius 120. ſit 11. oportebit quæſitorum numerorum ſummam eſſe maiorem quam 11. vel certe non minorem. Quare ritè ſumi poterunt 2. & 12. vel 3. & 8. aliique infiniti quorum ſumma maior, vel non minor quam 11. ſed eandem ob cauſam reiicientur 4. & 6. aliique infiniti quorum ſumma minor quàm 11.

Quod attinet ad ſecundam operationem verba, illa ὥστε τὸν ὑ δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰ, τὰς προϋποκειμένας τῆς λείψεως μονάδας, alio mendo non laborant, quicquid dicat Xilander, niſi quod vox τετάρτης temerè inculcata erat, nam legebatur in codice manuſcripto, αὐτὰς τὰς προϋποκειμένας τῆς τετάρτης λείψεως μονάδας. Cæterum hac voce ſublata, reliqua bene habent, nec vllam pariunt difficultatem, niſi ex praua Xilandri interpretatione, qui ea ſic conuertit. *vt ſubſtantia quadrati earum ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cùm tamen vox Hypoſtaſis hoc loco & alibi ſemper apud Diophantum ſignificet, non ipſas vnitates quæ ponuntur in latere fictitio, ſed ipſum valorem numeri vel quadrati poſitionibus applicatum, vt iam docuimus ad primam primi. Hinc etiam erroris cauſam præbuit Xilander Chriſtophoro Clauio cap. 29. ænigmate 98. ſed & Raphaël Bombellius in eodem lapſus eſt lib. 3. ſuæ Algebræ Problemate 66. Quare relictis illorum inutilibus commentis, genuinus horum verborum ſenſus hic eſt. *vt quadrati hypoſtaſis ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates*, vel vt clarioris doctrinæ gratia interpretati ſumus, *vt reſoluto hypoſtaſibus* 1 Q. *ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates.* Cùm enim quæſitus numerus poſitus ſit 1 Q − 2. manifeſtum eſt valorem quadrati talem reperiri debere vt ſuperet 2. Id autem arte certa qui conſequi poſſis non docuit hîc Diophantus. Sed profectò in ſequentibus ſæpe tali vtitur artificio quoties ſimile quid accidit. Quia numerus æquandus quadrato eſt 1 Q + 1. patet ſi eius latus fingatur 1 N − aliquot vnitatibus valorem Numeri oriri diuidendo quadratum ipſarum vnitate multatum per duplum earundem vnitatum. Quia vero 1 Q. vt dictum eſt debet eſſe maior quàm 2. ſumpto latere proximè maiore ipſius 2. nimirum 1 ½. oportet valorem numeri maiorem eſſe, vel certe non minorem quam 1 ½. Igitur eò redacti ſumus vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate multatus & diuiſus per duplum ipſius numeri, det quotientem maiorem vel certè non minorem quàm 1 ½. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1}{2}\frac{1}{N}$ maior eſt vel certè non minor quàm 1 ½. & omnia multiplicando per 2 N. fit 1 Q − 1. non minor quàm 3 N, ac proinde 1 Q. non minor quàm 3 N. + 1. qua æquatione reſoluta, fit 1 N. non minor quàm ℞ 3¼ + 1 ½. ſumptoque latere ipſius 3 ½. nimirum 1 ½ ſi ei addas 1 ½. fit 1. N. non minor quàm 3 ½. Quamobrem æquantes quadrato 1 Q. + 1. fingemus eius latus 1 N. − quotlibet vnitatibus quæ ſuperent 3 ½. ſic Diophantus finxit hoc latus 1 N. − 4. Poſſetque etiam fingi 1 N. − 5. vel 1 N − 6. & ſic in infinitum. Itaque vt iſta tyronum memoriæ firmius inhæreant, placet paulò aliter poſitiones inſtituere, quod fieri poſſe indicauit Diophantus his verbis. *Porro à quocunque quadrato ſubtraxero* 2. *vel* 3. *is erit qui quæritur.* Ponatur quæſitus numerus 1 Q. − 3. is enim adſumpto 3. quadratum facit. At idem abſumpto 2. facit 1 Q − 1. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt hypoſtaſis quadrati ſuperet ipſas ante poſitas defectus vnitates, nimirum 3. vt ergo determinemus de hoc vnitatum de numero, quia fiet valor Numeri diuidendo quadratum quæſitarum vnitatum auctum vnitate per duplum earundem vnitatum; At oportet 1 Q maiorem eſſe quàm 3. atque adeo 1 N. maiorem eſſe vel certè non minorem latere proximè maiore ipſius 3. quod eſt 2. Patet eò nos adduci vt inueniamus numerum, cuius quadratus vnitate auctus, & diuiſus per duplum ipſius numeri det quotientem non minorem quàm 2. Eſto huiuſmodi numerus 1 N. ergo $\frac{1}{2}\frac{1}{N}$ + ½ maior eſt, vel certè non minor quàm 2. & omnia in 2 N. Igitur 1 Q. + 1. maior eſt vel certè non minor quàm 4 N. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. vel 2 + ℞ 3. vel 2 − ℞ 3. & loco ℞ 3 ſumendo latus proximè minus ipſius 3. nempe 1 ¾. fit 1 N. vel maior quàm 3. ¾. vel minor quàm ½. Hic enim ob valorem Numeri duplicem, duplex inuenitur terminus alter ſupra quem, alter verò infrà quem, ſumi poteſt valor Numeri. Poſſumus ergo quadrato æquantes 1 Q. − 1. eius latus fingere ab 1. N. − quotlibet vnitatibus quæ ſint maiores quàm 3 ½. vel minores quàm ½. fingatur 1 N. − 4. fiet quadratus 1 Q. − 8 N. + 16. æqualis 1 Q. − 1. & tandem 1 N. eſt $\frac{17}{8}$ vnde fit quæſitus numerus $\frac{33}{8}$. idem qui repertus eſt per operationem Diophanti. Fingatur rurſus latus Quadrati 1 N. − ½ fiet quadratus 1 Q. − ½ N. + ¼ æqualis 1 Q. − 1. vnde fit 1 N. $\frac{5}{4}$ & eſt quæſitus numerus $\frac{33}{4}$. cui addendo 3. & 2. fiunt quadrati $\frac{49}{4}$ & $\frac{121}{4}$.

Si cui porrò laboriosior videbitur hæc operatio, licebit etiam aliam inſtituere magis expeditam, & quæ tantas difficultates minimè patiatur. Fingatur in eodem exemplo, quadratus aliquis ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet maiorem datorum numerorum 3. puta ab 1. N. + 2. fiet quadratus 1. Q. + 4 N. + 4. Hinc ergò auferendo 3. ſtatuatur reſiduum quæſitus numerus, nempe 1 Q. + 4 N. + 1. is enim adſumens 3. facit quadratum. Reſtat vt & adſumpto 2. quadratum faciat. Facit autem 1 Q + 4 N. + 3. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 3. vnitates numeri quadrato æquandi, eſto latus illud 1 N. − 3. fiet quadratus 1 Q. − 6 N. + 9. æqualis 1 Q. + 4 N. + 3. & ſit 1 N. ½ eſtque quæſitus numerus

ut suprà. Ex his omnibus operationibus varij Canones elici possunt, sed omnium facillimus à prima fit, nimirum.

Cape duos quadratos eodem internallo distantes quo & dati numeri distant, sed illis maiores, & à maiore quadrato aufer maiorem numerum, vel à minore minorem, residuum quod erit idem vtrobique, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIII.

Ἀπὸ δοθέντων δύο ἀριθμῶν ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἐπιτάσσω δὴ ἀπὸ τοῦ θ̄. καὶ τοῦ κᾱ. ἀφελεῖν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ἔστιν δ' αὖ τετράγωνος ἀφέλω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν, τάσσω τὸν λοιπὸν λείψει τούτου, ὃς ἔσται ὃν ἀφαιρούμενος καταλείπει τετράγωνον. ἔστω οὖν ὁ ἀπὸ τῆς μ̄ θ̄ ἀφαιρούμενος τετράγωνος δύναμις μία, λοιπαὶ ἄρα μονάδες θ̄ λείψει δυνάμεως ᾱ. δίδωσι ἄρα καὶ ἀπὸ μ̄ καὶ ἀφελεῖν μ̄ θ̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ μ̄ καὶ ἀφέλω μ̄ θ̄ λείψει δυνάμεως ᾱ λοιπὴν δύναμις ᾱ μ̄ ιβ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσω τὸ τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ὧν λείψει μονάδων τοσούτων ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον πλείονας ποιεῖν τῆς μ̄ ιβ̄. οὔπω γὰρ πάλιν ἑκατέρῳ τῶν μερῶν εἰ εἶδος ἐπὶ ἴσον καταλειφθήσεται. ἔστω δὴ μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἴσαι δυνάμεως μιᾶς, μ̄ ις̄ λείψει ςς̄ ῆ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ μονάσι ιβ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὁμοίως· λοιπαὶ ςς̄ ῆ̄ ἴσοι μονάσι δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ̄ ῆ̄. αἱ ιβ̄ θ̄ μονάδες συνάγουσιν οβ̄ ῆ̄. τουτέστι φος̄ ἐν̄. ᾗ δὴ λεῖψις δυνάμεως μιᾶς ἀφαιρεῖ ἀπ' αὐτῆς ις̄ ἐν̄. ὃ ποιεῖ τὰ τῆς προτάσεως.

A Datis duobus numeris auferre eundem numerum, & facere residuum vtrumque quadratum. Iniunctum sit vt à 9. & à 21. auferatur idem numerus, & vtrumque residuum sit quadratus numerus. Qualemcunque verò quadratum aufero de altero ipsorum; statuam reliquum cum hujus defectu, is enim detractus relinquet quadratum. Esto igitur quadratus à 9. detractus 1 Q. relinquentur ergo 9 — 1 Q. Oportet igitur etiam à 21. auferre 9 — 1 Q. & facere quadratum. Sed si à 21. abstulero 9. — 1. Q. relinquitur 1 Q. + 12. Hoc ergo æquatur quadrato, Fingo quadratum ab 1 N. cum defectu tot vnitatum, vt quadratum earum amplius sit quàm 12. Sic enim rursus ab vtraque parte vna species vni speciei æqualis relinquetur. Esto itaque vnitatum 4. ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 16. — 8. N. qui æquabitur 1 Q. + 12. Auferantur à similibus similia: relinquuntur 8 N. æquales 4. & fit 1 N. ½ Atqui 9. faciunt $\frac{27}{3}$ seu $\frac{324}{36}$, vnde defectus 1 Q. auferatur, scilicet $\frac{12}{36}$. & satisfit proposito.

IN QVÆSTIONEM XIII.

Limitatio quam præscribit Diophantus circa latus fictitium, omnino insufficiens est. Quod si libet experiri finge illud 1 N. — 8. quandoquidem quadratus ipsius 8. excedit 12. fiet quadratus 1 Q. — 16 N. + 64. æqualis 1 Q. + 12. & fiet 1 N. 3 $\frac{1}{4}$. Quare quæsitus numerus qui positus erat 9. — 1 Q. haberi non poterit, quia 1 Q. est maior quàm 9. Itaque cùm duo præscribendi essent termini intra quos cadere debet numerus vnitatum ponendus in latere fictitio, vnum duntaxat præfiniuit Diophantus, nimirum 12. seu potius latus ipsius 12. Quod cùm sit paulò minus quàm 3 $\frac{1}{2}$. rectè dicemus cum Diophanto numerum illum vnitatum debere superare 3 $\frac{1}{2}$. vel certè non esse minorem. Sed hoc non sufficit, nam præterea necesse est, talem fieri valorem Numeri vt resoluendo hypostases 1 Q. sit minor quam 9. quia scilicet quæsitus numerus positus est 9 — 1 Q. Quare oportet 1 N. minorem esse quàm 3. Quia ergo æquando quadrato 1 Q. + 12. & fingendo latus 1 N. — aliquot vnitatibus, fit valor Numeri ex quadrato vnitatum illarum multato numero 12. & diuiso per duplum sui lateris, eo redigimur vt inueniamus talem vnitatum numerum, cuius quadratus multatus numero 12. & diuisus per duplum sui lateris, det quotientem minorem quàm 3. Esto talis numerus 1 N. Ergo $\frac{1\,Q - 12}{2\,N}$ minor est quàm 3. & omnia in 2 N. fit 1 Q — 12. minor quàm 6 N. & tandem fit 1 Q. minor quàm 6. N. + 12. qua resoluta occasione 1 Q. minor quàm 21. + 3. seu minor quàm 7 $\frac{1}{2}$ ferè quamobrem necesse est omnino numerum vnitatum ponendarum in latere fictitio cadere inter 3 $\frac{1}{2}$ & 7 $\frac{1}{2}$ quales sunt 4. 5. 6. 7. & alij infiniti admittendo fractiones.

Cæterum,

Cæterum, vt benè monet Xilander, hæc quæstio non secus ac præcedens per duplicatam æqualitatem rite solui potest. Verbi gratia si dati sint numeri 9. & 21. Ponatur quæsitus ab vtroque auferendus 1 N. ergo tam 9. — 1 N. quam 21 — 1 N. æquatur quadrato. Horum interuallum est 12. Quare tales seligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu fiat 12. vt semissis summæ illorum quadratus sit minor quàm 21. vel quod idem est, vt semissis interualli quadratus sit minor quàm 9. ob contrariam scilicet rationem eius, ob quam in præcedente requirebatur contrarium. Memores igitur eorum quæ docuimus in præcedente, quia quadruplum ipsius 21. est 84. dicemus numerorum quorum mutuo ductu fiet 12. summæ quadratum minorem esse debere quàm 84. Quare cum proximum latus de 84. sit 9. $\frac{1}{2}$. oportebit summam talium numerorum minorem esse quàm 9 $\frac{1}{2}$. qualis est summa ipsorum 2. & 6. vel ipsorum 3. & 4. & aliorum infinitorum. Quod si sumamus 2. & 6. erit quadratus semissis summæ illorum 16. at quadratus semissis interualli fiet 4. Siue igitur 4 æquetur 9. — 1 N. siue 16. æquetur 21. — 1 N. fiet vtrobique idem valor numeri 5. Quare 5. est quæsitus numerus, qui ab vtroque datorum detractus relinquit quadratos 4. & 16. Hinc etiam cum Xilandro eliciemus Canonem.

Sume duos quadratos eodem distantes interuallo, quo dati numeri distant, sed minores illis. Tum à maiore numero aufer maiorem quadratum, vel à minore minorem. Residuum quod erit idem vtrobique, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XIV.

AB eodem numero auferre duos datos numeros, ita vt residuum vtrumque sit quadratus numerus. Constitutum sit ab eodem numero auferre 6. & 7. & vtrumque residuum facere quadratum. Ponatur quæsitus numerus 1 N. & si ab eo abstulero 6. relinquitur 1 N. — 6. æqualis quadrato. Si autem abstulero 7. relinquitur 1 N. — 7. & rursus in hoc casu duplicata æqualitas existit. Et quoniam horum interuallum, puta 1. continetur sub 2. & $\frac{1}{2}$ fiet tandem 1 N. $\frac{49}{4}$ & satisfacit proposito.

Ne verò in duplicatam æqualitatem deueniatur, sic indagabimus. Quæremus primò a quo numero 6. subtractus, relinquat quadratum. Cæterùm cuicunque quadrato adiiciamus 6. is erit qui quæritur. Esto igitur quadrato 1 Q. erit ergo qui quæritur 1 Q. + 6. & patet si ab eo auferantur 6. relinqui quadratum. Oportet igitur auferre quoque 7. ab 1 Q. + 6. & facere quadratum. Quamobrem 1. Q. — 1. æquatur quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. + 2. Ipse igitur quadratus erit 1 Q. + 4. — 4 N. Hoc æquatur 1 Q. — 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Erit ergo qui quæritur $\frac{25}{16}$ & soluit quæstionem.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἀφελεῖν δύο δοθέντας ἀριθμοὺς ᾧ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. ὑπετιτάχθω ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφῃρῆσθαι τὸν ϛ̄ ᾧ τὸν ζ̄. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ ζητούμενος ς^ι ᾱ. καὶ ἐὰν μὲν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μονάδας ϛ̄ λοιπὸς ς^ι ᾱ λείψει μ^ι ϛ̄ ἴσος τετραγώνῳ, ἐὰν δὲ μονάδας ζ̄. λοιπὸς ς^ι εἰς λείψει μ^ι ζ̄. καὶ πάλιν ὁμοίως ὅπερ τούτου ἐστὶν ἡ διπλοῦσότης. ἐπειδὴ περ ἡ ὑπεροχὴ μονάδος οὔσα μία διῄρηται ὑπὸ μ^ι β̄. καὶ μονάδος ἡμίσεος. ᾧ συμβαίνει ὁ ἀριθμὸς ῥκᾱ ϛ̄. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

Ἵνα δὲ μὴ εἰς διπλοῦν ἵπασιν ἐξέρχηται. ζητητέον οὕτως. ζητῶ πρότερον ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἐὰν ἀφέλω μ^ι ϛ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ᾧ δ' αὖ τετραγώνῳ δηλονότι προστῶ τὰς μ^ι ϛ̄. ἐκεῖνος ἔσται ὁ ζητούμενος. ἔστω δὴ δυνάμεως μιᾶς. ἔσται ἄρα ὁ ζητούμενος δύναμις ᾱ μονὰς ϛ̄. καὶ δῆλον ὡς ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλω μ^ι ϛ̄ ὁ λοιπὸς ἔσται τετράγωνος. δείσει ἄρα καὶ μονάδας ζ̄. ἀφελεῖν ἀπὸ τῆ δυνάμεως μιᾶς μ^ι ϛ̄. καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δύναμις ἄρα μία λείψει μονάδος μιᾶς ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς^ι ᾱ λείψει μ^ι β̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις μία, μονάδες δὲ λείψει ςζ̄ δ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ λείψει μονάδος μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ῑ ϛ̄. ἔσται ὁ ζητούμενος ῥκᾱ ϛ̄. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XIV.

PRIMÆ operationi, in qua vtitur duplicata æqualitate Diophantus, nullam adiicit conditionem, nec adiicienda est aliqua, vt malè arbitratur Xilander. Cùm enim quadrati qui capiun-

tur eodem distantes interuallo quo & dati numeri, addendi sint ipsis datis numeris, minor scilicet maiori, & maior minori, patet vt additio perfici possit non referre vtrum tales quadrati maiores sint datis numeris vel minores. Quod in duabus præcedentibus circumspiciendum erat, quia in illis substractione vtendum fuit non additione; allucinatus ergo est Xilander existimans vtendum hic eadem cautione in huiusmodi quadratis deligendis, qua fuit vtendum in duodecima. quod & exemplo ab ipsomet allato confirmare facile est. Sint dati numeri 41. & 65. quorum interuallum 24. quod fit ex 4. in 6 vel ex 3. in 8. hos tamen binos rem expedire posse negat Xilander, idque constare experientia ait. Sed sanè constat experientia falli Xilandrum. Nam ipsorum 4. & 6. summæ & interualli semisses sunt 5. & 1. quorum quadrati 25. & 1. Quare si addas 1. ad 65. vel 25. ad 41. fiet vtroque modo quæsitus numerus 66. vt patet. Rursus ipsorum 3. & 8. summæ & interualli semisses sunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{5}{2}$ quorum quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{25}{4}$ & si addas ad 65. vel $\frac{121}{4}$ ad 41. fit vtroque modo quæsitus numerus 71 $\frac{1}{4}$ qui satisfacit proposito.

Porrò vt modus hic vtendi duplicata æqualitate perfectè demonstratus maneat, sint dati numeri A maior & B minor, horumque interuallum C. & ponatur quæsitus numerus 1 N. Igitur æquandi quadrato erunt 1 N. — A. & 1 N. — B. Sumantur itaque duo quilibet quadrati D maior & E minor, quorum interuallum sit idem C. Quia ergo ob maiorem defectum totus 1 N. — A minor est toto 1 N. — B. æquabimus illi minorem quadratum E, maiorem verò D huic. Et in prima æquatione supplendo defectum, fiet 1 N. æqualis summæ ipsorum A E. At in secunda fiet 1 N. æqualis B D. summa autem ipsorum A E æqualis est prorsus summæ ipsorum B D, quia, cùm sint arithmeticè proportionales A ad B vt D ad E, est summa extremorum A E æqualis summæ mediorum B D. Quamobrem in vtraque æquatione fit idem valor Numeri. Quod demonstrandum erat. Hinc elicitur Canon à Xilandro traditus.

1 N. — A 30. 1 N. — B 6.
C 24.
E 25. D 49.

4. 1. *porism.*

Cape duos quadratos eodem distantes interuallo, quo & dati numeri, horum minorem adde maiori numero, & maiorem minori, vtroque modo fiet idem quæsitus numerus.

Secundæ verò operationi vt perficitur à Diophanto, limitatio quædam adiicienda erat; nam cùm numerus quadrato æquandus sit 1 Q — 1. debet eius latus fingi ab 1 N. — tot vnitatibus, vt tandem valor quadrati inueniatur excedens 1. Quare si eodem vtaris artificio, quo vsi sumus in præcedentibus, inuenies latus illud fingendum esse ab 1 N — aliquo vnitatum numero maiore quàm 1. vel minore quàm 1. alioquin si ponatur latus illud 1 N. — 1. reperietur 1 Q. — 1 nihil esse. Ita si propositi numeri sint 30. & 6. ponatur quæsitus 1 Q. + 6. vnde auferendo 30. remanet 1 Q. — 24. æquandus quadrato. Cuius latus fingendum ab 1 N. — tot vnitatibus vt tandem 1 Q. sit maior quàm 24. Quare cùm latus proximè maius ipsius 24. sit 5. oportet 1 N. non minorem esse quàm 5. fit autem 1 N. ex quadrato vnitatum quæ ponuntur in latere fictitio, adsumente numerum 24. diuisoque per duplum sui lateris. Ponatur ergo hic vnitatum numerus 1 N. Igitur $\frac{1}{10}$ Q + $\frac{12}{10}$ maior est vel saltem non minor quàm 5. & omnia in 2 N. fit 1 Q. + 24. non minor quàm 10 N. Qua æquatione rasoluta fit 1 N. vel 6. vel 4. Quare oportet talem poni in latere fictitio vnitatum numerum, vt sit non minor quàm 6. vel non maior quàm 4. Qua ratione excluduntur tantùm omnes numeri inter 4. & 6. fingatur ergo latus 1 N. — 4. fiet quadratus 1 Q. — 8 N. + 16. æqualis 1 Q. — 24. Vnde fiet 1 N. 5. erit ergo quæsitus numerus 31. & satisfacit proposito. Vel fingatur idem latus 1 N. — 6 fiet rursus 1 N. 5. & quotiescunque sumentur duo numeri vnus maior quàm 6. alter minor quàm 4. ita vt maior ad ipsum 6. eandem habeat rationem quam habet 4. ad minorem, eadem per vtramque æquationem continget solutio. Ita si eiusdem numeri 1 Q. — 24. latus fingas 1 N. — 2. vel 1 N. — 12. fiet idem valor Numeri 7. Itemque siue fingas idem latus 1 N. — 3. siue 1 N. — 8. fiet idem valor Numeri 5 $\frac{1}{2}$. & sic de alijs. Quod adnotasse fuit operæ pretium.

Potest tamen operatione paulum immutata, tam laboriosæ conditionis necessitas euanescere. Si videlicet, ponatur quæsitus numerus 1 Q. + maiore datorum numerorum, vt in exemplo Diophanti ponatur quæsitus numerus 1 Q. + 7. hinc ergo detracto 6. remanet 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. — tot vnitatibus, quarum quadratus superet 1. & manifesta est solutionis ratio. Ita si dati sint numeri 30. & 6. Pono quæsitum 1 Q. + 30. vnde auferendo 6. remanet 1 Q. + 24. æquandus quadrato, cuius latus fingo ab 1 N. — tot vnitatibus, quarum quadratus superet 24. Hinc etiam licebit elegantem formare Canonem.

Datorum numerorum interuallum aufer ab aliquo quadrato, residuum diuide per duplum lateris eiusdem quadrati, quotientis quadratus additus maiori datorum numerorum, quæsitum exhibebit numerum.

QVÆSTIO XV.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς πρά-

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum,

qui vtramque partem adſumens faciat quadratum. Sit diuidendus 20. in duos numeros. Exponantur duo numeri, vt quadrati eorum ſimul minores ſint quàm 20. puta 2. & 3. & ſi vtrique adiiciatur 1 N. erunt quadrati ab ipſis, hic quidem 1 Q. + 4 N. + 4. Ille verò 1 Q. + 6 N. + 9. Si ergo ab vtroque abſtulero 1 Q. qui vtique quadratus eſt, habebo quæſitos numeros, qui adſumentes videlicet quadratum, facient quadratum. Sed ſi abſtulero 1 Q. relinquuntur, hinc quidem 4 N. + 4. Inde verò 6 N. + 9. Oportet ergo ſummam iſtorum, nimirum 10. N. + 13. æquari 20. & fit 1 N. $\frac{7}{10}$. Eſt igitur hic quidem $\frac{441}{100}$ ille verò $\frac{1369}{100}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

γαται ὧς προςλαβὼν ἑκάτερον τ̃ ἡμισείων ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω ὁ κ̄. δεῖ δὴ εἰς δύο ἀριθμοὺς. ἔκθου δύο ἀριθμοὺς ὥστε τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους ἐλάσσονας εἶναι μ̄ κ̄. ἔστω δὴ ὁ δύο καὶ ὁ τρία. καὶ προσεκβάντος ἑκατέρου ς̄ ἐσονται οἱ ἀπὸ τούτων τετράγωνοι ὧς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ις̄ δ̄ μ̄ δ̄. ὧς δὲ δυνάμεως μιᾶς ις̄ θ̄ μ̄ θ̄. ἐαν ἄρα ἀπὸ ἑκατέρου ἀφέλω τ̃ δύναμιν, τουτέστι τὸν τετράγωνον ἕξομαι τοὺς ζητουμένους, οἱ προσλαμβάνοντες δηλονότι τετράγωνον ποιοῦσι τετράγωνον· ἀλλ' ἐαν φέλω δύναμιν μίαν λειπεῖ ἕνα). ὁ μὲν ις̄ δ̄ μ̄ δ̄. ὁ δὲ ις̄ θ̄ μ̄ θ̄. δύσιν ἄρα τῶν συνθέσιν αὐτοῖν, τουτέστι ις̄ῑ μ̄ ιγ̄. ἔσονται οἱ μονάσιν κ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ῑ. ἔσται ὁ μὲν ξη̄ ῑ. ὁ δὲ ρλβ ῑ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XV.

IN hac quæſtione nulla eſt difficultas. Cur velit Diophantus ſumi duos numeros, quorum quadrati ſimul minores ſint numero diuidendo nemo eſt qui non videat. Itaque ex operatione ipſa hunc formamus Canonem.

Sume duos numeros quorum quadrati ſimul minores ſint numero diuidendo, horum quadratorum ſummam aufer à numero diuidendo, reſiduum diuide per duplum ſummæ ſumptorum numerorum, orietur latus quæſiti quadrati, cuius duplum ſi ducas ſeorſim in ſumptos numeros, & productis addas ſeorſim quadratos ſumptorum numerorum, fient quæſitæ partes numeri diuidendi.

Vt ſi datus ſit numerus 33. ſume duos numeros 2. & 3. quorum quadrati ſimul faciunt 13. quo detracto de 33. ſuperſunt 20. quæ diuiſa per duplum ipſorum 2. & 3. nimirum per 10. dant 2. latus quadrati quæſiti, cuius duplum 4. ductum ſigillatim in ipſos 2. & 3. facit 8. & 12. quibus ſi addas ſeorſim quadratos eorundem 2. & 3. nempe ipſi 8. quadratum 4. & ipſi 12. quadratum 9. fient 12. & 21. quæſitæ partes numeri 33. quibus addendo eundem quadratum 4. fiunt quadrati 16. & 25.

QVÆSTIO XVI.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, à quo vterque detractus, relinquat quadratum. Numerus diuidendus iterum eſto 20. Ponatur is qui quæritur quadratus à latere 1 N. cum tot vnitatibus, vt harum quadratus non ſuperet 20. Eſto ab 1 N. + 2. Quadratus ergo erit 1 Q. + 4 N. + 4. & patet ſi hinc auferantur 4 N. + 4. relinqui quadratum, & ſimiliter ſi hinc auferantur 2 N. + 3. relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. + 2 N. + 1. Statuo igitur, hac de cauſa, primum quidem 4 N. + 4. Secundum verò 2 N. + 3. Quæſitum autem 1 Q. + 4 N. + 4. & hic dempto vtroque illorum, facit quadratum. Superest vt ambo ſimul æquentur numero diuidendo. Sed

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λειπὸν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. δεῖ τετάχθω πάλιν ὁ κ̄ δεῖξαι εἰς δύο ἀριθμοὺς καὶ τετάχθω ὁ ζητούμενος τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ ἑνὸς καὶ μ̄ τοσούτων, ὥστε τ̃ ἀπ' αὐτῶν μὴ ὑπερβάλλειν τὸν κ̄. ἔστω δὴ ς̄ ἑνὸς μ̄ β̄. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς ις̄ δ̄. καὶ δεῖται ὡς λειπῶν ἀριθμοὺς δ̄ μονάδας δ̄ καταλείπει τετράγωνον, καὶ ὁμοίως λειπῶν ις̄ιν̄ β̄ μ̄ γ̄. καταλείπει τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς, ις̄ β̄ μ̄ ᾱ. τάσσω οὖν δεῖ ταὐτὰ τ̃ μὲν πρῶτον ις̄ δ̄ μ̄ δ̄. τὸν δὲ δεύτερον ις̄ β̄ μ̄ γ̄. τὸν δὲ ζητούμενον δύναμιν ἴσον ις̄ιν̄ δ̄ μ̄ δ̄. καὶ λείπει ἑκατέρου ποιεῖ τετράγωνον. λειπὰ δεῖ τοὺς δύο ἴσους εἶναι τῷ διαιρουμένῳ. ἀλλ' οἱ δύο ποιοῦσι ις̄ν̄ ς̄ μ̄ ζ.

ταῦτα ἴσα μονάσιν κ̄. ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιγ̄ ς̄. ἔστι ὁ μὲν πρῶτος οσ̄ ς̄. ὁ δὲ δεύτερος μδ̄ ς̄. ὁ δὲ τετράγωνος χπδ̄ λς̄. καὶ ποιῶσι τὰ τῆς ὑποστάσεως.

ambo simul faciunt 6 N. + 7. Hoc ergo æquatur 20. Auferantur à similibus similia, & fit 1 N. $\frac{1}{6}$. erit ergo primus $\frac{5}{6}$ secundus $\frac{11}{6}$. Quadratus autem $\frac{121}{36}$. & faciunt postulata.

IN QVAESTIONEM XVI.

FRVSTRA laborat Scholiastes, vt implicatum Theorema nobis obtrudat quasi necessarium ad intelligendam operationem Diophanti, cùm illo carere possimus absque vllo artis dispendio. Etenim cum ponat Diophantus quadratum quæsitum 1 Q. + 4 N. + 4. quem finxit à latere 1 N. + 2 Primo euidens est cur alteram partem numeri diuidendi ponat 4 N. + 4. quia scilicet, his ablatis à quadrato exposito, relinquitur quadratus, nimirum 1 Q. Deinde vt aliam partem numeri diuidendi reperiat, fingit alium quadratum ab 1 N. + certo vnitatum numero minore quam 2. qui positus est in latere quæsiti quadrati, puta ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. remanet alia pars numeri diuidendi, nimirum 2 N. + 3. vnde etiam colligitur aliter atque aliter sumi posse partes numeri diuidendi, eodem etiam quadrato exposito manente, prout ab eo detrahentur alij atque alij minores quadrati.

Quod autem attinet ad limitationem quam præscribit Diophantus circa latus quæsiti quadrati, illud scilicet fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus quarum quadratus non superet numerum diuidendum, hanc ego nec sufficientem puto, nec omnino necessariam. Sufficiens quidem non est, quia etsi obseruetur deueniri poterit ad absurdum. Nam ponatur latus quæsiti quadrati 1 N. + 4. erit ipse quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. cuius vnitates minores sunt numero diuidendo 20. vnde constat obseruatam esse limitationem præscriptam. Si tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 8 N. + 16. altera verò 2. N. + 7. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à latere 1 N. + 3. nimirum 1 Q. + 6 N. + 9. erit summa duarum partium 10 N. + 23. æqualis 20. Quod est impossibile. Non est etiam necessaria huiusmodi conditio, quia quamuis non seruetur, ritè tamen perfici poterit æquatio. Etenim fingatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + 5. erit is 1 Q. + 10. N. + 25. cuius vnitates excedunt numerum diuidendum 20. contrà id quod præcipit Diophantus. Tamen ponatur pars vna numeri diuidendi 2 N. + 9. quæ habetur si ab exposito quadrato auferatur quadratus à lateri 1 N. + 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 16. Rursus ponatur pars altera 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. quæ habetur si à quadrato exposito auferatur quadratus à latere 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. nimirum 1 Q. + 20. $\frac{1}{4}$. Erit partium summa 3 N. + 13 $\frac{3}{4}$. æqualis 20. Vnde fiet 1 N. $\frac{25}{44}$. Ad hypostases erunt quæsitæ partes $\frac{25}{11}$ & $\frac{135}{44}$. Quadratus quæsitus $\frac{625}{121}$. à latere $\frac{25}{11}$. A quo quadrato si auferas sigillatim partes inuentas, remanent quadrati $\frac{225}{1936}$. & $\frac{18225}{1936}$. quorum latera $\frac{15}{44}$. & $\frac{135}{44}$. Aliter igitur præscribenda est conditio huic operationi, nimirum. Ponatur quadratus quæsitus à latere 1 N. + quotlibet vnitatibus. Tum fingantur alij duo minores quadrati ab 1 N. + tot vnitatibus, vt harum quadratis sigillatim detractis à quadrato vnitatum primi quadrati, duo residua simul minora sint numero diuidendo. Hoc autem facillimum factu est, quia dato quolibet quadrato, licet inuenire infinitos minores quadratos, distantes à dato quadrato, interuallo minore quàm quilibet præscriptus numerus. Verbi gratia dato quadrato 25. si velim minores quadratos quibus sigillatim à 25. detractis, supersit minus quàm 10. quia detrahendo 10. à 25. supereſt 15. oportet quæsitos quadratos minores quidem esse, quàm 25. sed maiores quam 15. Quare cùm latus 25. sit 5. At latus proximè maius ipsius 15. sit 4. Patet quadratos omnes à lateribus inter 4. & 5. quales sunt à lateribus 4. 4 $\frac{1}{2}$. 4 $\frac{1}{4}$ &c. satisfacere proposito. Hinc est cur posito quadrato quæsito 1 Q. + 10. N. + 25. quærendi erant duo quadrati, quibus sigillatim detractis à 25. residua simul minora essent quàm 20. Quia verò quolibet residuo existente minore quàm 10. sequebatur vtrumque simul minorem esse quàm 20. finxi latera quæsitorum quadratorum 1 N. + 4 & 1 N. + 4 $\frac{1}{2}$. quia singuli quadrati ipsorum 4. & 4 $\frac{1}{2}$ minores sunt quàm 10. vt ostensum est. Simili artificio rectificari poterit operatio illa qua deductione ad absurdum ostendimus insufficientiam Diophantææ limitationis. Etenim ponendo eundem quadratum quæsitum 1 Q. + 8 N. + 16. esto pars vna vt prius 8 N. + 16. Cùm ergo ex conditione præscripta constet vnitates vtriusque partis simul minores esse debere numero diuidendo 20. si in vna parte sint 16. vnitates, patet in alia debere esse minus quàm 4. Oportet igitur fingere quadratum ab 1 N. + tot vnitatibus, vt earum quadratus detractus de 16. relinquat minus quàm 4. Oportet ergo quadratum illarum vnitatum maiorem esse quàm 12. minorem quàm 16. Quare cùm latus ipsius 16. sit 4. & latus proximè maius ipsius 12. sit 3. $\frac{1}{2}$ sumendus erit quilibet vnitatum numerus à 3 $\frac{1}{2}$ inclusiuè vsque ad 4. exclusiuè, quales sunt 3 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{1}{3}$ 3 $\frac{1}{4}$. & alij infiniti. Ita si fingas quadratum ab 1 N. + 3 $\frac{1}{2}$. erit quadratus 1 Q. + 7 N. + 12 $\frac{1}{4}$. quo detracto à quæsito quadrato 1 Q. + 8 N. + 16. supereſt secunda pars numeri diuidendi, nimirum 1 N. + 3 $\frac{3}{4}$. Quare summa partium fit 9 N + 19 $\frac{3}{4}$ æqualis 20. Qua æquatione resoluta, optimè satisfit proposito.

Ex dictis apparet quàm infinitis variis modis positiones institui possint, & solutiones diuersæ reperiri, nam primò quæsitus quadratus variè fingi potest. Deinde eodem manente quadrato quæsito, partes numeri diuidendi diuersimodè fingi possunt. Sed & Diophantus rursus lib. 3. quæst. 23. hanc ipsam retractans quæstionem alia operatione negotium absoluit, quam ibi explicabimus.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE duos numeros in data ratione, vt vterque cum quadrato qui proponetur faciat quadratum. Constitutum sit maiorem minoris esse triplum, vtrumque autem adscito 9. facere quadratum. Hîc à quocunque quadrato cuius latus sit multitudo quælibet numerorum + vnitatum 3. detraxero 9. residuum erit alter quæsitorum. Esto igitur minor 1 Q. + 6 N. erit ergo maior 3 Q. + 18 N. Oportet itaque & hunc adsumpto 9. facere quadratum. Sed facit 3 Q. + 18. N. + 9. Hoc ergo quadrato æquale est. Fingo quadratum a 2 N. — 3. & fit 1 N. 30. Erit igitur minor 1080. maior verò 3240. & vterque adiecto 9. facit quod postulatur.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ τοῦ ὁποτερουοῦν τετραγώνου ποιεῖ τετράγωνον. ὑπετάχθω δὴ τὸν μείζονα τῶν ἐλαττόνος εἶναι τριπλασίονα, ἑκάτερον δ' αὐτῶν μετὰ μ̄ ποιεῖν τετράγωνον. ἀφ' οὗ δ' ἂν τετραγώνου ἀπὸ πλήθους τῶν ϛ μ̄ γ̄ ἀφέλω μ̄ θ̄ ἔσται ἴσως εἰς ἃ ζητουμένων. ἔστω οὖν ὁ ἐλάττων δυνάμεως ᾱ τῶν ϛ̄. ὁ ἄρα μείζων ἔσται δυνάμεως γ̄ τῶν ιβ̄. δεῖσθαι ἄρα ἐστὶν ὅτου πολλαπλασιάσας μ̄ θ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλὰ γίνου δυνάμεως γ̄ τῶν ιβ̄ μ̄ θ̄. τοῦτο δὲ ἔστι τετραγώνου πλάσαν τὸ τετράγωνον ἀπὸ τῶν δύο λείψει μ̄ τετοῦ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ λ̄. ἔσται ὁ μὲν ἐλάττων μ̄ ωπ̄. ὁ δὲ μείζων γοφ̄. ἃ ποιοῦσι μετὰ θ̄ τὰ ϛ̄ ὁρισθέντα.

IN QVAESTIONEM XVII.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ei qui superiorum omnium quæstionum artificium perfectè comprehenderit, nihil hîc obscurum videbitur. Vnum moneo numeri 3 Q. + 18 N. + 9. latus non solum fingi posse à quolibet Numerorum numero cuius quadratus superet 3 Q. cùm defectu vnitatum 3. lateris scilicet ipsius 9. vt faciat Diophantus qui ponit hoc latus 2 N. — 3. sed etiam fingi posse à numero Numerorum cuius quadratus superet 3. & cuius sextuplum sit minus quàm 18. adiectis tot vnitatibus quot sunt in latere quadrati dati 9. nimirum 3. Idcirco fingi potest hoc latus 2 N. + 3. vel 2 ½ N. + 3. & sic ad + 3. adiungi potest quilibet numerus Numerorum qui cadat inter 2. & 3. Hac ratione fingendo huiusmodi latus 2 N. + 3. fit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. æqualis 3 Q. + 18 N. + 9. & fit 1 N. 6. suntque numeri quæsiti 72. & 216. qui satisfaciunt postulatis.

Sed & sine magna perplexitate, quicquid dicat Xilander, per duplicatam æqualitatem solui quæstio potest. Nam ponatur minor numerus 1 N. est ergo maior 3 N. Quare vtrique adiiciendo 9. sunt quadrato æquandi 1 N. + 9. & 3 N + 9. Horum interuallum est 2 N. Sumendi ergo sunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita tamen vt tam in semisse summæ quàm in semisse interualli eorum reperiatur 3. latus quadrati adiecti 9. vt scilicet in æquationis vtraque parte reperiantur 9. vnitates, quibus vtrumque ablatis, maneat æquatio inter numeros & quadratos. Oportet ergo inuenire duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 2. N. ita vt in eorum summa, & in eorum interuallo reperiantur vnitates 6. Quare sunt huiusmodi numeri 6. & ½ quorum interualli semissis 3 — ¼ N. cuius quadratus 9 — 1 N. + 1/16 Q. æquatur 1 N. + 9. & fit 1 N. 72. suntque quæsiti numeri vt supra 72. & 216. Sed sanè hac ratione operando vnica tantum reperiri potest solutio, cùm alii numeri præter 6. & ½ N. sumi non possint, quorum mutuo ductu fiant 2 N. ob causam allatam. Quare maluit Diophantus aliam inire viam, qua infinitæ solutiones contingunt. Cæterùm ex hac vltima operatione formari potest Canon satis expeditus.

Denominatorem rationis vnitate multatum diuide per quadruplum lateris propositi quadrati, per quotientis quadratum diuide rursus semissem denominatoris vnitate aucti, orietur minor quæsitorum numerorum.

Quoniam verò hîc desiderari videntur aliquot quæstiones non inelegantes, & ad hanc tractationem pertinentes, placet illas subnectere.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator sit quadratus numerus: vt vterque cum numero qui proponetur faciat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque adscito 10. faciat quadratum. Fingatur quadratus ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus superet 10. puta ab 1 N. + 4. fiet quadratus 1 Q. + 8 N. + 16. vnde auferendo 10. residuum 1 Q. + 8 N. + 6. statuatur pro minore quæsitorum numerorum, is enim adscito 10. quadratum facit. Itaque maior erit 4 Q. + 32. N. + 24. qui adscito 10. fiet 4 Q. 32 N. + 34. æquandus quadrato, quod facilè fiet, quia quadratorum numerus est quadratus, fingatur enim latus eius 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 34. puta 2 N. − 6. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad hypostases Minor numerus est $\frac{1}{16}$. maior $\frac{289}{16}$ & vtrique addendo 10 fiunt quadrati $\frac{441}{16}$ & $\frac{625}{16}$ quorum latera $\frac{21}{4}$ & $\frac{25}{4}$. Posset etiam hæc quæstio per duplicatam æqualitatem solui, sed vtendum esset eo modo duplicatæ æqualitatis quem tradit Diophantus quæstione decima octaua tertij, cuius hic explicandi locus non est. Quare ipsam operationem hic non afferam, sed Canonem pulcherrimum qui ab ea elicitur non dissimulabo.

Ducito denominatorem rationis vnitate multatum in datum numerum, Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, ab horum minore si auferas datum numerum, relinquetur maior quæsitorum.

Vt in nostra hypothesi ducito 3. in datum numerum 10. fit 30. Cape duos quadratos quorum interuallum sit 30. per Canonem vndecimæ huius; ita tamen vt minor illorum excedat 10. Infinitos tales reperies, quales sunt $\frac{289}{4}$. & $\frac{841}{4}$. Igitur si à minore auferas 10. relinquitur $\frac{9}{4}$. maior quæsitorum numerorum, quare patet minorem esse $\frac{9}{16}$ & vtrique si addas 10. fiunt quadrati $\frac{49}{4}$. & $\frac{169}{4}$.

QVAESTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque multatus dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detracto 5. relinquat quadratum. Ponatur minor 1 Q. + 5. nam detracto 5. relinquet quadratum, erit ergo maior 4 Q. + 20. vnde auferendo 5. relinquitur 4 Q. + 15. æquandus quadrato, fingatur eius latus 2. N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 15. vel etiam 2 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 15. Fingatur ergo 2. N. + 3. erit quadratus 4 Q. + 12. N. + 9. æqualis 4 Q. + 15. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. sunt ergo quæsiti numeri $5\frac{1}{4}$. & 21. qui satisfaciunt proposito. Potest etiam sicut & præcedens per duplicatam æqualitatem solui quæstio. Sed ob causam allatam omissa ipsa operatione, canonem inde depromptum afferre sufficiet, nimirum.

Denominatorem rationis vnitate multatum ducito in datum numerum; Tum cape duos quadratos hoc producto differentes, maiori adde datum numerum, fiet maior quæsitorum;

QVAESTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros in data ratione cuius denominator sit quadratus numerus, vt vterque detractus a dato numero relinquat quadratum.

Sit maior minoris quadruplus, & vterque detractus à 20. relinquat quadratum. Ponatur minor 20 − 1 Q. hic enim detractus à 20. relinquit quadratum. Ergo maior erit 80 − 4 Q. quem si à 20. detrahas, relinquitur 4 Q. − 60. æquandus quadrato, fingatur eius latus à 2 N. − tot vnitatibut, vt hypostasis quadrati reperiatur minor quàm 20. quia scilicet alter quæsitorum numerorum positus est 20 − 1 Q. Cum igitur in huiusmodi æquatione valor Numeri fiat ex quodam quadrato adsciscente 60. & diuiso per quadruplum sui lateris, valor autem numeri debeat esse minor quàm latus ipsius 20. putà quàm 4 $\frac{1}{2}$. eò redacti sumus vt inueniamus quadratum, qui auctus numero 60. & diuisus per quadruplum sui lateris det quotientem minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Esto is 1 Q. ergo $\frac{1}{4}$ N. + $\frac{60}{1}$ minor est quàm 4 $\frac{1}{2}$. & omnia in 4 N. fit 1 Q. + 60. minor quàm 18 N. qua resoluta æquatione fit 1 N. 9 + R. 21. vel 9 − R. 21. seu per radicis approximationem 13 $\frac{1}{2}$ vel 4 $\frac{1}{2}$. Hinc ergo patet latus quadrati qui quæritur cadere necessariò inter 4 $\frac{1}{2}$. & 13 $\frac{1}{2}$. Ponatur igitur 10. & fingatur quadratus à latere 2 N. − 10. erit is 4 Q. − 40. N. + 100. æqualis 4 Q. − 60. & fit 1 N. 4. suntque quæsiti numeri 4 & 16.

Non secus etiam ac præcedentes soluetur hæc quæstio per duplicatam æqualitatem, & Canon huiusmodi ex illa operatione formabitur.

Datum numerum ducito in denominatorem rationis vnitate multatum. Tunc cape duos quadratos hoc producto differentes, & minorem aufer à dato numero. Residuum erit maior quæsitorum.

QVÆSTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt si quisque proximè ipsum sequenti partem sui quæ imperatur tribuat, & præterea datum numerum, dantes & accipientes æquales fiant. Imperetur vt primus det secundo sui quintantem, & adhuc vnitates 6. secundus tertio sui sextantem, & præterea 7. Tertium primo sui septantem & vnitates 8. Ponatur primus 5 N. secundus similiter 6 N. & secundus accipiens à primo 1 N. + 6. fit 7 N. + 6. Dans autem tertio sui sextantem, puta 1 N. & præterea 7. remanent 6 N. — 1. Supereſt vt & reliqui datis acceptisque quæ imperantur fiant 6 N. — 1. sed primus dans sui quintantem, & præterea vnitates 6. relinquitur 4 N. — 6. Oportet ergo vt accipiendo à tertio septantem, & vnitates 8. fiat 6 N. — 1. sed si 4 N. — 6. accipiant 2 N. + 5. fiunt 6 N. — 1. Igitur 2 N. + 5. est pars septima tertij, & præterea 8. Si ergo à 2 N. + 5. abstulero 8. residuum 2 N. — 3. est pars septima tertij. Ipse igitur tertius est 14 N. — 21. Supereſt vt & hic accipiens à medio sextantem, & vnitates 7. dans autem sui septantem & vnitates 8. fiat 6 N. — 1. sed dando sui septantem & vnitates 8. residuum est 12 N. — 26. accipiendo verò sextantem medij & vnitates 7. fit 13 N. — 19. Hoc igitur æquatur 6 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{25}{7}$. Erit ergo primus $\frac{5}{7}$ secundus autem $\frac{47}{7}$. Tertius denique $\frac{184}{7}$. & hi soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ ξοῦς ἀριθμοὺς ὅπως ἕκαστος τῷ ἑξῆς ἑαυτοῦ διδοῦ μέρος τὸ ὁπισθοῦν, καὶ ἔτι δοθέντα ἀριθμὸν, ἵνα δόντες καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑπιτάχθω δὴ τὸν πρῶτον τῷ δευτέρῳ διδόναι τὸ πέμπτον, καὶ ἔτι μονάδας ε̄. ὁ δὲ δεύτερον τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον καὶ μονάδας ζ̄. ὁ δὲ τρίτον τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον καὶ μ̄ᵒ η̄. πεπαχθω ὁ μὲν πρῶτος ς̄ς̄ ῑ. ὁ δὲ δεύτερος ϖλέον μὲν τοῦ πρώτου λαβὼν ς̄ς̄ ἵνα μ̄ᵒ ε̄. ἀριθμοὶ ζ̄. μονάδες ε̄. δοὺς δὲ τὸ τρίτῳ τὸ ἕκτον ς̄ ἵνα, ᾖ μ̄ᵒ ζ̄. γίνονται ἀριθμοὶ ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. λοιπὸν ὅτι καὶ τοὺς λοιποὺς δίοντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ς̄ς̄ ε̄ λείψει μονάδι μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν ὁ πρῶτος τὸ ἑαυτοῦ πέμπτον καὶ ἔτι μονάδας ε̄. γίνεται ς̄ς̄ δ̄ λείψει μ̄ᵒ ε̄. δώσει ἄρα καὶ λαβόντα αὐτὸν ϖλέον τῆ τρίτου τὸ ἕβδομον καὶ μ̄ᵒ η̄. γίνεσθαι ς̄ς̄ ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλ' ἐαν ς̄ς̄ᵃ δ̄ λείψει μ̄ᵒ ε̄ ϖροσλάβωσιν ς̄ς̄ᵃ β̄ μ̄ᵒ ε̄. γίνονται ς̄ς̄ᵃ ε̄ λείψει μονάδι μιᾶς. ἀριθμοὶ ἄρα β̄ μ̄ᵒ ε̄. μίσος ἕβδομον εἰσὶ τῆ τρίτῃ καὶ ἔτι μονάδος η̄. ἐαν ἄρα δοθῶ ς̄ς̄ β̄ μ̄ᵒ. ῑ. ἀφέξω μονάδας π̄. λοιποὶ ς̄ς̄ᵃ β̄ λείψει μ̄ᵒ ζ̄. ἕβδομον μίσος εἰσὶ τῆ τρίτῃ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ς̄ς̄ ιδ̄ λείψει μ̄ᵒ κᾱ̄. λοιπὸν ἄρα δώσει ᾧ τὸν λαβόντα ϖλέον μὲν τοῦ μέσου τὸ ἕκτον ᾧ μ̄ᵒ ζ̄. δόντα ἢ τὸ ἕβδομον καὶ μ̄ᵒ η̄. γίνεσθαι ἀριθμοὺς ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ἀλλὰ δοὺς μὲν τὸ ἕβδομον ᾧ μ̄ᵒ η̄. λοιπός ὅτι ς̄ς̄ ιβ̄ λείψει μ̄ᵒ κς̄. λαβὼν ἢ ϖλέον τοῦ μέσου τὸ ἕκτον, καὶ μ̄ᵒ ζ̄. γίνονται ς̄ς̄ᵃ ιη̄ λείψει μ̄ᵒ ιβ̄. ταῦτα ἴσα ἀριθμοῖς ε̄ λείψει μονάδος μιᾶς, ᾧ γίνεται ὁ ᾱ̄ π̄ ε̄. ἔστι ὁ μὲν πρῶτος ξ̄ ε̄. ὁ ἢ δεύτερος ρ̄π̄ ε̄. ὁ ἢ

ἔστος μ̄ ζ̄. καὶ ὅτι ποιῶσι τὰ ἑ ϖεντάσιος.

IN QVAESTIONEM XVIII.

HÆc quæstio parum differt à vigesimaquinta primi, vt iam ibi monuimus. Nam quærùntur eo loco tres numeri, quorum quisque vbi proximè sequenti dederit certam sui partem, inter dantes & accipientes fiat æqualitas. Hic vero præterea requiritur, vt præter certam sui partem quilibet det sequenti certum etiam numerum, quod parum aut nihil difficultatis adiicit operationi. Cæterùm quid de hac quæstione, & decima nona sentiam, dicam ad sequentem.

QVÆSTIO XIX.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, quorum quisque vbi proximè sequenti dederit partem sui quæ

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς ξοῦς ὅπως ἕκαστος τῷ ἐν τῆς διαιρέσεως τῷ ἑξῆς αὐτοῦ διδῶ μέρος τὸ ὁπισθο-

χειν, ἓ ἵνα δοθέντος ᾖ ἵνα δόντες, καὶ λαβόντες γένωνται ἴσοι. ὑποτετάχθω δὴ τὸν πρ̄. δυλεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ πρῶτος τῷ δευτέρῳ, δίδῳ τὸ πέμπτον, ἓ ἵνα μονάδας ς̄. ὁ δὲ δεύτερος τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ μ̄ ζ̄. ὁ δὲ τρίτος τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μ̄ ἢ ἵνα μῆ τῶν ἀντίδοσιν γένωνται ἴσοι. ✻ Τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ , ῑ. καὶ ὁ δεύτερος μ̄ ιϐ̄. καὶ ὑφίει ὁ δεύτερος λαβὼν πρὸς μὲν τὸν πρώτου πέμπτον ς̄ ἵνα καὶ μ̄ ς̄ γινόμενος ς̄ α̅. μ̄ ιη̄. δοὺς δὲ τῷ τρίτῳ τὸ ἕκτον, καὶ ἔτι μ̄ ζ̄. γίνεται ς̄. α̅. μ̄ θ̄. λειπόν ὄν, καὶ τὰς λειπὰς δόντας καὶ λαβόντας γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ θ̄. ἀλλὰ δὲς μὲν ὁ πρῶτος ἑαυτῷ τὸ πέμπτον καὶ μ̄ ς̄ λεῖπός ὄν ς̄ ϛ̄ λείψει μ̄ ς̄. δεήσει ἄρα καὶ αὐτὸν λαβόντα τὸ ἕβδομον τῶ τρίτου καὶ μ̄. ἢ̄. γίνεσθαι ς̄ ἑνὸς μ̄ θ̄. καὶ ἑνὶ λάβῃ μ̄ ιη̄ λείψει ς̄ γ̄. γίνεται ς̄ α̅ μ̄ θ̄. μονάδες ἄρα ιη̄ λείψει ἀριθμῷ γ̄. ἕβδομον μέρος εἶσι τῶ τρίτου, καὶ ἑνὶ μονάδι ᾱ̅. ἑνὶ ἄρα ἀπὸ μονάδων ιη̄ λείψει ἀριθμῷ γ̄. ἀφέλωμεν μ̄ ᾱ̅. ἕξομεν τὸ τῶ τρίτου ἕβδομον μ̄ ζ̄. λείψει ς̄ γ̄. αὐτὸς ἄρα ἴσται μ̄ μϐ̄ λείψει ς̄ κα̅. λεῖπόν ὄν καὶ τοῦτον λαβόντα μὲν πρὸς τῶ μέσου τὸ ἕκτον καὶ μ̄ ζ̄. δόντα δὲ τῷ πρώτῳ τὸ ἕβδομον, καὶ μ̄ ᾱ̅. γίνεσθαι ς̄ α̅ μ̄ θ̄. ἀλλὰ δὲς καὶ λαβὼν γίνεται μ̄ μδ̄ λείψει ς̄ πδ̄. ταῦτα ἴσα ς̄ ἑνὶ μονάδι θ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ λϛ̄ ιϛ̄. ἴσαι ὁ μὲν πρῶτος ρο̄ ιϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος σκη̄ ιϛ̄. ὁ δὲ τρίτος σιζ̄ ιϛ̄.

imperatur, & præterea datum numerum, inter eos exiſtat æqualitas. Inſtitutum ſit numerum 80. diuidere in tres numeros, vt primus ſecundo det ſui quintantem, & præterea 6. Secundus tertio det ſui ſextantem, & vnitates 7. Tertius primo det ſui ſeptantem, & vnitates 8. & poſt mutuam contributionem, fiant æquales. ✻ Ponatur primus 5 N. ſecundus 12. & ſecundus accipiens à primo quintantem, puta 1 N. & præterea 6. fit 1 N. + 18. dans autem tertio ſextantem ſui & adhuc 7. relinquitur 1 N. + 9. Reſtat vt & reliqui datis & acceptis quæ imperantur, fiant 1 N. + 9. ſed primus cùm dedit ſui quintantem & vnitates 6. remanet 4 N. — 6. Oportet ergo vt accipiens ſeptantem tertij, & vnitates 8. fiat 1 N. + 9 ſed ſi accipiat 15 — 3 N. fit 1 N. + 9. Igitur 15 — 3 N. eſt ſeptima pars tertij, & præterea 8. Quamobrem ſi à 15 — 3 N. ſubducamus vnitates 8. habebimus tertij ſeptantem, nimirum 7 — 3 N. Ipſe igitur tertius erit 49 — 21 N. Supereſt vt & hic accipiens quidem à medio ſextantem & vnitates 7. dans autem primo ſui ſeptantem & vnitates 8. fiat 1 N. + 9. ſed datis acceptiſque quæ imperantur, fit 43 — 18. N. Hæc ergo æquantur 1 N. + 9. & fit 1 N. $\frac{27}{43}$. Erit igitur primus $\frac{135}{43}$. Secundus $\frac{324}{43}$. Tertius $\frac{1161}{43}$.

IN QVÆSTIONES XVIII. ET XIX.

PEDIVS eo in Xilandri ſententiam ſuſpicantis hanc & præcedentem quæſtionem huic quadratorum tractationi temerè inſertas eſſe, ſiue ab imperito librario vt putat ille, ſiue potius vt reor à ſciolo quopiam qui è tredecim libris Diophanti nonnullas in vnum colligens quæſtiones, eos quos habemus præ manibus Arithmeticorum libros conſarcinauit. Sanè ſi Diophanto tribuendæ ſunt, hæ duæ quæſtiones, in primum librum retrahendæ videntur, & collocandæ poſt vigeſimam quintam, à qua parum differunt, vt iam indicauimus; iſta præſertim, quæ illius operationem quàm proximè imitatur. Quidquid ſit, certiſſimum eſt totam huius propoſitionem adulterinam eſſe, & verba illa omnia quæ aſteriſcis incluſimus, eſſe penitus eliminanda, ſufficitque ſi loco propoſitionis ei præfigatur Ἄλλως. Verè enim à præcedenti non differt hæc quæſtio, ſed eſt eadem prorſus aliter tractata, quod familiare eſt Diophanto, vt conſtat ex decima octaua & decima nona primi, ex vigeſima & vigeſima prima, & rurſus ex vigeſima-tertia & vigeſima-quarta eiuſdem. Ac etiam ex octaua & nona huius. Sed & ipſam hanc operationem non conuenire numero 80. vel etiam alij certo & determinato numero optimè Xilander conuincit, ex eo quod Diophantus ſecundum quæſitorum ponit 12. quod nequaquam ritè in tali caſu fieri poſſet, niſi iam cognito numero ipſo qui quæritur, quod eſt abſurdum. Cæterùm omiſſa propoſitione, cætera bene habent, neque vno corrupto vocabulo vel numero aliquo deficiente, & ita benè & ad amuſſim præcedenti propoſitioni cuncta conueniunt, vt mirum ſit quomodo græculus ille tantum frontis habuerit, qui huic corpori caput alienum imponere tentauit.

Quod ſi quis fateatur quidem propoſitionem tractationi reliquæ non reſpondere, ſed contendat nihilominus, ab alia quæſtione quæ librariorum incuria exciderit, huc tranſlatam huiuſmodi propoſitionem

propoſitionem, non valdè repugnabo, cùm ſimile quid accidiſſe libro quinto certiſſimis argumentis compertum habeam. Huic ergo vt ſatisfiat, quæſtionem quoque, vt in Græco propoſita eſt, ſoluemus cum Xilandro, quem ſanè immeritò recentiorum quidam arguere conati ſunt, & de analyſeos inſcitia criminari, quia ſcilicet calculi errore lapſus, falſos exhibuit ſolutionis numeros. Cum tamen optimo vtatur logiſmo, quo ſaluo calculi error viris doctis non debet imputari. Itaque vt tanto viro debita ſeruetur reuerentia, in huius quæſtionis tractatione ipſamet eius verba referre non pigebit, à mendis duntaxat numerorum, vt par eſt, expurgata. Cùm tres numeri qui quæruntur, 80. ſummam conficiant, neque dum eorum partes adduntur detrahunturque, huic ſummæ quicquam decedat, cùm quod vni aufertur, alteri adjiciatur, & nihil excidat amittaturue; intelligere licet, æqualitatem trium numerorum vltimò exiſtentem eam fore, vt quiuis ſit triens ex 80. hoc eſt 26. $\frac{2}{3}$. Hoc animaduerſo ponamus primum eſſe 1 N. ab eoque auferamus quæ dat ſecundo $\frac{1}{3}$ N. + 6. relinquitur $\frac{2}{3}$ N. − 6 hoc cum ſeptante tertij & 8. æquabitur 26 $\frac{2}{3}$. Ergo à 26 $\frac{2}{3}$ auferas $\frac{2}{3}$ N − 6. relinquuntur 32 $\frac{2}{3}$ − $\frac{2}{3}$ N. quod eſt 8. & ſeptans tertij. Aufer 8. relinquitur ſeptans tertij 24 $\frac{2}{3}$ − $\frac{2}{3}$ N. Ergo tertius eſt 172 $\frac{2}{3}$ − $\frac{2}{3}$ N. Huius & primi ſumma 172. $\frac{2}{3}$ − 4 $\frac{1}{3}$ N. detracta à 80. vt pote ſummà trium numerorum, relinquet ſcilicet ſecundum 4 $\frac{1}{3}$ N. − 92 $\frac{2}{3}$. Huic ſextantem ſuum & 7. adimemus, nimirum $\frac{11}{21}$ N. − 8. $\frac{2}{3}$ relinquentur $\frac{10}{21}$ N. − 84. $\frac{2}{3}$. His ſi addamus $\frac{1}{3}$ N. + 6. quod ei à primo accedebat fient $\frac{11}{21}$ N. − 78. $\frac{2}{3}$ æqualia 26. $\frac{2}{3}$ ob cauſam ſuprà demonſtratam, adde vtrobique 78. $\frac{2}{3}$ erunt $\frac{11}{21}$ N. æquales $\frac{364}{9}$. hoc eſt 363 N. æquantur 9440. (alterum per 30. alterum per 9. erat multiplicandum, pro his ſume minimos 10. & 3. vt alibi docui) fit 1 N. $\frac{2240}{363}$ primus. Secundus $\frac{2240}{121}$. Tertius ergo $\frac{2240}{363}$ quorum ſumma $\frac{2240}{121}$ ideſt 80. Cætera omnia congruere ad poſtulata quæſtionis experiendo deprehendes. Hucuſque Xilander.

Verùm longè faciliùs ad vitandas fractionum moleſtias inſtituentur poſitiones hac arte. Eſto tertius 7 N. hic ergo dando ſui ſeptantem + 8. remanebit 6. N. − 8. quod cum ſextante ſecundi & 7. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare à 26. $\frac{2}{3}$ auferenda 6 N. − 1. remanet ſextans ſecundi nimirum 27. $\frac{2}{3}$ − 6 N. ergo ſecundus 166. − 36 N. qui amiſſo ſextante & 7. remanet 131 $\frac{1}{3}$ − 30 N. quod cum quintante primi & 6. æquatur 26 $\frac{2}{3}$. Quare ſi à 26 $\frac{2}{3}$ detrahas 137. $\frac{1}{3}$ 30 N. remanet quintans primi, nimirum 30 N. − 110. $\frac{1}{3}$. eſt ergo primus 150 N. 553. $\frac{1}{3}$. Reſtat vt trium ſumma conficiat 80. at conficit 121 N. − 387. $\frac{1}{3}$. Hæc ergo æqualia ſunt 80. & fit 1 N. $\frac{560}{121}$. Igitur tertius qui poſitus erat 7 N. erit $\frac{3920}{121}$. & alij qui prius.

QVÆSTIO XX.

INVENIRE tres quadratos, vt interuallum maximi & medij, ad interuallum medij & minimi datam habeat rationem. Statutum ſit interuallum interualli triplum eſſe. Ponatur minor 1 Q. Medius verò 1 Q. + 2 N. + 1. à latere nimirum 1 N. + 1. Maximus igitur erit 1 Q. + 8 N. + 4. Oportet igitur 1 Q. + 8 N. + 4. æquari quadrato. Fingo quadratum ab 1 N. (vt habeam 1 Q.) & præterea à tot vnitatibus, vt reliquæ ſpecies quæ in hoc quadrato reperientur, numerorum videlicet & vnitatum, non vtraque ſua multitudine ſuperent 8 N. & 4. vnitates, ſed altera deficiat, altera excedat. Eſto itaque à 3. vnitatibus. Ipſe ergo quadratus erit 1 Q. + 6 N. + 9. æqualis vtique 1 Q. + 8 N. + 4. & fit 1 N. 2. N. Ad poſitiones. Erit maximus 30 $\frac{1}{4}$. minimus 6 $\frac{1}{4}$. Medius 12 $\frac{1}{4}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπερέχων μείζονος καὶ τοῦ μέσου πρὸς τὸν ὑπερέχοντα τὸν μέσον καὶ τὸν ἐλαχίστου λόγον ἔχῃ δοθέντα. δεδιτετάχθω δὴ ὁ ὑπερέχων τοῦ ὑπερέχοντος τριπλασίονα. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων δυνάμεως μιᾶς. ὁ δὲ μέσος δυνάμεως μιᾶς, καὶ β̄ μονάδος μιᾶς, ἀπὸ πλευρᾶς δηλονότι τοῦ ἑνὸς μονάδος μιᾶς. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δυνάμεως μιᾶς καὶ π̄ μ̄ δ̄ δύσει ἄρα καὶ δύναμιν μίαν καὶ π̄ μ̄ δ̄ ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἵνα ἔχω τὸν δύναμιν, καὶ ἐπὶ μ̄ τοσούτων ὅσοι τὰ λοιπὰ ἐν τῷ τετραγώνῳ γωνίαμα εἴδη τῶν καὶ τῶν μ̄ μὴ ὑπερβάλλειν καὶ τὸ πλῆθος τὰς καὶ π̄. ἔσονται μ̄ δ̄ ἐκάτερα. ἀλλ' ὁ μὲν ἐλλείπειν, τὸ δὲ πλεονάζειν. ἔστω δὴ μ̄ γ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεως μιᾶς καὶ ς̄ μ̄ θ̄. ταῦτα ἴσα δυνάμει μιᾷ καὶ π̄ μονάσι δ̄. καὶ γίνεται ὁ καὶ μ̄ β̄ ἥμισυ. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μέγιστος μ̄ λ̄. ᾱ ς̄. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ̄ ς̄. ᾱ ς̄. ὁ δὲ μέσος μ̄ ιβ̄. ᾱ ς̄.

IN QVAESTIONEM XX.

OPERATIO Diophanti satis est facilis, & ad docendum accommodata. Quod ait numeri quadrato æquandi 1 Q. + 8 N. + 4. latus fingendum esse ab 1 N. + tot vnitatibus, vt species quæ reperientur in quadrato fictitio non vtraque sua multitudine excedant 8 N. + 4. sic accipiendum est, vt talis statuatur in latere vnitatum numerus, cuius quadratus superet 4. sed cuius duplum sit minus quàm 8. Nam quod ait Xilander non inueniri temerè exemplum, vbi pauciore vnitates, pluresque sint Numeri, non solùm id temerè non inuenietur, sed nec vnquam poterit inueniri. Etenim vt numeri alicuius quadratus sit minor quàm 4. oportet ipsum numerum esse minorem quàm 2. vt verò eiusdem numeri duplum sit maius quàm 8. oportet ipsum numerum esse maiorem quam 4. At omnino impossibile est eundem numerum esse simul minorem quàm 2. & maiorem quàm 4. superest igitur, vt talis in latere fictitio ponatur vnitatum numerus, cuius quadratus sit maior quàm 4. & cuius duplum sit minus quàm 8. seu quod idem est, debet ille vnitatum numerus esse maior quàm 2. minor quàm 4. quales infiniti reperiuntur inter 2. & 4. sed Diophantus more suo ad vitandas fractiones, sumpsit 3. & finxit hoc latus 1. N. + 3. facilius tamen fingi potest huiusmodi latus absque tali circonspectione, si ponatur 1 N. — tot vnitatibus quarum quadratus superet 4. vt si ponatur 1 N. — 6. fiet quadratus 1 Q. — 12. N. + 36. æqualis 1 Q. + 8 N. + 4. vnde fit 1 N. 2 $\frac{1}{4}$ vt prius. Cæterùm inuentis semel tribus quadratis proposito satisfacientibus, licebit absque noua operatione infinitos alios reperire idem præstantes, si iam inuenti quadrati ducantur in quemlibet quadratum, nam fient alij quadrati in iisdem rationibus cum iam inuentis quadratis. Quamobrem & eorum interualla eandem inter se rationem habebunt, quam habent interualla iam inuentorum quadratorum. Ita si inuentos quadratos 5 $\frac{1}{4}$ 12 $\frac{1}{4}$. & 30 $\frac{1}{4}$. ducas in quadratum 4. fient tres alij 25. 49. 121. idem præstantes, nam maiorum interuallum 72. triplum est interualli minorum, quod est 24. & sic alios infinitos eiusdem naturæ licebit inuenire.

Per hanc etiam quæstionem reperientur tres quadrati in Arithmetica medietate. Hoc enim nil aliud est quàm reperire tres quadratos, vt maiorum interuallum sit æquale interuallo minorum. Quare ponatur minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. erit igitur maximus 1 Q. + 4 N. + 2. cuius latus fingetur 1 N. — tot vnitatibus quarum quadratus superet 2. Verbi gratia 1 N. — 2 fiet quadratus 1 Q. — 4 N. + 4. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{1}{16}$ $\frac{17}{16}$ $\frac{33}{16}$. & si eos per eundem quadratum 16. multiplices, fient alij 1. 25. 49. quos si rursus per eundem quadratum 4 multiplices, fient rursus alij 4. 100. 196. & sic infiniti reperientur. Sed & alia operatione subtili sanè & iucunda solui potest huiusmodi quæstio, etiamsi requiratur præterea vt medius quæsitorum quadratorum sit quilibet datus quadratus. Sint enim inueniendi tres quadrati in Arithmetica medietate, quorum medius sit 25. sume duplum ipsius 25. nempe 50. Quia ergo 50. componitur ex duobus quadratis 25. & 25. diuidatur rursus idem 50. in duos alios quadratos per decimam huius, sintque hi 1. & 49. dico istos esse minimum & maximum quæsitorum, quorum 25.
5. 1. *pariſ.* est medius arithmeticè proportionalis, quia enim summa ipsorum 1. & 49. ex constructione, dupla est ipsius 25. ', erit 25. inter eos medius in arithmetica medietate. Quod erat propositum. Vnde cùm idem 50. rursus diuidi possit in duos alios quadratos infinitis varijs modis, constat infinitos alios duos quadratos reperiri posse, inter quos 25. sit medius arithmeticè proportionalis.

QVÆSTIO XXI.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ἑνός. ὁ δὲ δεύτερος μοι ἄδος μιᾶς ς̄ β̄. ἵν' ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον. λειπόν ἐστι, ἵνα καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιῇ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον. ποιεῖ δυνάμεις δ̄ ἀριθμοὺς ῑ̄ μονάδα μίαν. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσαι τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ β̄ λείψει μ̄ β̄. αὐτὸς ἔσται δυνάμεων δ̄, μ̄ δ̄ λείψει ς̄ η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ιε̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος ιδ̄ ιε̄ καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros, vt vtriusque quadratus altero numero adiecto, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 + 2 N. vt quadratus primi absumens secundum, quadratum faciat. Superest vt & quadratus secundi primo adiecto faciat quadratum, sed quadratus secundi adiecto primo efficit 4 Q. + 5 N. + 1 Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 2 N. — 2. nempe 4 Q. + 4 — 8 N. & fit 1 N. $\frac{4}{11}$. Erit igitur primus $\frac{5}{11}$. secundus $\frac{15}{11}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE duos numeros vt vtriuſque quadratus, altero numero dempto quadratum faciat. Ponatur minor 1 N. & quotquot libuerit vnitatum, eſto itaque 1 N. + 1. Maior autem ſit quadratus minoris dempto 1 Q. vt minoris quadratus detracto maiore relinquat quadratum. Quia ergo minoris quadratus eſt 1 Q. + 2 N. + 1. vtique maior dempto 1 Q. erit 2 N. + 1. & patet minoris quadratum dempto maiore facere quadratum. Oportet itaque & maioris quadratum, puta 4 Q. + 4 N. + 1. detracto minore facere quadratum; ſed facit 4 Q. + 3 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 3. N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. erit igitur minor $\frac{1}{16}$. Maior $\frac{17}{16}$. & ſatisfaciunt propoſito.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τῷ λοιπῷ ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐλάσσων ς̄ ᾱ. καὶ μοὶ ὅσων δεῖ ποτε, ἔστω δὴ μονάδας μιᾶς. ὁ δὲ μείζων τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου ταῦτα δύναμιν μίαν, ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τῷ μείζονος ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνός ἐστι δύναμις ᾱ ς̄ᵅ β̄ μονάδας ᾱ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται τοῦ μὲν τῶν δύναμιν ς̄ β̄ μ̄ᵃ μιᾶς, καὶ μόνον ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τετράγωνος λείψει τῷ μείζονος ποιῶν τετράγωνον. δεῖ δὴ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος δυνάμεις δ̄ ς̄ᵅ δ̄ μονάδα μίαν, λείψει τῷ ἐλάττονος ποιοῦν τετράγωνον. ἀλλὰ ποιεῖ δυνάμεις δ̄ ς̄ᵅ γ̄· ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάττω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ γ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄ ῑ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων ιη ͦ. ὁ δὲ μείζων ιᾱ ͦ. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς ὑποθέσεως.

IN QVÆSTIONEM XXI ET XXII.

NIHIL hic notatu dignum, quod non ſatis tum à Scholiaſte, tum à Xilandro ſit animadverſum.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE duos numeros, vt vtriuſque quadratus adſcita numerorum ſumma faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. Maior verò 1 N. + 1. vt quadratus minoris, nimirum 1 Q. adſumens vtrumque puta 2 N. + 1. faciat quadratum. Supereſt vt & quadratus maioris adſumens vtriuſque ſummam faciat quadratum. Sed maioris quadratus adiecta vtriuſque ſumma fit 1 Q. + 4 N. + 2. Hoc ergo æquale eſt quadrato. Formo quadratum ab 1 N. — 2. ipſe igitur quadratus erit 1 Q. + 4 — 4 N. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Eſto ergo minor $\frac{1}{2}$. maior $\frac{3}{2}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς̄ ἑνός. ὁ δὲ μείζων ς̄ ᾱ μονάδος ᾱ. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος, τουτέστι δύναμις μία προσλαβὼν συναμφότερον, τουτέστιν ς̄ᵅ β̄ μονάδα ᾱ ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν ἐστὶ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνον προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος προσλαβὼν συναμφότερον γίνεται δύναμις ᾱ ς̄ᵅ δ̄ μ̄ᵃ β̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ᾱ λείψει μ̄ᵃ β̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δύναμις ᾱ μ̄ᵃ δ̄ λείψει ς̄ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β̄ ῑ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων β̄ ῑ ὁ δὲ μείζων ῑ ῑ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OBSCVRVM fortaſſis alicui videatur, quanam arte ſuas poſitiones ita inſtituat Diophantus, vt ſumma vtriuſque numeri addita quadrato minoris faciat quadratum. Id autem ſic conſequitur, fingit quadratum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, verbi gratia ab 1 N. + 1. fitque quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Quare ſi ponamus ſummam numerorum 2 N. + 1. patet eam additam ad 1 Q. facere quadratum. Sed tunc vt ſatisfiat vni poſtulatorum, oportet 1 Q. eſſe quadratum vnius nu-

merorum quæsitorum. Is ergo erit 1 N. quo detracto ex vtriusque summa quæ posita est 2 N. + 1. manet alter 1 N. + 1. Vnde patet priorem illum quadratum fingi potuisse à quolibet numero Numerorum + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia fingatur à 2 N. + 3. fiet quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. Quare ponemus summam numerorum quæsitorum 12 N. + 9. ac proinde alterius quadratus, cùm debeat esse 4 Q. erit alter ille 2 N. quo detracto à summa remanet alter 10 N. + 9. Itaque si hac operatione quæstionem absoluere libet, restat vt maioris quadratus, nimirum 100. Q. + 180 N. + 81. adscita vtriusque summa nempè 12 N. + 9. faciat quadratum, facit autem 100. Q. + 192 N. + 90. Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus formo abs 10 N. − 30. & fit 1 N. $\frac{15}{44}$ sunt ergo quæsiti numeri $\frac{15}{44}$. & $\frac{141}{44}$.

Quod si velimus vti proprietate numerorum vnitate differentium, quibus accidit vt eorum summa æquetur interuallo quadratorum eorundem (quia scilicet ex summa numerorum in eorum differentiam, fit interuallum quadratorum, & posita differentia numerorum 1. productum ex summa in differentiam æquatur ipsi summæ) longè minore negotio rem expediemus. Etenim ponatur minor quæsitorum quilibet Numerorum numerus, puta 2 N. Tum ponatur maior idem Numerorum numerus + 1, puta 2 N + 1. patet ex demonstratis vtriusque summam additam minoris quadrato efficere quadratum maioris. Restat igitur solum vt eadem summa cum quadrato maioris faciat quadratum, &c. Et ad hanc numerorum proprietatem fortasse respexit Diophantus, cùm ponat minorem numerum 1 N. maiorem 1 N. + 1 vnde sanè ex illius operatione facillimum elicio Canonem.

Quemlibet quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris auctum quaternario, orietur minor quæsitorum, & addita vnitate fiet maior.

QVÆSTIO XXIV.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν τετράγωνος λείψει συναμφοτέρους ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάσσων ς̄ α̅. ὁ δὲ μείζων ς̄ α̅ , μοναδὸς μιᾶς ἵνα ὁμοίως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος τετράγωνος λείψει συναμφοτέρους ποιεῖ τετράγωνον. δήσει ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνον λείψει συναμφοτέρους ποιεῖν τετράγωνον. ἔσται ἄρα δύο αρμὸς μία λείψει ις̄ β̄ μοναδὸς μιᾶς. πάντα ἁπλᾶ τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ α̅ λείψει μ̄ γ̄. δύναμις ἄρα μία, μ̄ θ̄ λείψει ις̄ ς̄. ἴσα εἰσὶ δυνάμει μιᾷ λείψει ις̄ β̄ μοναδὸς μιᾶς. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μὲ β̄ καὶ ἥμισυ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ β̄ καὶ ἥμισυ, ὁ δὲ μείζων μ̄ γ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιῶν τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros vt vtriusque quadratus dempta vtriusque numeri summa faciat quadratum. Ponatur minor 1 N. maior 1 N. + 1. vt similiter maioris quadratus dempta vtriusque summa faciat quadratum. Oportet igitur & minoris quadratū dempta summa vtriusque facere quadratum. Facit autem 1 Q. − 2 N. − 1. hoc æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1. N. − 3. Igitur 1 Q. + 9 − 6 N. æquatur 1 Q. − 2 N. − 1. & fit 1 N. 2 $\frac{1}{2}$. erit igitur minor 2 $\frac{1}{2}$. maior 3 $\frac{1}{2}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM XXIV.

HIc etiam euidens est Diophantum vsum proprietate numerorum quorum interuallum est vnitas, quibus, vt ostensum est, accidit summam ipsorum æquari interuallo quadratorum ab ipsis, vnde si quæsiti numeri ponantur vnitate differentes, patet eorum summam à maioris quadrato detractam relinquere quadratum minoris. Porro ex ipsa operatione elicitur huiusmodi Canon.

Quadratum quemlibet vnitate auctum diuide per duplum sui lateris binario multatum, orietur minor quæsitorum, cui addita vnitate fiet maior.

Possunt tamen etiam aliter institui positiones nulla habita ratione numerorum vnitate differentium. Nam ponatur primus Numerorum numerus quilibet + quotlibet vnitatibus. Verbi gratia, ponatur 1 N. + 3. erit eius quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Quare statuatur summa vtriusque 6 N. + 9. vt detracta à primi quadrato relinquat quadratum. Igitur cùm primus sit 1 N. + 3. hunc auferendo à 6 N. + 9. remanebit secundus 5 N. + 6. Restat vt ab huius quadrato qui est 25 Q. + 60 N. + 36. detrahendo summam vtriusque, nimirum 6 N. + 9. relinquatur quadratus, at remanent 25 Q. + 54 N. + 275. Hæc ergo æquantur quadrato fit eius latus 5. N. − 9. fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. eruntque quæsiti numeri 3. $\frac{1}{5}$ & 7 $\frac{1}{5}$.

QVÆSTIO XXV.

INVENIRE duos numeros, vt ſummæ illorum quadratus, adiecto alterutro quadratum faciat. Quandoquidem 1 Q. ſiue ei adiicias 3 Q. ſiue 8 Q. quadratum facit. Pono quæſitorum numerorum alterum 3 Q. alterum 8 Q. quadratum verò ſummæ 1 Q. ſic enim quadratus ſummæ adiecto alterutro facit quadratum. Et quia ſumma vtriuſque eſt 11 Q. quadratus ſummæ erit 121 QQ. ſed eſt quoque 1 Q. Igitur 121 QQ. æquantur 1 Q. Quamobrem & latus lateri æquale eſt. Proinde 1 N. æqualis eſt 11. Q. Omnia per numerum diuidantur. 11 N. æquales erunt 1. & fit 1 N. $\frac{1}{11}$. Ad poſitiones erit alter $\frac{3}{121}$. alter $\frac{8}{121}$. Quadratus verò ſummæ $\frac{121}{14641}$. Et ſatisfit quæſtioni.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ συναμφοτέρω περιλαβὼν ἑκάτερον ποιῆ τετράγωνον. καὶ ἐπὶ δύναμις μία ἐάν τι περιλάβῃ δύναμις γ̄. ἐάν τι δυνάμις η̄ ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τ̄ ἐπιζητουμένων ἀριθμῶν τὸν μὲν δύναμις γ̄. τ̄ δὲ δυνάμις η̄. τ̄ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρω δυνάμεως μιᾶς, καὶ ἔσται ὁ ἀπὸ συναμφοτέρω περιλαβὼν ἑκάτερον ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπὶ συναμφοτέρος ὄξι δυνάμεις ιᾱ. ὁ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρω ἴσαι δυναμοδυνάμεων ρκᾱ. ἀλλ' ἔστι καὶ δύναμις μία δυναμοδυνάμεις ἄρα ρκᾱ ἴσαι δυνάμει μιᾷ, ὥστε καὶ πλευρᾷ ἴσαι. ἀριθμὸς ἄρα εἷς ἔσται δυνάμεων ιᾱ. ⊂ πάντα τοῦτο ἀριθμοὶ. ις̄ ἄρα ιᾱ. ἴσοι μονάδι μιᾷ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς, α̅ ι̅ϛ̅. ἐπὶ τὰς ὑποκάσεις. ἔσται ὁ μὲν γ̄ ρν̅. ὁ δὲ ὄντως η̄ ρν̅η̅. ὁ δὲ ἀπὸ συναμφοτέρω ρκᾱ ,αχξ̅α̅, καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

IN QVAESTIONEM XXV.

POTERAT analyſis Diophantæa breuius explicari ſic. Quandoquidem 1 Q. ſiue ei addicias 3 Q. ſiue 8 Q. quadratum facit. Pono quæſitorum numerorum alterum 3. Q. alterum 8. Q. Quadratum verò ſummæ 1 Q. erit ergo ipſa ſumma 1 N. Sed etiam 11 Q. Igitur 1 N. æquatur 11 Q. & fit 1 N. $\frac{11}{1}$. Porro manifeſtum eſt loco 3. & 8. ſumi poſſe quoſlibet alios quadratos vnitate multatos, veluti 15. 24. 35. quorum duo quilibet nota Quadrati affecti, ſtatui poſſunt pro quæſitis numeris, poſito ſcilicet ſummam illorum eſſe ſemper 1 N. & eius quadratum 1 Q. Nam & quadratus ſummæ variari poteſt, & loco 1 Q. poni quilibet quadratorum numerus quadratus, vt 4 Q. 9 Q. 16 Q. Sed tunc oportet quæſitos numeros, ſtatui quadratos multatos eodem ipſo quadrato qui ponitur pro quadrato ſummæ, vt ſi ponatur quadratus ſummæ 4 Q. Ponentur quæſiti numeri 5 Q. & 12 Q. & ſic de aliis. Præterea dignum eſt animaduerſione hanc quæſtionem non ad duos tantùm, ſed ad quotlibet numeros extendi poſſe, eodem prorſus artificio. Quærantur enim quatuor numeri vt ſummæ illorum quadratus quolibet ex ipſis adiecto quadratum faciat. Pone quæſitos numeros, 3 Q. 8 Q. 15 Q. 24 Q. & quadratum ſummæ 1 Q. erit ergo ſumma 1 N. ſed eſt quoque 50 Q. Igitur fit 1 N. $\frac{50}{1}$. & ſunt quæſiti numeri $\frac{3}{2500}$ $\frac{8}{2500}$ $\frac{15}{2500}$ $\frac{24}{2500}$. quorum ſumma $\frac{50}{1}$ cuius quadratus quolibet illorum adiecto quadratos facit, vt patet. Ex his demum Canonem eliciemus.

Sume tot quadrates, eodem aliquo quadrato multatos, quot petuntur numeri, hos ducito ſigillatim in ablatitium quadratum, productа ſeorſim diuiſa per quadratum ſummæ ſumptorum numerorum quæſitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVI.

INVENIRE duos numeros vt ſummæ illorum quadratus, vtroque dempto faciat quadratum. Primùm accipio aliquem quadratum, à quo auferendo duos aliquos numeros, ſuperſit quadratus. Eſto 16. is enim detractus ſiue 12. ſiue 7. relinquit quadratum. Statuo ergo illos in quadrato, alterum quidem pono 12 Q. alte-

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ συναμφοτέρω λείψει ἑκατέρῳ ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνω τετράγωνον τινὰ τετράγωνον. ἀφ' οὗ ἀφελὼν δύο τινὰς ἀριθμοὺς καταλείπω τετράγωνον. ἔστω δὴ ὁ ις̄. αὐτὸς γὰρ ἐάν τε λείψῃ μονάδας ιβ̄ γίνεται τετράγωνος. ἐάν τε πάλιν μ̄ ζ̄. γίνεται τετράγωνος. τάσσω οὖν πάλιν αὐτὸς ἐν δυνάμει, καὶ τ̄ μὲν δυνάμεων

ιβ̄. ἡ ἄρα δυνάμεων ζ. τὸν ἀπὸ συναμφοτέρων δυνάμεων ιε̄. ᾧ ὑφ᾽ ει ὁ ἀπὸ συναμφοτέρων λείψει ἑκατέρου πειᾶν τετράγωνον. δώσει λοιπὸν ἡ ἀπὸ συναμφοτέρου πλευρὰν γίνεσθαι δυνάμεσι ιε̄. ὧν ἡ τοῦ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ, τουτέστι δυνάμεις ιε̄ ἴσας ἀριθμοῖς δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ̄ ᾱ. ἔστι ὁ μὲν πρῶτος ρῑ β̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μβ̄ ᾱ ᾱ. ᾗ ποιῶν τὸ πρόβλημα.

alterum 7 Q. At ſummæ quadratum 16 Q. ſic enim ſummæ quadratus, vtroque dempto relinquit quadratum. Oportet itaque ſummæ quadratum æqualem eſſe 16 Q. Quare & latus lateri, hoc eſt 19 Q. æquari oportet 4 N. & fit 1 N. $\frac{3}{19}$. erit igitur primus $\frac{121}{361}$. ſecundus $\frac{225}{361}$. & ſatisfaciunt propoſito.

IN QVAESTIONEM XXVI.

VARIARI poſſunt hîc poſitiones ſicut in præcedente. Nam poſito quadrato ſummæ 16 Q. ſtatuemus pro quæſitis duos quoſlibet numeros, qui detracti à 16. ſigillatim relinquant quadratos, quales infiniti reperiuntur, ſi ponas eos 7 Q. & 15 Q. fiet eorum ſumma 22 Q. æqualis 4 N. & erit 1 N. $\frac{11}{2}$. & quæſiti numeri $\frac{77}{4}$ & $\frac{165}{4}$. Rurſus autem loco 16. Q. ſtatui poteſt quadratus ſummæ quilibet alius quadratus, puta 25 Q. 36. Q. & ſic in infinitum. Vnde ſanè diuerſarum ſolutionum ampla ſeges ſuppetit.

Poteſt etiam huiuſmodi quæſtio ad quotlibet extendi numeros. Vt ſi petantur quatuor numeri vt ſummæ quadratus quolibet illorum detracto relinquat quadratum. Ponatur ſummæ quadratus 25 Q. ipſi verò ſint 21 Q. 16. Q. 9. Q. 24 Q. horum ſumma fit 70 Q. æqualis 5 N. eſt ergo 1 N $\frac{1}{14}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{11}{196}$ $\frac{15}{196}$ $\frac{25}{196}$ $\frac{39}{196}$. quorum ſumma $\frac{45}{196}$ à cuius quadrato ſi auferantur ſigillatim inuenti numeri ſemper relinquitur quadratus. Hinc quoque fiet huiuſmodi Canon.

Sume quadratum numerum, à quo aufer ſigillatim tot alios quadratos, quot petuntur numeri, reſidua ducito ſigillatim in ſumptum quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum ſummæ eorundem reſiduorum, quæſitos exhibent numeros.

Cæterùm hîc deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio, quæ ſoluitur eodem artificio.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ illorum quadratus à quolibet illorum detractus, quadratum relinquat.

Ponatur ſummæ quadratus 1 Q. quem auferendo tum à 5 Q. tum à 10 Q. cùm relinquantur quadrati, ponantur quæſiti numeri 5 Q. & 10 Q. Erit igitur illorum ſummatum 1 N. tum 15 Q. Quare fit 1 N. $\frac{1}{15}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{1}{45}$. & $\frac{2}{45}$. & ſatisfaciunt propoſito. Variari poſitiones poſſunt iiſdemmodis, quibus & præcedentium quæſtionum. Et eodem modo ad plures numeros extenderetur quæſtio, & demum formabitur iſte Canon.

Quadratum quemlibet adde totidem aliis quadratis, quot petuntur numeri. Aggregata ducito ſigillatim in additicium quadratum, producta ſeorſim diuiſa per quadratum eorundem aggregatorum, quæſitos exhibent numeros.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἐπ᾽ αὐτῷ περιλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ τετράγωνον. τῷ δὲ τετραγώνων αἱ πλευραὶ συντεθεῖσαι ποιῶσι τὸν δοθέντα ἀριθμόν. δεδιπτάχθω δὴ ποιεῖν τὸν ε̄. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὧσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ μείζων τ̄ ἐλάσσονός ἐστι τετραπλασίων πλὴν μονάδα, ὁ ὑπ᾽ αὐτῷ περιλαβὼν τ̄ ἐλάττονα ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τ̄ μὲν ἐλάσσονα ς̄ ἀνὸς, τ̄ δὲ μείζονα ςξ δ̄ λείψει μονάδος μιᾶς, ᾧ συμβαίνει τὸν ὑπ᾽ αὐτῷ περιλαβόντα τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. δεήσει ἄρα ᾧ ὁμοίως τ̄ ἐπ᾽ αὐτῷ περιλαβόντα τὸν μείζονα ποιεῖν ςς δ̄ λείψει μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ μονάδων ε̄ λείψει τῇ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐλάσσο-

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione adſcito alterutro quadratum faciat, quadratorum autem latera iuncta datum conficiant numerum. Imperetur vt faciant 6. Iam cùm duo ſunt numeri, quorum maior eſt quadruplum alterius vnitate deminutum, productus eorum multiplicatione adſcito minore facit quadratum. Pono ergo minorem 1 N. maiorem verò 4 N. — 1. & contingit productum multiplicationis addito minore fieri quadratum. Oportet ergo ſimiliter eundem productum adſcito maiore, puta 4 N. — 1. fieri quadratum, cuius latus ſit 6. cum defectu numerorum qui ſunt latus mino-

ris quadrati, vt ſcilicet (quod requirit quæſtio) duorum latera coniuncta faciant 6. ſed productum multiplicationis adiecto maiore facit 4 Q. + 3 N. − 1. Quadratus autem à latere 6 − 2 N. eſt 4 Q. + 36 − 24 N. Hæc ergo æquantur inter ſe, & fit 1 N. $\frac{37}{27}$. Ad poſitiones. Poſueram minorem 1 N. erit ergo $\frac{37}{27}$. maiorem verò poſueram 4 N. − 1. erit igitur $\frac{139}{27}$. & conſtat propoſitum.

νος ἀριθμῷ, ἵνα μὴ τὸ πρόβλημα συντεθῇ σαι τ̄ δύο αἱ πλευραὶ ποιῶσι μονάδας ε̄ ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τ̄ μείζονα ποιεῖ δυνάμεις δ̄ ις̄ γ̄ λείψει μονάδος μιᾶς. ὁ δὲ ὑπὸ μονάδων ε̄ λείψει ἀριθμῷ β̄. δυνάμεις δ̄ μονάδας λς̄ λείψει ις̄ κδ̄. ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις. ὁ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λζ̄ ξ̄. ὅπερ ταῖς ὑποστάσεις. ἴσται τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν ἑνὸς, ἴσαι λζ̄ ξ̄. τὸν δὲ μείζονα ις̄ δ̄ λείψει μονάδος ᾱ. ἴσαι ρκᾱ ξ̄. καὶ μίγνυσι τὴν τῆς προτάσεως.

IN QVÆSTIONEM XXVII.

BENE' monet Scholiaſtes lemma quod aſſumit Diophantus, non de ſolis quadruplis, ſed de omnibus numeris intelligendum eſſe qui ſint plani ſimiles. Quare ſic vniuerſaliter proponendum eſt & demonſtrandum.

Datis duobus numeris, quorum maiori de ſit vnitas, quo minus ad minorem habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex mutua datorum multiplicatione adſumpto minore illorum quadratus ſit.

Sint duo numeri A B & D. tales vt addita vnitate B C maiori A B, fiant plani ſimiles A C. & D. dico productum ex A B in D adſcito ipſo D fieri quadratum.

A.....B. C
D 2.

Quia enim A C. & D ſunt plani ſimiles, ' productus ex A C in D quadratus eſt. At productus ex A C in D ' æquatur productis ex A B & ex B C in D. productus autem ex vnitate B C in D. æqualis eſt ipſi D. Igitur productus ex A B in D adſumpto ipſo D. quadratus eſt. Quod demonſtrandum erat.

1. *nempe*
1. *ſecundi*

Hinc patet poſitiones infinitis aliis modis inſtitui potuiſſe. Nam poſito minore 1 N. poni poterat maior non ſolùm 4 N. − 1. vt fecit Diophantus, ſed etiam 9 N. − 1. 16 N. − 1. & ſic in infinitum. Vel etiam poſito minore 3 N. poni poſſet maior 12 N. − 1. vel 27 N. − 1. &c. & poſito rurſus minore 9 N. poneretur maior 16. N. − 1. vel 25 N. − 1. &c. Ex ipſa autem operatione elicietur iſte Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipſius in ſummam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum ſumma laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum initio ſumptum, productus vnitate multatus erit maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. Cape quemlibet quadratum vnitate multatum, puta 8. cui adde 42 qui fit bis ex 7. in latus quadrati ſumpti, erit aggregatum 50. per quod diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, puta 50. fiet 1. minor quæſitorum, quem ſi ducas in quadratum 9. initio ſumptum, productus vnitate multatus, nimirum 8. erit maior numerus. Itaque 1. & 8. ſatisfaciunt propoſito. Quamobrem in huiuſmodi Canone tradendo allucinatus eſt Raphael Bombellius lib. 3. Problemate 88. & è falſo Canone falſos elicuit ſolutionis numeros $\frac{49}{50}$ & $\frac{343}{50}$. quos minimè ſoluere quæſtionem experiendo deprehendes.

Cæterùm ſicut per ſuum lemma Diophantus ſic ſuas inſtituit poſitiones, vt productus adſcito minore numero faciat quadratum, ſic poterimus eas rurſus ita inſtituere, vt productus adſcito maiore numero faciat quadratum, tali præmiſſo lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minori deſit vnitas quo minus ad maiorem, habeat rationem quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto maiore quadratum facit.

A 9.
B... C. D

Sit maior A, & B C minor, cui addita vnitate C D fiant A. & B D. plani ſimiles, dico productum ex A in B C adſumpto ipſo A facere quadratum. Etenim ex A in B D fit quadratus. Sed productus ex A in B D æquatur productis ex A in B C. & in C D. & productus ex A in C D æquatur ipſi A. Igitur productus ex A in B C. addito ipſo A. fit quadratus. Quod demonſtrandum erat,

Hoc ſuppoſito ſtatuatur maior 4 N. minor 1 N. − 1. ſic enim productus 4 Q. − 4. N. adſcito maiore facit quadratum 4 Q. reſtat vt idem productus adſcito minore, faciat quadratum, cuius latus ſit 6 − 2 N. facit autem 4 Q. − 3 N. − 1. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{37}{27}$ ſuntque quæſiti numeri $\frac{37}{27}$ & $\frac{139}{27}$. Hinc elicietur Canon alter.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipſius in ſummam laterum

datam, per reſiduum diuide quadratum ſummæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæſitorum vnitate auctus, quem ſic vnitate auctum ſi ducas in ſumptum ab initio quadratum, fiet maior quæſitorum.

Sit data ſumma laterum 7. vt prius. Sume quadratum 9. vnde ablata vnitate, reſiduum 8. aufer à 42. qui fit ex ipſo 7. bis in latus ipſius 9. relinquitur 34. per quem diuide quadratum ipſius 7. vnitate auctum, nimirum 50. fiet $\frac{25}{17}$ vnde ablata vnitate relinquitur $\frac{8}{17}$ minor quæſitorum; At ducto $\frac{25}{17}$ in quadratum 9. fit maior $\frac{225}{17}$.

Sed & multò vniuerſalius proponi poteſt hæc quæſtio, nimirum ſic.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, adſcito quolibet alterutrius multiplice quadratum faciat, & quadratorum latera iuncta datum conficiant numerum.

Soluetur autem eadem arte auxilio eorundem leminatum, quæ & ipſa in vnum contracta ſic proponentur vniuerſalius.

Datis duobus numeris quorum vni deſint quotlibet vnitates, quo minus ad alium rationem habeat quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione adſumpto alterius multiplice ſecundum vnitates quæ alteri deſunt, fit quadratus.

Quærantur ergo duo numeri, vt productus eorum multiplicatione adſcito alterutrius duplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur minor 1 N. maior per lemma præcedens eſto 4 N. − 2. ſic enim productus 4 Q. − 2 N. adſcito minoris duplo facit quadratum 4 Q. Reſtat vt idem productus adſcito duplo maioris faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 6 N. − 4. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24 N. + 36. & fit 1 N. $\frac{4}{7}$. Sunt ergo quæſiti numeri $\frac{4}{7}$ & $\frac{7}{7}$ quorum productus $\frac{28}{49}$ adſcito figillatim vtriuſque duplo quadratos facit $\frac{36}{49}$ & $\frac{81}{49}$. quorum latera $\frac{6}{7}$. & $\frac{9}{7}$. quorum ſumma $\frac{15}{7}$ ſeu 6.

Rurſus. Quærantur duo numeri vt productus eorum multiplicatione adſcito primi duplo, tum ſecundi triplo quadratum faciat, & latera quadratorum conficiant 6. Ponatur primus 1 N. ſecundus 4 N. − 2. ſic enim productus 4 Q. − 2 N. adſcito primi duplo facit quadratum 4 Q. Reſtat vt idem productus aſcito ſecundi triplo faciat quadratum à latere 6 − 2 N. facit autem 4 Q. + 10 N. − 6. Hoc ergo æquatur 4 Q. − 24. N. + 36. & fit 1 N. $\frac{30}{17}$ ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{30}{17}$ & $\frac{98}{17}$ quorum productus $\frac{2940}{289}$ adſcito primi duplo & ſecundi triplo, quadratos facit $\frac{3600}{289}$ & $\frac{9604}{289}$ quorum latera $\frac{60}{17}$ & $\frac{98}{17}$ quorum ſumma $\frac{158}{17}$ ſeu 6. Hinc etiam Canon elici poteſt, quod exercitationis gratia tibi faciendum relinquo.

QVÆSTIO XXVIII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρου ποιῇ τετράγωνον. δεῖ δὲ τετραγώνους εἶναι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. διπλασιάσθω δὲ τὸν ς, καὶ ἔστω ἑκάτερος τῶν ζητουμένων ἐν ὁ μείζων τῷ ἐλάττονος ἔχει τὸ ἀπαξαπλάσιον, καὶ μονὰς μία, ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τῷ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν μείζονα ⟨ς⟩ δ̄ μ̄ ᾱ, τὸν δὲ ἐλάττονα ⟨ς⟩ ἁπλᾶ. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει, τῷ ἐλάττονος ποιεῖ τετράγωνον δυνάμεις δ̄ οὖ ἡ πλευρὰ ⟨ς⟩ β̄. λοιπὰ ἔστι τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει τῷ μείζονος ποιεῖν τετράγωνον, καὶ τῷ τετραπλασίονα πλευρὰς ἔχειν τὰς ὑποκειμένας μονάδας ε̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει τῷ μείζονος γίνεται δυνάμεις δ̄ λείψει ⟨ς⟩ γ̄ μονάδος μιᾶς. ταῦτα ἴσα τετραπλασίονι τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων ῑ δ̄ λείψει ⟨ς⟩ β̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ⟨ς⟩ ιε̄. ὧν ὁ ἐλάττων ⟨ς⟩ ιε̄. ὁ δὲ μείζων ρκε̄ ⟨ς⟩ ἐστὶν ὁποιῶν τὸ τῆς ὑποστάσεως.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione detracto alterutro quadratum faciat. At quadratorum latera coniuncta faciant datum numerum. Faciant itaque 5. & quoniam ſi duo ſint numeri, quorum maior ſit minoris quadruplum auctum vnitate, productus eorum multiplicatione, detracto minore facit quadratum. Pono maiorem 4 N. + 1. minorem verò 1 N. & productus eorum multiplicatione detracto minore facit quadratum 4 Q. cuius latus 2 N. Supereſt vt idem productus detracto maiore faciat quadratum, & vt quadratorum latera coniuncta conficiant imperatas vnitates 5. ſed productus ex multiplicatione illorum demptο maiore facit 4 Q. − 3 N. − 1. hoc ergo æquatur quadrato à latere 5 − 2 N. & fit 1 N. $\frac{6}{7}$. Erit igitur minor $\frac{13}{7}$. maior $\frac{41}{7}$. & ſatisfaciunt quæſtioni.

IN

IN QVAESTIONEM XXVIII.

LEMMA, quo vtitur Diophantus sic vniuersaliter proponendum est.

Datis duobus numeris quorum maior vnitate multatus, ad minorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus ex datorum mutuo ductu, detracto minore quadratum relinquit.

A.....BC.
D 2.

Sit maior A C. & D minor, & à maiori auferendo vnitatem B C. superfit A B qui ad D sit in ratione quadrati ad quadratum, dico productum ex D in A C detracto ipso D relinquere quadratum. Etenim productus ex D in A C æquatur productis ex D in A B & in B C. At productus ex D in vnitatem B C æquatur ipsi D. Igitur productus ex D in A C detracto D relinquit productum ex D in A B. Sed productus ex D in A B quadratus est, cùm A B & D ponantur plani similes. Ergo constat propositum. 1. secundi.

Hinc etiam patet positiones infinitis modis variari posse. Nam posito minore 1 N. maior poni poterit non solùm 4 N. + 1. vt fecit Diophantus, sed etiam 9 N. + 1 vel 16 N. + 1 &c. & si minor ponatur 3 N. ponetur maior 12 N. + 1. vel 27 N. + 1 &c. Rursus si ponatur minor 4 N. ponetur maior 9 N. + 1. vel 16 N. + 1. vel 25 N. + 1 &c. Ex ipsa quoque operatione formabitur huiusmodi Canon. 1. noni.

Quadratum quemlibet vnitate multatum aufer à duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum; per residuum diuide quadratum summæ laterum vnitate auctum, orietur minor quæsitorum, quem si ducas in quadratum initio sumptum, productus vnitate auctus, erit maior.

Sit data summa laterum 5. & sumpto quadrato 9. aufer ab eo vnitatem superest 8. quem aufer à 30. duplo producti ex 5. in 3. supereſt 22. per quem diuide quadratum ipsius 5. vnitate auctum puta 26. fiet $\frac{8}{11}$ minor quæsitorum, quo ducto in quadratum 9. fit $\frac{72}{11}$ cui addendo vnitatem fit maior quæsitorum $\frac{83}{11}$ & satisfaciunt proposito.

Possumus etiam ita instituere positiones, vt productus detracto maiore numero relinquat quadratum, tali præmisso lemmate.

Datis duobus numeris, quorum minor vnitate multatus, ad maiorem sit in ratione quadrati ad quadratum, productus eorum multiplicatione, detracto maiore quadratum relinquit.

Quod demonstratur eodem prorsus modo quo præcedens demonstratum est. Hoc autem præmisso. Ponatur maior 4 N. minor 1 N. + 1. Sic enim productus, nimirum 4 Q. + 4 N. detracto maiore quadratum relinquit 4 Q. cuius latus 2 N. Supereſt igitur, vt idem quadratus detracto minore quadratum relinquat à latere 5 − 2 N. relinquit autem 4 Q. + 3 N. − 1 hoc ergo æquatur quadrato 25. − 20 N. + 4 Q. & fit 1 N. $\frac{24}{17}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{120}{17}$ & $\frac{72}{17}$. Hinc etiam elicietur alius Canon.

Quadratum quemlibet vnitate multatum adde duplo producti ex latere ipsius in summam datam laterum, per aggregatum diuide quadratum summæ laterum, vnitate auctum, orietur minor quæsitorum vnitate multatus, quem sic multatum ducito in quadratum initio sumptum, fiet maior quæsitorum.

Potest & vniuersalius proponi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detracto quolibet alterutrius multiplice, quadratum relinquat, & quadratorum latera iuncta, datum conficiant numerum.

Et soluetur eodem prorsus artificio, auxilio lemmatum traditorum, quæ & ipsa in vnum contracta proponentur vniuersalius, hoc pacto.

Datis duobus Numeris quorum vnus quotlibet vnitatibus superat numerum, qui ad alterum rationem habet quadrati ad quadratum, productus ex datorum multiplicatione, detracto alterius multiplice, secundum vnitates quibus alter abundat, quadratum relinquit.

Quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione detracto primi duplo, & secundi triplo, quadratum relinquat, & laterum summa esto 5. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 2. sic enim productus 1 Q. + 2 N. detracto primi duplo relinquit quadratum 1 Q. cuius latus 1 N. Restat igitur vt idem productus detracto secundi triplo faciat quadratum, cuius latus sit 5 − 1 N. facit autem 1 Q. − 1 N. − 6. Hoc ergo æquatur 1 Q. − 10 N. + 25. & fit 1 N. $\frac{19}{9}$. suntque quæsiti numeri $\frac{19}{9}$ & $\frac{26}{9}$.

Cæterùm hic desiderari videtur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, detractus à quolibet ipsorum, quadratum relinquat.

Ponatur minor 1 N. maior quilibet Numerorum numerus qui ad minorem rationem habeat quadrati ad quadratum, puta 4 N. erit productus 4 Q. qui detractus à quolibet ipſorum, relinquet 1 N. − 4 Q. & 4 N. − 4 Q. æquales quadrati, & quia Numerorum numeri ſunt plani ſimiles, ducatur denominator rationis eorum, in minorem vt Numeri æquentur, fient ergo 4 N. − 16 Q. & 4 N. − 4 Q. æquandi quadratis, horum interuallum eſt 12 Q. quare ſumendi ſunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiant 12 Q. & horum ſummæ ſemiſſis quadratus æquabitur maiori, vel interualli ſemiſſis quadratus æquabitur minori, ſunto hi 2 N. & 6 N. erit ſummæ ſemiſſis quadratus 16 Q. æqualis 4 N. − 4 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt ergo numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{2}$. horum productus $\frac{3}{4}$ detractus ab ipſis numeris relinquit quadratos quæſitos $\frac{1}{4}$ & $\frac{9}{4}$. Quod ſi cui forte modus iſte vtendi duplicata æqualitate obſcurior videbitur, legat quæ adnotauimus ad quadrageſimam tertiam quarti, vbi fuſius à nobis explicatur.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν ἐν τάξῃ ἕνα τῶν τετραγώνων δυνάμεως μιᾶς, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα, ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος δύναμις ā. δεῖσει ἄρα τοῦτον προσλαβόντα ἑκάτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ ζητῆσαι τὸν τετράγωνον προσλαβὼν μονάδα ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ τετράγωνος ὃν θέλω ἀφ' ὑπ' αὐτῶν, δύναμις μία ἐὰν ἄρα δεῖ προσλάβῃ μονάδα μίαν. γίνεται δύναμις μία, μονὰς μία τοῦτον δεῖσει ἴσον εἶναι τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ ā. λείψει μ̄ β̄. ἔδει ἴσας δυνάμεις καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̄. ᾱ ἔσται ὁ μὲν ἐνὶ σ̄, ὁ δὲ ις̄ ᾱ συμβαίνει τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλάβοντα ἓν μονάδα ποιεῖν τετράγωνον. δεῖσει ἄρα καὶ τὸν ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δύτερον ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἐστὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ὃν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐν δυνάμει; τυτὶ δυνάμεις ϟ ις̄ μονάδες ϟ ις̄. καὶ πάντα ἐκκαιδεκάκις. δυνάμεις ἄρα θ̄. μονάδες θ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ γ̄ λείψει μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα τετράγωνος ἴσαι δυνάμεσι θ̄ μ̄ ις̄ λείψει ὡς κδ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ιε̄ ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τκδ̄. ρκε̄. ὁ δὲ δεύτερος μϟ ρκε̄. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione adſcito alterutro faciat quadratum. Si ergo poſuero vnum quadratorum 1 Q. alterum vero 1. erit productus eorum multiplicatione quadratus 1 Q. Oportet igitur hunc adſcito vtroque facere quadratum. Quamobrem res eo deducta eſt vt quæramus qui quadratus adiecta vnitate faciat quadratum. Ponatur quadratus quem volo eſſe productum multiplicationis 1 Q. ſi ergo is adſumat vnitatem, fit 1 Q. + 1. hunc oportet æquari quadrato. Formo quadratum à latere 1 N. − 2. hic æqualis erit 1 Q. + 1. & fit 1. N. $\frac{1}{2}$. eſt ergo alter $\frac{3}{2}$. alter $\frac{1}{2}$. & accidit productum multiplicatione illorum adſumpta vnitate fieri quadratum. Oportet ergo eundem productum adſumpto altero fieri quadratum. Et quandoquidem productus ille eſt $\frac{1}{2}$. Ponatur nunc in quadrato, nimirum $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$. & omnia ſedecies. Igitur 9 Q. + 9. æquantur quadrato. Formo quadratum à latere 3 N. − 4. ipſe igitur quadratus erit 9 Q. + 16 − 24 N. & fit 1 N. $\frac{7}{4}$. Erit ergo primus $\frac{24}{7}$. ſecundus $\frac{25}{7}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XXIX.

OBSCVRE loquitur Diophantus, nec tamen à Scholiaſta vel à Xilandro ſatis explicatur. Itaque nos huic quæſtioni ſic lucem afferemus.

Poſito altero quadratorum 1 Q. ponitur alter ad libitum, puta 1 quorum producto, ſi ipſi ſigillatim addantur, fient tum 2 Q. tum 1 Q. + 1. æquandi quadratis, quæ duplicata æqualitas inexplicabilis eſt. Quamobrem poſito primo 1 Q. ſecundus non eſt ad libitum ponendus, ſed vt ſaltem vni propoſiti parti ſatisfiat per ipſas poſitiones, talis deligendus eſt ſecundus vt ductus in 1 Q. & producto addendo 1 Q. fiat quadratus. Quia verò primus eſt 1 Q. & vnitas non immutat numerum quem multiplicat, patet eò nos reduci, vt inueniamus quadratum, cui addendo 1. fiat quadratus. Id ergo fiet per aliam operationem, hoc pacto. Statuatur quæſitus quadratus 1 Q. is adſcita vnitate fiet 1

1 Q. + 1 æquandus quadrato, cuius latus modo in superioribus quæstionibus sæpe vsitato fingetur ab 1. N. + tot vnitatibus quarum quadratus superet 1. Fingit illud Diophantus 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{3}{4}$ quæsitus quadratus $\frac{9}{16}$. Itaque ad propositam quæstionem redeuntes ponamus primum 1 Q. secundum $\frac{9}{16}$. Sic enim productus $\frac{9}{16}$ Q. adsumpto primo facit quadratum $\frac{81}{256}$ Q. Restat igitur vt idem productus adsumpto secundo quadratum faciat, facit autem $\frac{9}{16}$ Q. + $\frac{9}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Sed ad vitandas fractiones, omnia per eundem quadratum 16. multiplicantur, & fit 9 Q. + 9 æquandus quadrato. Nec immutatur per hanc multiplicationem æqualitatis ratio, quia enim quadrato per quadratum multiplicato seu diuiso, semper fit quadratus, patet si 9 Q. + 9. æquetur quadrato, & eius partem decimam sextam, quadratum fore, & è conuerso. Huius igitur latus finganius à 3 N. − tot vnitatibus quarum quadratus superet 9. puta à 3 N. −4. fiet 1 N. $\frac{24}{7}$ & solutio est manifesta. Hinc formatur Canon.

Cape duos quadratos quadratum simul conficientes, altero per alterum diuiso, fiet alter quæsitorum. Tum diuisum quadratum aufer à tertio alio quouis quadrato, residui quadratus diuisus per quadruplum producti ex tertio eodem quadrato in quadratum initiò diuisum, alterum exhibebit.

Verbi gratia. Cape quadratos 16. & 9. fiet alter quæsitorum $\frac{9}{16}$. Tum aufer 16. à quouis alio quadrato 36. restat 20. cuius quadratum 400. diuide per quadruplum producti ex 16. in 36. nimirum per 2304. fiet alter quæsitorum $\frac{25}{144}$.

Diuersitas autem tum operationis, tum solutionis è triplici capite oriri potest.

Primò enim vtriusque numeri positione eadem manente, primo scilicet posito 1 Q. & secundo $\frac{9}{16}$ vltimi numeri quadrato æquandi, nimirum ipsius 9 Q. + 9. latus diuersimodè fingi potest, videlicet 3 N. −4. vel 3 N. − 6. & sic in infinitum.

Secundo. Quamuis primus maneat 1 Q. potest secundus aliter atque aliter poni cùm inueniri possint infiniti quadrati diuersi ab ipso $\frac{9}{16}$ qui adsumpta vnitate quadratum faciant, quales sunt $\frac{25}{144}$ $\frac{81}{400}$ &c.

Denique primus quoque numerus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 4 Q. 9 Q. 16 Q. &c. Sed tunc pro secundo sumendus erit quadratus aliquis numerus, quo ducto in primum & producto addendo ipsum primum, quadratus fiat. Vnde prius soluenda erit huiusmodi quæstio.

Dato quadrato, alium inuenire, vt productus horum multiplicatione adsciscens datum quadratum, faciat quadratum.

Datus esto 4. Quæsitus quadratus ponatur 1 Q. horum productus est 4. Q. qui adscito 4. facit 4 Q. + 4. quadrato æquandum, cuius latus esto 2 N. −3. fiet 1 N $\frac{7}{4}$. & est quæsitus quadratus $\frac{49}{144}$. quo ducto in 4. & producto addendo 4. fit quadratus $\frac{625}{144}$ à latere $\frac{25}{12}$. Hinc, si libet, facilem elicies Canonem.

Datum quadratum aufer à quolibet quadrato, & per quadruplum producti horum quadratorum diuide residui illius quadratum, vel è conuerso. Vtroque modo orietur quæsitus quadratus.

Vt in hypothesi aufer 4. à 9. & residui 5. quadratum 25. diuide per quadruplum producti ex 4. in 9. nimirum per 144. fiet quæsitus quadratus $\frac{25}{144}$. vel diuide 144. per 25. fiet etiam quæsitus quadratus $\frac{144}{25}$. Nam hîc semper duplex contingit solutio.

Hac præmissa quæstione soluetur Diophantæum problema, hoc pacto. Ponatur primus 4 Q. secundus $\frac{9}{16}$ sic enim satisfit vni parti postulati. Restat vt productus horum multiplicatione, nimirum $\frac{36}{16}$. adscito secundo faciat quadratum, facit autem $\frac{324}{16}$. Q. + $\frac{36}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato, & omnia ducendo in 144. tum diuidendo per 25. fiunt 4 Q. + 1. æquales quadrato, cuius latus esto 2 N −3. & fiet 1 N. $\frac{4}{1}$. erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{4}{9}$ & $\frac{324}{144}$.

QVÆSTIO XXX.

INVENIRE duos numeros quadratos, vt productus eorum multiplicatione dempto alterutro faciat quadratum. Et si posuero primum 1 Q. alterum 1. erit productus eorum multiplicatione 1 Q. Oportet ergo illum dempta vnitate fieri quadratum, est autem 1 Q. quadratus. Eò itaque redacti sumus, vt quæramus quis quadratus dempta vnitate remaneat quadratus. Est autem huiusmodi

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμὺς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει ἑκατέρῳ ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξω τὸν μὲν πρῶτον δύναμιν μίαν, τὸν δὲ ἕτερον μονάδα μίαν. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν δύναμις μία. δεήσει δὴ αὐτῶν λείψει μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον, καὶ ἔστιν ἡ δύναμις τετράγωνος. ἀπῆκται δὴ εἰς τὸ ζητῆσαι τὶς τετράγωνος λείψει μονάδος μιᾶς. ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω ὁ τετράγωνος ὁ κε. ἔσται δὲ λείψει τῷ ἀ μονάδος ις. ποιεῖ τε-

τράγωνον τὸν Γ. ἔστω οὖν τὸν μὲν δύναμιν μίαν, τὸν δὲ κϛ. καὶ ὑπ' αὐτῶν λείψει δυνάμεως μιᾶς ποιεῖ τετράγωνον. δεῖ οὖν ἅμα εἶναι τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψει μ' κϛ. ἴσον τῷ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψει μ' κϛ. γίνεται δὲ κϛ λείψει μ' κϛ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πάντα ἐκκαιδεκάκις. τὸ πλάσω τὸν τετράγωνον. ἔστω ς α λείψει μ' δ'. αὐτὸς ἄρα ἔσται δύναμις α μονάδες ις λείψει ις ιϛ. ἴσος δὲ κϛ λείψει υ' κϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ. ὁ δὲ δοθεὶς ρ ἐστί. καὶ πόθεν τὰ τῆς προβλήματος.

quadratus $\frac{25}{16}$. Hic enim demptis $\frac{25}{16}$ relinquit quadratum $\frac{1}{16}$. Pono igitur alterum 1 Q. alterum $\frac{25}{16}$. & productus multiplicationis dempto 1 Q. relinquit quadratum. Superest vt idem productus demptis $\frac{25}{16}$ sit æqualis quadrato. Sed productus demptis $\frac{25}{16}$ fit $\frac{1}{16}$ Q. $-\frac{25}{16}$. Hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per sedecim multiplicentur, tum diuidantur per 25. fit 1 Q. $-$ 1. æquandus quadrato. Formo quadratum ab 1 N. $-$ 4. Ipse igitur est 1 Q. $+$ 16. $-$ 8 N. æqualis 1 Q. $-$ 1. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erit ergo primus $\frac{3}{4}$. secundus $\frac{5}{4}$. & satisfaciunt postulatis.

IN QVAESTIONEM XXX.

EXTREMA verba huius propositionis, in Græco monstrosè depravata sunt, vt ex ipsa æquatione manifestum fit, qua numeri 25 Q. $-$ 25. latus fingitur 1 N. $-$ 4. vnde comingit 1 Q. $+$ 16 $-$ 8 N. æquari 25 Q. $-$ 25. & in complexam æquationem deuenitur cùm tandem 41. maneat æqualis 24 Q. $+$ 8 N. & fit solutio irrationalis. Quare nescio quomodo sibi persuadere potuerit Scholiastes hanc esse mentem Diophanti. Nam quod ipse ait valorem Quadrati esse 1. atque adeo 24 Q. idem esse atque 24. sunt meræ nugæ, & puerilius etiam nugatur Xilander, cùm mirificam appellat rationem hanc inueniendæ simplicis æquationis. Si enim 1 Q. est 1. nonne etiam 1 N. debuit esse? non autem $\frac{1}{2}$. Si verò modus iste quo vtitur Scholiastes admittendus est, nonne licet etiam ponere latus quadrati 1 N. $-$ 2. & æquare 1 Q. $-$ 4 N. $+$ 4. numero 25 Q. $-$ 25? Sed hac ratione tandem 29. æquatur 24 Q. $+$ 4 N. Quod si, vt somniat Scholiastes 1 Q. est 1. & 24. Q. sunt 24. fiet valor Numeri $\frac{1}{2}$ eritque alter quæsitorum quadratorum $\frac{25}{4}$ alter rursus $\frac{25}{9}$ qui nequaquam satisfaciunt postulatis, & sic aliis infinitis exemplis pronum est ostendere futilem esse hanc operandi rationem. Nec mihi obiiciat aliquis, valorem Numeri à Scholiaste inuentum nempe $\frac{1}{2}$ satisfacere propositis; nam ex falso verum inferri potest, & ex vno aut altero exemplo non ritè colligitur regula generalis. Falsitatis etiam manifestè arguitur hæc æquatio, ex eo quod per valorem numeri resoluendo hypostasen 1 Q. $-$ 8 N. $+$ 16. non reperitur æqualis 25 Q. $-$ 25. Nam 1. Q. $-$ 8 N. $+$ 16. fit $\frac{121}{4}$. At 25 Q. $-$ 25 fit $\frac{225}{4}$. Valeat ergo ridiculum Scholiastæ commentum, quo non calceus ad pedem, sed pes ad calceum accomodatur.

Porrò tribus modis corrigi potest textus Diophanti. Primo numeri 25 Q. $-$ 25. ponendo latus non 1 N $-$ 4. Sed 5 N. $-$ 1 vnde fiet 1 N. $\frac{1}{2}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{1}{16}$ & $\frac{25}{16}$. Qua ratione numeri solutionis omnes mutandi erunt. Secundò concipiendo Diophantum, numerum $\frac{25}{16}$ Q. $-$ $\frac{25}{16}$ priùs multiplicare per 16. vnde fit 25 Q. $-$ 25. & hunc deinde diuidere per $\frac{25}{16}$ vnde fit 16 Q. $-$ 16. æquandus quadrato, cuius latus fingitur non 1 N. $-$ 4. Sed 4 N. $-$ 1 & fit 1 N. $\frac{5}{4}$ & solutionis numeri non mutantur. Denique, quod maximè mihi arridet, & mea in versione sequutus sum, dici potest Diophantum nõn solùm multiplicare per 16. numerum $\frac{25}{16}$ Q. $-$ $\frac{25}{16}$ vnde fit 25 Q. $-$ 25. Sed hunc præterea diuidere per 25. vnde fit tandem 1 Q. $-$ 1. æquandus quadrato, quod familiare Diophanto est, vt in minimis numeris facilior sit operatio; & vt iam monuimus quadratus per quadratum multiplicatus & diuisus, quadratus manet. Tum numeri 1 Q. $+$ 1 latus fingit 1 N. $-$ 4. & omnia optimè cohærent, & solutionis numeri omnes congruunt. Non ausus sum tamen in textu Græco tantam inducere mutationem, sed satis habui verba depravata asteriscis includere, quæ si quis velit ex nostra versione corrigere, id ita commodè fiet. Πάντα ἐκκαιδεκάκις, καὶ ἔσται τὸ κϛ. γίνεται δὲ α λείψει μονάδος α ἴση τετραγώνῳ, πλάσω τὸν τετράγωνον. ἔστω ς α λείψει μ' δ'. αὐτὸς ἄρα ἔσται δύναμις α'. μονάδες ις λείψει ις ιϛ. ἴσος δὲ α. λείψει μονάδες α'. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιζ.

Variari autem potest operatio & solutio, totidem modis, quot ad præcedentem explicauimus, & pari ratione dato quadrato, inuenietur alius, vt productus eorum mutuo ductu multatus dato quadrato, relinquat quadratum. Et tandem ex operatione Diophanti elicietur huiusmodi Canon.

Cupe quadratum ex duobus quadratis compositum, cui adiice alium quemuis quadratum, summa quadratum diuide per quadruplum producti quadratorum simul additorum; orietur alter quæsitorum, alterum habebis si diuidas quadratum initio sumptum per vtrumlibet eorum ex quibus componitur.

Verbi gratia cape 25. compoſitum ex 9. & 16. cui adde quadratum 1. fit 26. cuius quadratum 676. diuide per 100. qui fit ex 1 in 25. quater, fiet alter quæſitorum $\frac{676}{625}$. Alter vero eſt $\frac{24}{25}$ vel $\frac{4}{5}$. Nam hic ſemper duplex contingit ſolutio.

Cæterum hic deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos quadratos, vt vterque multatus producto multiplicationis eorum quadratum relinquat.

Ponatur alter 1 Q. alter quadratus aliquis, qui ab vnitate detractus relinquat quadratum, puta $\frac{3}{5}$. ſic enim productus $\frac{3}{5}$ Q. detractus ab 1 Q. relinquit quadratum $\frac{16}{25}$ Q. Reſtat vt idem productus detractus à $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{9}{25}$ relinquat quadratum. Relinquit autem $\frac{9}{25}$ — $\frac{6}{25}$ Q. Hoc ergo æquatur quadrato Omnia per 25. multiplicentur fit 9 — 9 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 — 4 N. fit 1 N. $\frac{24}{25}$. Eſt ergo primus $\frac{24}{25}$. ſecundus $\frac{4}{5}$. & ſoluunt quæſtionem. Hinc fit iſte Canon.

Cape duos quadratos quadratum conficientes, horum alterum diuide per eorum summam, fiet alter quæſitorum. Eundem quadratum diuiſum adde cuilibet tertio quadrato, & per aggregati quadratum diuide quadruplum producti ex mutuo ductu quadratorum ſimul additorum, fiet alter quæſitorum.

Verbi gratia cape 9. & 16. & alterum 9. diuide per ſummam 25. fiet alter quæſitorum $\frac{9}{25}$. Tum eidem 9. adde alium quadratum 4. fiet 13. per huius quadratum 169. diuide quod fit ex 4. in 9. quater, nimirum 144. fiet alter quæſitorum $\frac{144}{169}$.

QVÆSTIO XXXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione ſumma illorum ſiue addita, ſiue detracta quadratum faciat. Iam cùm duorum quorumlibet numerorum quadrati ſimul iuncti, ſiue detracto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciant, exponamus duos numeros 2. & 3 & patet quod ſumma quadratorum ab ipſis addito duplo producti multiplicationis facit quadratum 25. Et rurſus ab eadem ſumma quadratorum detracto eodem duplo producti multiplicationis relinquitur quadratus 1. Pono ergo productum ab iis 13 Q. Ipſorum alterum 1 N. alterum 13 N. & fit ex eorum multiplicatione 13 Q. Atqui 13 Q. ſiue additis ſiue detractis 12 Q. faciunt quadratum. Oportet ergo 12 Q. æquari ſummæ amborum. Sed amborum ſumma eſt 14 N. Igitur 12. Q. æquantur 14 N. & fit 1 N. $\frac{12}{14}$. ſeu $\frac{6}{7}$. erat itaque primus 1 N. erit ergo $\frac{6}{7}$. Ad ſecundus qui erat 13 N. erit iam $\frac{78}{7}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἵνα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐπὶ τὸ προσλαβὲν συναμφότερον, ἐπὶ τὸ λεῖπον ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ παύτων δύο ἀριθμῶν οἱ ἀπ' αὐτῶν συνθέντες, ἐπί τι προσλάβωσι τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἐπί τε λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτιθέμθα δύο ἀριθμοὺς τὸν β̄ καὶ τὸν γ̄ ὧν δηλον ὡς ἡ συνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μετὰ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν συναγουσα ποιεῖ τετράγωνον μονάδας ιγ̄. καὶ πάλιν ὑπὸ δ συνθέσεως τὸ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθὲν τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν καταλείπει τετράγωνος ἡ μονάς. τάττω οὖν τὸ ὑπ' αὐτῶν δυναμις ιγ̄ τετάχθω οὖν ὁ μὲν ᾱ ἀὸς. ὁ δὲ ἀριθμὸς ιγ̄. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν δυνάμις ιγ̄. δυνάμις ἄρα ιγ̄ ἐπί τ' προσλάβωσι δυνάμεις ιβ̄. ἐπί τ' λείπωσι, ποιοῦσι τετράγωνοι. δέησει ἄρα δύναμις ιβ̄ ἴσας εἶναι συναμφοτέρῳ. ἀλλὰ συναμφοτέρος ὅρισται ᾱ ᾱ δυνάμεις ἄρα ιβ̄. ἴσαι εἰσὶν ᾱ ᾱ ιδ̄. καὶ γίνεται ἀριθμὸς ιδ̄ ιε̄. πυτίου ζ̄ ε̄. ἔστιν οὖν ὁ μὲν πρῶτος ᾱ ἀὸς. ἔσαι ζ̄ ε̄. ὁ δ' δεύτερος ᾱ ιγ̄. ἔστω ϛᾱ ε̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod aſſumit Diophantus, nil aliud continet quàm quod oſtenſum eſt quarta ſecundi Euclidis, & quarta ſecundi poriſmatum. Nam altera illarum propoſitionum demonſtratur duplum producti additum ſummæ quadratorum, efficere quadratum ſummæ numerorum; altera verò concluditur duplum producti detractum à ſumma quadratorum, relinquere quadratum interualli numerorum. Cæterùm tota operationis & ſolutionis varietas pendet à duplici capite. Primò enim loco 2. & 3. ſumi poſſunt alij duo quilibet numeri, & aggregatum quadratorum ab ipſis ſtatui pro producto multiplicationis; & duplum producti, pro ſumma ipſorum numerorum. Vt

ſi ſumas 2. & 4. Pones productum multiplicationis 20. Q. ſummam numerorum 16 Q. Secundo, manente eadem primâ poſitione, ipſi numeri variè poni poſſunt, vt in hypotheſi Diophanti poſito producto 13 Q & ſumma 12 Q. Ipſi numeri poni poſſunt duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 13 Q. author ad vitandas fractiones poſuit 1 N. 13. N. ſed poni poſſent 2 N. & 6 ½ N. vel 3. N. & 4 ½ N. & ſic in infinitum. At poſito producto 20 Q. poni poterunt ipſi numeri 2 N. & 10 N. vel 4 N. & 5 N. vel duo quilibet alij numeri quorum mutuo ductu fiant 20 Q. Canon quoque hunc facilè formabitur, ſed parum in eo erit compendij ſimili quoque artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, vt ſumma eorum, producto multiplicationis ſiue addito, ſiue dempto quadratum faciat.

Ponatur ſumma 13 Q. productum 12 Q. ipſi vero numeri 1 N. & 12 N. fiet ergo ſumma 13 N. æqualis 13 Q. & fit 1 N. 1. ſuntque quæſiti numeri 1 & 12.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἑαυτῷ προσλάβῃ συναμφότερον, ἐφ' ᾧ τι λείψῃ, ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ δὲ ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὧν ὁ ἑτέρος τὸν ἑτέρου ἅξει διπλασίονα, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν δὶς τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἀπ' αὐτῶν συνιστάμενοι ἑαυτοῖς λείπουσι τὸν δὶς ἀπ' αὐτῶν. ἑαυτοῖς προσλάβωσι, ποιοῦσι τετράγωνον. ἐκτιθέμεθα τὸν δ. καὶ τὸν β. καὶ δὶς μὲν ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον τὸν ις. καὶ ἡ συνθεσις ἡ ἀπ' αὐτῶν κ. ἑαυτοῖς προσλάβῃ ἢ ις ἑαυτὸν λείπῃ ποιεῖ τετράγωνον τὸν τε λς καὶ τὸν δ. τετάχθωσαν δὲ οἱ δυνάμει. καὶ ἔστω ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν δυνάμεις α. ὁ δὲ συναμφοτέρῳ δυνάμεις ις. ἔσται ἄρα ὁ μέν, ως β, ὁ δὲ ως ι. συναμφοτέρῳ ἄρα ως ιβ. ἀλλὰ καὶ δυνάμεις ις. δυνάμεις ἄρα ις. ἴσαι ως ιβ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸν. ιβ. πεντάκις ἄρα ε. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ς. ὁ δὲ δεύτερος λ. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

INVENIRE duos numeros æquales quadrato, vt productus eorum multiplicatione ſiue addita, ſiue dempta amborum ſumma quadratum faciat. Quoniam ſi ſint duo numeri in dupla ratione, & duplum producti multiplicationis eorum, quadratus eſt, & ſumma quadratorum ab ipſis, ſiue addito, ſiue detracto duplo producti quadratum facit, exponamus 4. & 2. & patet quod duplum producti eorum facit quadratum 16. & ſumma quadratorum ab ipſis puta 20. ſiue addito 16. ſiue dempto facit quadratos 36. & 4. Ponantur ergo in quadrato. & eſto productum multiplicationis 20 Q. ſumma verò numerorum 16. Q. ſit autem alter 2 N. alter 10 N. ergo vterque ſimul 12 N. ſed & 16. Q. Proinde 16 Q. æquantur 12 N. & fit 1 N. ¾. hoc eſt ¼. eritque primus ¼. ſecundus ¾. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVÆSTIONEM XXXII.

LEMMA hìc aſſumptum idem ferè eſt cum illo quod in præcedente explicatum eſt, cui tamen ſuperaddit, expoſitos numeros debere eſſe in ratione dupla, vt duplum producti eorum ſit quadratus numerus, cuius rei ratio euidens eſt, quia ducere numerum aliquem bis in ſuum duplum, idem eſt atque ducere eundem numerum in ſuum quadruplum; At numeri in ratione quadrupla ſunt plani ſimiles. Quare patet ex eorum mutuo ductu fieri quadratum. Variari autem poteſt operatio & ſolutio totidem modis, quot & præcedentis, & eaſdem ob cauſas vt manifeſtum eſt. 1. noni.

Cæterùm etiam aliter operari poſſumus, hac arte. Sumantur duo numeri qui ſint latera circa rectum trianguli rectanguli, ſeu quorum quadrati ſimul quadratum conficiant, quod fiet per tertiam tertij poriſmatum, ſintque hi 3. & 4. Eritque ſumma quadratorum 25. duplum producti 24. Et ſtatuantur in Quadratis, ponaturque productum 25 Q. ſumma numerorum 24 Q. Ipſi verò numeri 1 N. & 25 N. vel alij duo quilibet quorum mutuo ductu fiant 25 Q. erit ergo ſumma 26 N. æqualis 24 Q. & fit 1 N. $\frac{24}{26}$. ſuntque quæſiti numeri $\frac{24}{26}$ & $\frac{24}{26}$.

Hìc etiam deſiderari videtur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire duos numeros, æquales quadrato, vt ſumma eorum, producto multiplicationis ſiue addito ſiue dempto, quadratum faciat.

Ponatur ſumma numerorum 25 Q. productum 24 Q. ipſi verò numeri ſtatuatur duo quilibet, quorum mutuo ductu fiant 24 Q. puta 4 N. & 6 N. fiet ſumma 10 N. æqualis 25. Q. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. ſunt ergo quæſiti numeri $\frac{5}{2}$. & $\frac{15}{2}$.

Cæterùm huc quoque pertinere videtur talis quæſtio.

Inuenire quadratum cui ſiue addatur, ſiue adimatur ſuum latus, fiat quadratus.

Ponatur quæſitus quadratus 25 Q. latus illius 24 Q. igitur 24 Q. æquantur 5 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Eſt ergo quæſitus quadratus $\frac{625}{176}$.

Eodem artificio reperietur quadratus, cui addendo & adimendo ſuum latus quoties quis iuſſerit, fiat quadratus. Vt ſi quæratur quadratus, cui addendo & adimendo quater ſuum latus, fiat quadratus. Ponatur quæſitus quadratus 25 Q. Tum ipſius 24. ſumpto quadrante, ſtatuatur latus 6 Q. Nam eius quadruplum 24 Q. additum vel ademptum ipſi 25 Q. quadratum facit. Igitur 6 Q. æquantur 5 N. fitque 1 N. $\frac{1}{6}$. Eſt ergo quæſitus quadratus $\frac{625}{576}$.

QVÆSTIO XXXIII.

INVENIRE tres numeros, vt cuiuſuis illorum quadratus adſcito proximè ſubſequente numero, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. & quoniam ſi numerus numeri duplus fuerit, & adhuc vnitate maior, quadratus minoris adſcito maiore facit quadratum, ponatur ſecundus primi duplus & vnitate maior, erit itaque 2 N. + 1. Rurſumque tertius huius duplus & vnitate maior, erit vtique 4 N. + 3. & accidit quadratum primi adſcito ſecundo fieri quadratum 1 Q. + 2. N. + & ſimiliter ſecundi quadratum adſumpto tertio facere quadratum 4 Q. + 8 N. + 4. Oportet ergo & tertij quadratum adiecto primo facere quadratum. Sed tertij quadratus adiecto primo facit 16 Q. + 25 N. + 9. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 4 N. − 4. Ipſe igitur erit 16 Q. + 16. − 32 N. & fit 1 N. $\frac{7}{17}$. Erit ergo primus $\frac{7}{17}$. ſecundus $\frac{31}{17}$. tertius $\frac{225}{17}$. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ς̄ α. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ ὁ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων· καὶ ἔσται διπλασίων ς̄ β̄ μονάδος μιᾶς. ἔτι ὁ τρίτος τοῦ δευτέρου διπλασίων, καὶ μονάδι μείζων, καὶ ἔσται ς̄ δ̄. μ̄ γ̄. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον, γίνεσθαι τετράγωνον δυνάμεως μιᾶς ς̄ β̄ μονάδος μιᾶς. καὶ ὁμοίως τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου προσλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον δ̄ δ̄ ς̄ η̄ μ̄ δ̄. δέδεικται ἄρα καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ δ̄ κ̄ ς̄ ρ̄ καὶ μ̄ δ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσαι τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ δ̄ λείψει μ̄ δ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δυνάμεις ῑε̄. μονάδες κ̄ε̄ λείψει ς̄ λβ̄ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ ιε̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ζ ιε̄. ὁ δὲ δεύτερος οα̅ ιε̄. ὁ τρίτος ρκδ̄. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

LEMMA Diophanti prorſus idem eſt cum decima octaua propoſitione primi poriſmatum, vt euidens eſt. Operatio & ſolutio dupliciter variari poteſt. Primò enim ipſi numeri poni poſſunt ad libitum, dum ſequens contineat ſemper duplum præcedentis vnitate auctum, ita primo poſito 2 N. ponetur ſecundus 4 N. + 1. tertius 8 N. + 3. & ſic in infinitum. vel etiam primo poſito 1 N. + 1. erit ſecundus 2 N. + 3. tertius 4 N. + 7. &c. Deinde vltimi numeri quadrato æquandi latus diuerſimodè fingi poteſt, vt in hypotheſi Diophanti, numeri 16 Q. + 25 N. + 9. latus fingi poteſt 4 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus ſuperet 9. vt 4 N. − 4. 4 N. − 5. 4 N. − 6. &c. Immo in eadem hypotheſi quia numerus vnitatum 9. quadratus eſt, poſſet idem latus fingi 3 − quotlibet Numeris, quorum quadratus ſuperet 16 puta 3 − 5 N. 3 − 6 N. &c.

QVÆSTIO XXXIV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λείψει τῷ ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ᾖ διπλασίων ἑνὶ μονάδι ὁ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τετράγωνος λείψει τὸν μείζονος ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ς̄ ἑνὸς μ̄ α̃. ὁ δὲ δεύτερος ἔσται ὁμοίως ις̄ β̃. μ̄ α̃. ὁ δὲ τρίτον ς̄ δ̄ μ̄ α̃. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον τῷ δευτέρῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἔτι ὁ ἀπὸ τοῦ δευτέρου λείψει τὸν τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ τρίτου λείψει τῷ πρώτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνος λείψει τὸν πρώτου, ποιεῖ δυνάμεις ις̄ ς̄ μ̄ ζ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ πλάσω ὃν τετράγωνον ἀπὸ ἑξ ῆ̄ δυνάμεις ἄρα κ̄ ἴσαι δυνάμεσι ις̄ ἀριθμοῖς ζ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ῑ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ις̄ ρ̄ ῑ. ὁ δὲ δεύτερος κθ̄ ρ̄ ῑ. ὁ δὲ τρίτος λζ̄ ρ̄ ῑ. καὶ μέρει τὰ τῆς προτάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt cuiuſuis quadratus detracto proximè ſequente numero, faciat quadratum. Quandoquidem ſi numerus numeri duplo vnitate minor ſit, quadratus minoris dempto quadrato maioris, facit quadratum: ſtatuo primum 1 N. + 1. ſecundum 2 N. + 1. Tertium ſimiliter 4 N. + 1. & accidit quadratum primi dempto ſecundo facere quadratum, & adhuc quadratum ſecundi dempto tertio facere quadratum. Reſtat vt & tertij quadratus dempto primo quadratum faciat. Sed tertij quadratus dempto primo facit 16 Q. + 7 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Formo quadratum à 5 N. Proinde 25 Q. æquantur 16 Q. + 7 N. & fit 1 N. $\frac{7}{9}$. Erit igitur primus $\frac{130}{81}$. ſecundus $\frac{32}{9}$. tertius $\frac{193}{81}$. & conſtat propoſitum.

IN QVÆSTIONEM XXXIV.

LEMMA quod aſſumit Diophantus nil aliud dicit, quàm quod oſtenſum eſt propoſitione decima nona primi poriſmatum. Operatio & ſolutio totidem modis variari poteſt, quot & præcedentis, vt diutius immorandum non ſit in re manifeſta.

QVÆSTIO XXXV.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν προσλαβὼν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀριθμὸς ἀπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, καὶ λάβωμεν καθ' ὃν μετρῆται, καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τοῦ μετροῦντος, καὶ καθ' ὃν μετρεῖ, ἀφέλωμεν τὸν ἐλάττονα, ὁ ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ λοιποῦ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἐξ ἀρχῆς ποιεῖ τετράγωνον. τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἀπὸ δυνάμεων τινῶν ἐχουσῶν μετροῦντας τρεῖς. ἔστω δὲ ιβ̄. μετρεῖ γὰρ αὐτὸν μονὰς ᾱ καὶ τὸν ιβ̄ ἡ μονὰς β̄ καὶ τὸν ς̄. καὶ μονὰς γ̄. καὶ ἡ δ̄. καὶ ἐὰν ἀφέλω τὸν μετροῦντα ἀπὸ τοῦ καθ' ὃν μετρεῖ, καὶ τῶν λοιπῶν λάβω τὰ ἥμισυ. τάσσω τοὺς τρεῖς, τὸν μὲν πρῶτον μ̄ α̃ καὶ ἥμισυ. τὸν δὲ δεύτερον μ̄ β̄ τὸν δὲ τρίτον μ̄ τὸ ἥμισυ. ἔτι δῆλον ὡς ὁ ἀπὸ ἑκάστου τούτων τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ιβ̄. ποιεῖ

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus adſcita ſumma omnium faciat quadratum. Quandoquidem ſi numerus numerum metiatur, & ſumamus eum per quem metitur; & duorum (metientis ſcilicet, & eius per quem metitur) minorem de maiore auferamus, reſidui ſemiſſis quadratus adſumpto propoſito initio ad metiendum numero, quadratum facit. Pono ſummam quidem trium aliquem quadratorum numerum, qui habeat tres ipſum metientes. Eſto itaque 12. Nam ipſum metitur vnitas per 12. & 2. per 6. & 3. per 4. & ſi detraxero metientem ab eo per quem metitur, & reſiduorum ſemiſſes ſumpſero; Ponam tres numeros primum quidem 5 $\frac{1}{2}$. ſecundum verò 2. tertium autem $\frac{1}{2}$. & patet horum vniuſcuiuſque quadratum

dratum adſcito 12. facere quadratum, nimirum 12 ½ & 16. & 42. ½. Statuo igitur illos in numero primum 5 ½ N. ſecundum 2 N. tertium ½ N. Oportet autem trium ſummam æqualem eſſe 12 Q. ſed trium ſumma eſt 8 N. Proinde 8 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. ½ ſeu ½. Erit ergo primus 7 ½ ſecundus ½. tertius ½ & conſtat propoſitum.

τετράγωνον. ὧν μὲν ιβ̄ καὶ ᾱ δ̄ ͵. ἐν ᾗ ις̄ ὧν δὲ μβ̄. ᾱ δ̄ ͵. Τάσσω οὖν αὐτοὺς ἐν ἀριθμῷ τ̄ μὲν πρῶτον ις̄ ᾱ ℔ ἥμισυ. τὸν ᾗ δεύτερον ις̄ β̄. τὸν δὲ τρίτον ῑ ἥμίσεως. δεῖ δὴ τ̄ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν ἴσον εἶναι δυνάμεσι ιβ̄. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμοὶ εἰσὶν η̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄ ἴσοι δυνάμεσι ιβ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς η̄ ις̄ ἴσοι δ̄ ᾱ ͵. ἴσοι ὁ μὲν πρῶτος κβ̄ ᾱ ͵. ὁ ᾗ δεύτερος η ᾱ ͵. ὁ δὲ τρίτος β̄ ᾱ ͵. καὶ μένει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXV.

LEMMA Diophanti coincidit prorſus cum quinta ſecundi Euclidis, vel cum ſecunda ſecundi poriſmatum. Solutionis varietas à duplici pendet capite. Primò enim ſumma numerorum poni poteſt non ſolùm 12 Q. ſed & quilibet alius quadratorum numerus. Deinde poſita eadem ſumma 12 Q. ipſi numeri diuerſimodè poni poſſunt, prout ſumentur ſemiſſes interuallorum duorum quorumlibet numerorum, quorum mutuo ductu fiat 12. Nam quod metientes ſumendos eſſe ait Diophantus, id facit facilitatis gratia, ad vitandas fractionum moleſtias. Cæterùm quinta ſecundi cui innititur hæc operatio, abſtrahit à numeris integris, & à fractis, vt liquet ex ipſius demonſtratione.

Hic ſi placet formabis huiuſmodi Canonem.

Sume quemlibet numerum, tum cape ter duos numeros, quorum mutuo ductu is fiat, interuallorum ſemiſſes ſimul additos diuide per ſumptum numerum, quotientem ducito ſigillatim in eoſdem ſemiſſes, fient quæſiti numeri.

Verbi gratia ſume 48. qui fit tum ex 2. in 24 tum ex 4 in 12. tum ex 6 in 8. interuallorum ſemiſſes ſunt 11. 4. 1. quorum ſumma 16. qua diuiſa per 48. fit ⅓ quo ducto ſigillatim in ipſos 11. 4. 1. fiunt quæſiti numeri 3⅔ 1⅓ ⅓.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE tres numeros, vt vniuſcuiuſque quadratus, multatus ſumma omnium, faciat quadratum. Pono ſimiliter aliquem numerum qui tres ipſum metientes habeat. Eſto rurſus 12. additoque metiente ad eum per quem metitur, & ſemiſſe ſummæ capto, ſtatuo tres numeros, primum 6 ½ N. ſecundum 4 N. tertium 3 ½ N. & contingit horum vniuſcuiuſque quadratum demptis 12 Q. facere quadratum. Supereſt vt trium ſumma ſit æqualis 12 Q. ſed tres ſimul iuncti faciunt 14 N. Igitur 14 N. æquantur 12 Q. & fit 1 N. ⅞. Erit ergo primus 7 ½ ¼. ſecundus 3 ½. tertius 1 ½ ¼. & ſatisfaciunt quæſtioni.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος λειπόν τ̄ συγκείμενον ἐκ τ̄ τριῶν πάντη τετράγωνον. τάσσω ὁμοίως ἀριθμόν τινα ὃς μετροῦντας ἔχει τρεῖς. ἔστω πάλιν τὸν ιβ̄. καὶ προσθεὶς τὸν μετροῦντα τῷ καθ' ὃν μετρεῖ, ℔ ἥμισυ λαβών, τάσσω τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς, τὸν μὲν ις̄ ᾱ ℔ καὶ ἥμισυ. τὸν ᾗ ἀριθμὸν δ̄. τὸν δὲ ις̄ γ̄ καὶ ἥμισυ. καὶ συμβαίνει τ̄ ἀπὸ ἑκάστου τετράγωνον λιπεῖν δυνάμεις ιβ̄ πιεῖν τετράγωνον. λειπὸν δεῖ τοὺς ζητουμένους ἴσους εἶναι δυνάμεσι ιβ̄. ἀλλ' οἱ ζητούμενοι συμπάντες ποιοῦσιν ις̄ δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα δ̄ ἴσοι εἰσὶ δυνάμεσι ιβ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ᾱ ͵. ἴσαι ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ᾱ ͵ ℔ ἥμισυ ὁ δὲ δεύτερος κη̄ ᾱ ͵. ὁ δὲ τρίτος κδ̄ ᾱ ͵ καὶ ἥμισυ. καὶ ποιοῦσι τὰ τ̄ προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

LEMMA hic aſſumptum iiſdem innititur fundamentis, quibus & lemma præcedentis, vt manifeſtum eſt. ſolutio quoque totidem modis variari poteſt. Et ex ipſa operatione formabitur huiuſmodi Canon.

Sume quemlibet numerum , tum capere duos numeros , quorum mutuo ductu is fiat , aggregatorum semisses simul additos dimide per sumptum numerum , quotientem ducito sigillatim in eosdem semisses , fiant quæsiti numeri.

Verbi gratia , sume 48. qui fit tum ex 2. in 24. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 8. 7. quorum summa 28. qua diuisa per 48. fit $\frac{7}{12}$ quo ducto sigillatim in ipsos 13. 8. 7. fiunt quæsiti numeri $\frac{91}{12}$. $\frac{14}{12}$. $\frac{49}{12}$.

Cæterum Diophantus more Græcorum vtendo fractionibus fractionum. Primum quidem exhibuit $\frac{13}{1}$. $\frac{1}{2}$. id est $\frac{13}{2}$. & dimidium $\frac{1}{4}$. hoc est $\frac{13}{8}$. Tertium verò $\frac{7}{1}$ $\frac{1}{2}$. id est $\frac{7}{2}$. & dimidium $\frac{1}{4}$. seu $\frac{7}{8}$.

Patet autem eodem prorsus artificio , & hanc & præcedentem ad quotlibet numeros extendi posse , quod vnico exemplo docuisse sufficiet. Quæruntur quatuor numeri , vt vniuscuiusque quadratus multatus summa omnium , quadratus remaneat. Vtendo Canone allato , sumatur 48. qui fit ex 2. in 24. tum ex 3. in 16. tum ex 4. in 12. tum ex 6. in 8. Aggregatorum semisses sunt 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8. 7. quorum summa 37. $\frac{1}{2}$. qua diuisa per 48. fit $\frac{75}{96}$. quo ducto sigillatim in ipsos 13. 9. $\frac{1}{2}$. 8 & 7. & omnibus ad eandem reductis denominationem , fiunt quæsiti numeri $\frac{975}{96}$. $\frac{675}{96}$. $\frac{600}{96}$. $\frac{525}{96}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER TERTIVS.

LYON

QVÆSTIO I.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque eorum quadratus à summa trium numerorum detractus, faciat quadratum. Expone duos quadratos, alterum ab 1 N. alterum à 2 N. & fit summa quadratorum ab ipsis 5 Q. Pono ergo summam trium numerorum 5 Q. & quæsitorum primum 1 N. secundum verò 2 N. Ita duabus propositi partibus est satisfactum. Et quoniam habemus 5. qui diuiditur in duos quadratos, nimirum 1. & 4. diuidatur idem rursus, vt supra demonstratum est, in alios duos, quadratos, videlicet in $\frac{4}{41}$. & $\frac{400}{41}$. Pono igitur tertium latus vnius horum, puta $\frac{1}{1}$ N. & enim illius quadratus à summa omnium detractus facit quadratum $\frac{441}{41}$. Q. supereſt vt tres simul æquentur 5 Q. sed tres simul efficiunt $3\frac{1}{1}$ N. Igitur 1 N. fit $\frac{41}{441}$. Erit ergo primus $\frac{41}{441}$. secundus $\frac{82}{441}$. tertius $\frac{41}{441}$. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ληφθεὶς ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν τριῶν ποιῇ τετράγωνον. ἀνατίθου δύο τετραγώνους, τὸν μὲν ἀπὸ ς̄ ἁπλᾶ. τὸν δὲ ἀπὸ ις̄ β̄. ἕ γίνονται οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι δ̄ ᾱ. τάσσω τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν δ̄ ᾱ. καὶ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν, τὸν μὲν πρῶτον ς̄ ἁπλᾶ, τὸν δὲ δεύτερον ις̄ β̄. καὶ ἔστι δύο τετράγωνα λελυμένα. καὶ ἐπεὶ ἕκαστον τῶν ᾱ. διαιρούμενον εἰς δύο τετραγώνους τινὰ τε μονάδα ἕ τινὰ τετράδα, ἵνα μὴ τὸ διελεῖν αὐτὸν ὡς πρόδηλόν ἐστιν εἰς ἕτερους δύο τετραγώνους εἰς τε δ̄ ͵αυκᾱ. καὶ ρκα ͵αυκᾱ. τάσσω τῶν τ̄ τρίτην τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τεύπων. ἔστω β ͵αυκᾱ ἀριθμεῖ καὶ μέρει πάλιν ὁ ἀπ' αὐτοῦ ληφθεὶς ἀπὸ συναμφοτέρων ποιῶν τετράγωνον τ̄ ρκα ͵αυκᾱ. διήρηται τὰς ξεῖς λοιπὸν ἴσους εἶναι δυνάμει ῑ. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσιν ις̄ γ̄. καὶ β ͵αυκᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς πε ͵αυκᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ρο ͵αυκᾱ. ὁ δὲ τρίτος λδ̄ ͵αυκᾱ. ἕ ποιῶν τὰ τῆς προτάσεως.

In III. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est. Numerus ex duobus quadratis compositus, puta 5. rursus diuiditur in alios duos quadratos per decimam secund. Vnde patet hanc quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Etenim quærantur quatuor Numeri, vt cuiuslibet eorum quadratus à summa numerorum demptus, relinquat quadratum. Ponatur summa 5 Q. Primus verò 1 N. secundus 2 N. Diuisoque 5. rursus in duos alios quadratos, quorum latera $\frac{2}{1}$ & $\frac{11}{1}$ ponatur tertius $\frac{1}{1}$ N. Quartus $\frac{11}{1}$ N. erit summa omnium $5\frac{1}{1}$ N. æqualis 5 Q. & fit 1 N. $\frac{11}{11}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{11}{121}$. $\frac{220}{121}$. $\frac{121}{121}$. $\frac{1210}{121}$. Diuersitas porrò operationis & solutionis è duplici capite oritur. Primò enim summa numerorum poni potest, quilibet quadratorum numerus ex duobus quadratis compositus, puta 10 Q. 13 Q. 17 Q. &c. Deinde manente eadem summa numerorum

puta 5 Q. possunt ipsi numeri poni diuersimodè, prout 5. diuidetur in alios atque alios quadratos. Hinc etiam elicietur Canon vniuersalissimus.

Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, quem rursus diuide toties in duos alios quadratos, donec habeas tot quadratorum latera, quot petuntur numeri. Horum laterum summam diuide per numerum unitate sumptum, quotientem ducito sigillatim in ipsa latera, fient quæsiti numeri.

Vt si petantur 4. numeri. Sume 65. quem diuide bis in duos quadratos, erunt horum latera 1. 8. 4. 7. quorum summa 20. qua diuisa per 65. fit $\frac{4}{13}$. quo ducto sigillatim in supradicta latera, fiunt quæsiti numeri $\frac{4}{13}$ $\frac{32}{13}$ $\frac{16}{13}$ $\frac{28}{13}$.

QVÆSTIO II.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῆς τριάδος τετράγωνον προσλαβὼν ἕκαστον αὐτῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῆς τριῶν ἀ^{ος} α. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον δ^{α} τριῶν. τὸν δὲ δεύτερον δ^{α} η̄. τὸν δὲ τρίτον δ^{α} ιε̄. ἵνα ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῆς τριῶν τουτέστιν ἡ δύναμις μία προσλαβοῦσα ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. ὁ μὲν δ^{α} ἀ. ὁ δὲ δ^{α} θ. ὁ δὲ δ^{α} ιϛ̄. καὶ λύσεως τοὺς τρεῖς συναριθμοὺς ἴσους γίνεσθαι τῇ πλευρᾷ τοῦ τριῶν, τουτέστι ς^{ῳ} ἑνός. ἀλλ' οἱ τρεῖς συναριθμοῦντες ποιοῦσι δ^{α} κϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α̅ ᾱ^{ος} ἵστι ὁ μὲν πρῶτος γ̅ χ^{οι} ὁ δὲ δεύτερος η̅ χ^{ος}. ὁ δὲ τρίτος ιε̅ χ^{ος}. καὶ ποιεῖ τὸ προβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus summæ ipsorum, quouis ipsorum adiuncto quadratum faciat. Ponatur quadratus summæ trium numerorum 1 Q. Tunc statuam primum 3 Q. secundum 8 Q. tertium 15 Q. vt quadratus summæ trium, nimirum 1 Q. adscito quolibet ipsorum faciat quadratum, hunc quidem 4 Q. illum verò 9. Q. illum denique 16 Q. Oportet autem & tres coniunctos æquari lateri quadrati summæ omnium, hoc est 1 N. sed tres coniuncti efficiunt 26 Q. fit igitur 1 N. $\frac{1}{26}$ erit ergo primus $\frac{3}{26}$ secundus $\frac{8}{26}$ tertius $\frac{15}{26}$ & soluunt quæstionem.

IN QVÆSTIONEM II.

HIc etiam duplici de causa variari potest & operatio & solutio. Primò enim quadratus summæ numerorum statui potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c. Deinde quadrato summæ manente eodem, ipsi numeri ponentur diuersimodè, prout quadratus summæ auferetur à diuersis quadratis, & residua ponentur pro quæsitis numeris. Sic posito quadrato summæ 1 Q. poni possunt ipsi numeri, non solùm vt fecit Diophantus 3 Q. 8. Q. 15 Q. sed etiam 24 Q. 35 Q. 48. Q. & sic in infinitum. Vnde patet eadem arte quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Et hinc quoque formatur Canon vniuersalis.

Sume quemlibet quadratum, quem aufer a totidem quadratis, quot petuntur numeri, per summam residuorum diuide latus sumpti ab initio quadrati, quotientis quadratum ducito sigillatim in ipsa eadem residua, fient quæsiti numeri.

QVÆSTIO III.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῆς τριῶν γ̅ ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῆς τριῶν ξ̄ δ^{α}. ὁ δὲ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος δ^{α} ις̄. ὧν λείψεις δ^{ναμεις} ζ̄. καὶ δ^{ναμις} μβ̄. καὶ δ^{ναμις} ιε̄ τοιεῖ τετράγωνον. τάσσω οὖν τὸν μὲν πρῶτον δ^{ναμις} ζ̄ τὸν δὲ δεύτερον δ^{ναμις} μβ̄. τὸν δὲ τρίτον δ^{α} ιε̄. λοιπὸν ἔσται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ἴσος τοῖς τετραῖς. ἀλλ' ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ὑπάρχει ις̄ δ^{α}. οἱ δὲ τρεῖς εἰσὶ δ^{α} χδ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς β̄ ῑϛ̄. ἡ δὲ δύναμις

INVENIRE tres numeros, vt eorum summæ quadratus, quouis ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur summa trium 4 N. erit illius quadratus 16 Q. qui detractis tum 7 Q. tum 12 Q. tum 15 Q. facit quadratum. Statuo ergo primum 7 Q. secundum 12 Q. tertium 15 Q. Reliquum est compositum ex tribus æquari summæ illorum. Sed summa trium posita est 4 N. Compositus autem ex tribus est 34 Q. Proinde fit 1 N. $\frac{4}{34}$. Quadratus $\frac{16}{34}$ erit ergo primus $\frac{112}{34}$ se-

cundus $\frac{41}{119}$. tertius $\frac{40}{119}$. & soluunt quæstionem.

δ^ος. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κη^ος. ὁ δὲ δεύτερος μη^ος. ὁ δὲ τρίτος ξ. ^ος. καὶ ποιῶσι τὸ προβλημα.

QVÆSTIO IV.

INVENIRE tres numeros, vt quadratus compositi ex tribus, detractus a quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur, compositus ex tribus 1 N. Quadratus autem illius 1 Q. & sunto tres numeri; hic quidem 2 Q. ille verò 5 Q. tertius 10. Q. Nam horum quilibet detracto quadrato compositi ex tribus, hoc est 1 Q. facit quadratum. Et quia quadratus compositi ex tribus, latus habet, patet hoc esse compositum ex tribus. Summa igitur trium est 1 N. sed est quoque 17 Q. Fit igitur 1 N. $\frac{1}{17}$. quadratus $\frac{1}{289}$. eritque primus $\frac{2}{289}$. secundus $\frac{5}{289}$. tertius $\frac{10}{289}$. & satisfaciunt quæstioni.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τετράγωνος λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν ς^α ἀνός. ὁ ἄρα ἀπὸ τούτου τετράγωνος δ^ος α. καὶ ἔστωσαν οἱ τρεῖς ὁ μὲν δ^ος β. ὁ δὲ δ^ος ι. ὁ δὲ δ^ος ι. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν λείψας ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τριῶν τουτέστι τὸν δ^ος α. ποιῶν τετράγωνον, ἐπεὶ ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τεσσάρων πλευρὰν ἔχει, δῆλον. ὅτι ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τεσσάρων. ἡ ἄρα συνθεσις τῶν τεσσάρων ἐστὶν ς^α ἀνός, ἀλλὰ καὶ δωδεκάκις ιζ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς α ιζ ἡ δὲ δύναμις α ^ος. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος β ^ος. ὁ δὲ δεύτερος ι ^ος. ὁ δὲ τρίτος ι ^ος. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONES III. ET IV.

NVLLA in his difficultas. Eadem ferè hîc dici possunt, quæ ad duas præcedentes sunt adnotata, & Canones eadem facilitate formabuntur. Cæterùm his quatuor quæstionibus idem agit Diophantus in tribus numeris, quod fecit in duobus, libro secundo quæstionibus 23. 24. 25. 26. vnde etiam colligere licet huiusmodi quæstiones ad quotlibet numeros eadem arte extendi.

QVÆSTIO V.

INVENIRE tres numeros, quadrato æquales, quorum bini reliquum superent quadrato numero. Ponantur tres simul æquales quadrato ab 1 N. + 1. hoc est 1 Q. + 2 N. + 1. Quorum primus & secundus superent tertium vnitate. Erit ergo tertius $\frac{1}{2}$ Q. + 1 N. sic enim primus & secundus superabunt illum vnitate. Rursus secundus & tertius superent primum quadrato, nimirum 1 Q. erit similiter primus 1 N. + $\frac{1}{2}$. Reliquum ergo habemus secundum $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$. superest vt primus & tertius superent secundum quadrato numero. Sed quo primus & tertius superant secundum sunt 2 N. Hoc ergo æquatur quadrato, puta 16. & fit 1 N. 8. erit igitur primus 8 $\frac{1}{2}$. secundus 32 $\frac{1}{2}$. tertius 40 & satisfaciunt proposito.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι, τὸν λοιπὸν ὑπερέχωσι τετραγώνῳ. Τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ ἀπὸ ς^α ᾱ μ^α ᾱ. τουτέστι δ^ος ᾱ ις β μ^α ᾱ. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος τὸν τρίτου ὑπερέχουσαν μ^α ᾱ. ὁ ἄρα τρίτος ἔσται δ^ος ἡμίσεως ς^α ᾱ. ἵνα καὶ ὁ δεύτερος ὑπερέχωσι τοῦ τρίτου τῇ μ^α. πάλιν ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος τὸν πρώτου ὑπερέχουσι τετραγώνῳ. ὑπερεχέτωσαν δ^ος ᾱ. ἔσται ὁμοίως ὁ πρῶτος ς^α ᾱ μ^α ἡμίσεος. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν δεύτερον ἔχομεν δωδεκάκις ἡμίσεος μ^α ἡμίσεος. λοιπὸν δεῖ τὸν πρῶτον μῆ τοῦ τρίτου ὑπερέχειν τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ πρῶτος μῆ τοῦ τρίτου τοῦ μὲν δευτέρου ὑπερέχει ις β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, τουτέστι μ^α κς. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^α ιη. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^α ιη καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ δεύτερος μ^α λβ καὶ ἡμίσεος. ὁ δὲ τρίτος μ^α μ. καὶ ποιῶσι τὰ τῆς ὑποθέσεως.

IN QVAESTIONEM V.

QVOD supponit hîc Diophantus, tale est.

Datis tribus numeris, si interuallum quo duo ex illis superant tertium auferatur à summa trium numerorum, remanet duplum tertij.

Hoc ipsum verò iam demonstratum est ad decimam octauam primi. Dupliciter autem variari possunt tam operatio quàm solutio. Primo enim quadratus qui ponitur pro summa trium numerorum fingi potest non solùm à latere 1 N. + 1. sed à quotcunque Numeris + quotcunque vnitatibus. Deinde interuallum primi & tertij supra secundum, quod in hypothesi Diophantæa reperitur 2 N. potest æquari cuilibet vnitatum numero quadrato, vt manifestum est.

QVAESTIO VI.

Ἄλλως.

ΖΗΤΩ τρεῖς τετραγώνους ἀριθμοὺς τετραγώνους, ἵνα τὸ τετράγωνον. ἐὰν δὲ συνθῶ β τετραγώνους οἷον τὸν δ ϛ θ. ϛ ζητήσω τὸν τετράγωνον τροσλαβὼν τὸν ιγ. ποιεῖ τετράγωνον. εὑρήσω τὸν λϛ. καὶ ἔσονται οἱ τρεῖς τετράγωνοι ἴσοι ἑνὶ τετραγώνῳ. λοιπὸν ἅπτεται ἵνα τὸ ζητῆσαι εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως συνὼ δύο τῷ λοιπῷ ὑπερέχωσι δοθέντι ἀριθμῷ, ὁ μὲν πρῶτος μὲν τοῦ δευτέρου, τοῦ τρίτου, μ̄ δ. ὁ δὲ δεύτερος μὲν τοῦ τρίτου, τοῦ πρώτου, μ̄ ϛ ὁ δὲ τρίτος μὲν τοῦ πρώτου, τοῦ δευτέρου μονάδες λϛ. τοῦτο δὲ προδέδεικται καὶ ἔστι ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ϛ καὶ ἡμίσυ θ. ὁ δὲ τρίτος μονάδων κβ καὶ ἡμίσυ θ. καὶ πᾶσι τὰ τῆς προτάσεως.

Aliter.

QVÆRO primùm tres numeros quadratos æquales quadrato. Si autem duos quadratos composuero, vt 4. & 9. & quæsiuero quis quadratus adscito 13. faciat quadratum, inueniam 36. & erunt tres quadrati æquales vni quadrato. Restat vt quæramus tres numeros, vt bini iuncti reliquum superent dato numero, primus scilicet & secundus, tertium superent vnitatibus 4. secundus & tertius primum excedant vnitatibus 9. tertius & primus secundo superaddant vnitates 36. Hoc autem supra demonstratum est. Et est primus 20. secundus $6\frac{1}{2}$. tertius $22\frac{1}{2}$. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM VI.

DVO supponit Diophantus. Primum reperiri posse tres quadratos, quadratum simul conficientes, quod quidem facilè fit auxilio vndecimæ secundi. Nam sumptis duobus quibuslibet quadratis puta 4. & 9. quorum summa 13. Iam quæro per vndecimam secundi duos quadratos quorum interuallum sit 13. & horum minor 36. est tertius quæsitus. Secundò supponit author tres excessus binorum suprà reliquum, æquari summæ ipsorum numerorum, quod iam à nobis est demonstratum ad decimam octauam primi. Porrò tum ex hac operatione, tum ex Canone decimæ octauæ primi eruitur huiusmodi Canon.

Sume tres quadratos quadratum conficientes, ab eorum summa aufer sigillatim vnumquemque ipsorum, residuorum semisses erunt quæsiti numeri.

Sed & non vulgari artificio quæstio extendetur ad quatuor numeros, & sic proponetur.

Inuenire quatuor numeros quadrato æquales, quorum terni reliquum superent quadrato numero.

Ponatur summa numerorum quilibet numerus quadratus, puta 4. Quia ergo vt ostensum est ad vigesimam primi, summa excessuum dupla est summæ numerorum, erit excessuum summa 8. Restat ergo vt 8. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 4. Id autem facilè fiet si 4. diuidatur bis in duos quadratos per octauam secundi, eruntque hi $\frac{16}{17}$ $\frac{64}{17}$ $\frac{49}{17}$ $\frac{1}{17}$. Itaque applicando hîc Canonem vigesimæ primi, hoc est à semisse excessuum qui est 4. auferendo singulos excessus, & residuorum capiendo semisses, fient quæsiti numeri $\frac{12}{17}$ $\frac{52}{17}$ $\frac{45}{17}$ $\frac{9}{17}$. sic licebit quæstionem ad quotlibet numeros extendere, sed aliquando vtendum erit artificio quo duodecima quinti vtitur Diophantus. Vt si quærantur quinque numeri quadrato æquales, quorum quaterni reliquum superent quadrato numero. Quare quæstionis huius explicationem reiicimus in decimam septimam quinti, vbi commodius afferetur.

QVÆSTIO VII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt bini iuncti faciant quadratum. Statuantur tres simul æquales quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. & esto primus cum secundo 1 Q. relinquetur ergo tertius 2 N. + 1. Esto autem secundus cum tertio 1 Q. + 1 + 2 N. à latere 1 N. + 1. Et quia tres simul sunt 1 Q. + 2 N. + 1. relinquetur vtique primus 4 N. sed primus cum secundo positus est 1 Q. erit igitur secundus 1 Q. − 4 N. Oportet itaque & primum tertio iunctum, nempe 6 N. + 1. æquari quadrato. Sit ergo is 121. & fit 1 N. 20. erit igitur primus 80. secundus 320. tertius 41. & solvunt quæstionem.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ, ἵνα σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθωσαν οἱ τρεῖς ἴσοι τετραγώνῳ δ^ος ᾱ, ὧν β̄ μ^ας ᾱ καὶ ἔστω, ὁ πρῶτος μὲν τῷ δευτέρῳ, δ^ος ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ις̄ β̄ μ^αι ᾱ. ἔστω ἡ ϛ̄ ὁ δεύτερος μὲν τῷ τρίτῳ, δ^ος ᾱ μ^ας ᾱ ⌐ ις̄ β̄. ὅπου πλάσεως ϛ̄ μᾶλλον λείψει μ^ας ᾱ. καὶ εἰσὶν οἱ ις̄ δ^ος ᾱ ις̄ β̄ μ^αι ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ις̄ δ̄. ἀλλὰ καὶ σὺν τῷ δευτέρῳ τ(ε)ί(ε)ᾳ δ^ος ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται δ^ος ᾱ λείψει ις̄ δ̄. διπλῆ ἄρα καὶ ὁ πρῶτος μὲν τῷ τρίτου συναμφότερον ις̄ ϛ̄ μ^αι ᾱ. ἰσάσω τετραγώνῳ. ἔστω ἴσος μ^αι ρκᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^α κ̄. ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος κ^ος π̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^ος τκ̄. ὁ δὲ τρίτος μ^ος μᾱ. καὶ ποιοῦσι τὸ ὑπ' αὐτά.

QVÆSTIO VIII.

Aliter.

ΑΛΛΩΣ.

PONANTVR tres simul 1 Q. + 2 N. + 1. & sint primus & secundus 1 Q. relinquitur ergo tertius 2 N. + 1. Esto rursus secundus cum tertio 1 Q. + 1. − 2 N. horum ergo tertius cùm sit 2 N. + 1. relinquitur secundus 1 Q. − 4 N. est autem & primus cum secundo 1 Q. quorum secundus est 1 Q. − 4 N. Relinquitur ergo primus 4 N. & tres coniuncti faciunt imperatum quadratum 1 Q. + 2. N. + 1. & primus cum secundo, itemque secundus cum tertio faciunt quadratum. Oportet itaque & tertium cum primo iunctum, nimirum 6 N. + 1. æquari quadrato. Esto quadrato 36. & fit 1 N. $\frac{4}{6}$. Erit ergo primus $\frac{4}{6}$. hoc est $\frac{2}{3}$. secundus $\frac{4}{36}$. tertius $\frac{12}{36}$. & solvunt quæstionem.

ΤΕΤΑΧΘΩΣΑΝ οἱ τρεῖς δ^ος ᾱ ις̄ β̄ μ^αι ᾱ. ⁘ ἔστω ὁ πρῶτος κ^ος δ^ος ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ις̄ β̄ μ^αι ᾱ. ἔστω ἡ κ^ος ὁ δεύτερος μ^ος τοῦ τρίτου δ^ος ᾱ μ^αι ᾱ λείψει ις̄ β̄. ὧν ὁ τρίτος ις̄ β̄ μ^αι ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ^ος ᾱ λείψει ις̄ δ̄. ὅθεν ἡ κ^ος ὁ πρῶτος μ^ος τοῦ δευτέρου δ^ος ᾱ. ὧν ὁ δεύτερος δ^ος ᾱ λείψει ις̄ δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ις̄ δ̄. ⁘ οἱ τρεῖς συντιθέντες ποιοῦσι τὸν ὑποτεθέντα τετράγωνον δ^ος ᾱ ις̄ β̄ μ^αι ᾱ. καὶ ὁ πρῶτος μὲν τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ δεύτερος μὲν τοῦ τρίτου ποιοῦσι τετράγωνον. διπλῆ ἄρα καὶ τὸν τρίτον μὲν τὸν πρώτου συναμφότερον ις̄ ϛ̄ μ^αι ᾱ. ἰσοῦσαι τετραγώνῳ. ἔστω μ^α λϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς λϛ̄ ⌐ ιβ̄. ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος ρμβ̄ ⌐ ιβ̄. τουτέστιν ωμβ̄ λϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος τπβ̄ λϛ̄. ὁ δὲ τρίτος υιϛ̄ λϛ̄. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVÆSTIONES VII. ET VIII.

INTER has duas propositiones nulla omninò vel perexigua est differentia; eadem fermè est operatio aliter atque aliter explicata. Diuersitas in eo consistit, quod in septima inuenta prius tertij numeri hypostasi, inuenit deinde hypostasim primi, vnde elicit hypostasim secundi. At in octaua inuento prius tertio, inde elicit secundum, atque inde primum. Eodem tamen recidit vtraque operatio, vt manifestum est. Itaque vt omnia explicentur dilucidè, & varietas omnis tum operationis tum solutionis perfectè comprehendatur.

Aduerte primò, vt benè monet Xilander, pro quadrato quem tres numeri simul constituunt statui posse quemlibet quadratum, cuius latus constet ex quolibet Numerorum numero + quot-

libet vnitatibus. Posuit Diophantus latus illius 1 N. + 1. sed poni poterat 1 N. + 2. vel 1 N. + 3. &c. vel etiam 2 N. + 1. 2 N. + 2. 2 N. + 3. &c.

Aduerte secundò pro summa secundi & tertij statui posse quadratum quemlibet minorem quadrato, qui positus est pro summa trium numerorum. Sic Diophantus posita summa trium 1 Q. Q. + 2 N. + 1. posuit summam secundi & tertij 1 Q. − 2 N. + 1. sed si ponatur summa trium 1 Q. + 4 N. + 4. poni poterit summa secundi & tertij 1 Q. + 2 N. + 1. vel etiam 1 Q. − 2 N. + 1. vel 1 Q. − 4 N. + 4. & sic in infinitum.

Aduerte tertiò summam primi & tertij quæ quadrato æquanda manet, æquari debere tali quadrato, vt inde auferendo vnitates quæ continentur in eadem summa, & diuidendo residuum per numerum Numerorum eiusdem summæ, prodeat quotiens maior numero Numerorum, qui reperiuntur cum signo defectus in hypostasi secundi numeri. vt in hypotesi Diophantæa, vbi summa primi & tertij 6 N. + 1. est æquanda quadrato, quia hypostasis secundi est 1 Q. − 4 N. Oportet inuenire quadratum qui vnitate multatus, & diuisus per 6. det quotientem maiorem quàm 4. Id autem vt arte certa consequamur. Ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. vnde ablata vnitate, fiet 1 Q. − 1. quo diuiso per 6 fiet $\frac{1}{6}$ Q. − $\frac{1}{6}$. maior quàm 4. & supplendo defectum, fiet $\frac{1}{6}$ Q. maior quàm 4 $\frac{1}{6}$ & omnia per 6. multiplicando fiet 1 Q. maior quàm 25. Quamobrem æquabimus 6 N. + 1. cuilibet quadrato maiori quàm 25. In prima operatione Diophantus æquauit 6 N. + 1. quadrato 121. In secunda verò, quadrato 36. Eodemque artificio reperietur terminus suprà quem consistere debet talis quadratus, si primæ positiones aliter instituantur.

Potro ex operatione Diophanti elicio satis artificiosum Canonem.

Cape duos quadratos quorum ratio sit maior quàm 25. ad 1. horum interualli bessis continet primum quæsitorum; Quem si auferas à quadrato quotientis qui fit diuidendo idem interuallum per sextuplum minoris lateris, orietur secundus. Denique si eiusdem interualli trienti addas minorem quadratum, fiet tertius.

Verbi gratia cape quadratos 121. & 1. horum interuallum est 120. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 80. primus numerus. Tum diuide 120. per 6. sextuplum minoris lateris fiet 20. cuius quadratus 400. vnde auferendo 80. fit 320. secundus numerus. Denique trienti ipsius 120. qui est 40. adde minorem quadratum 1. fiet 41. tertius numerus. sunt ergo tres quæsiti numeri 80. 320. 41.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως συνὶ δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον ξεῖς ἀριθμὸς τετραγώνους, ἵνα ὧσιν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὧν τὸ ἥμισυ τῆς συνθέσεως τῷ τελείῳ μείζον ᾖ ἐν ἑκάστῳ. τετάχθω οὖν ὁ μὲν πρῶτος δυνάμεις ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος δυ ᾱ ις β μ ᾱ. καὶ ἔστιν αὐτῶν ἡ ὑπεροχὴ ις β μ ᾱ. ἐὰν δὲ προσθῶ τῷ δευτέρῳ τὰς ις β μ ᾱ. γίνεται ὁ τρίτος δυ ᾱ ις δ μ β. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς ᾱ. λείπει μ η. γίνεται ὁ τετράγωνος δυ ᾱ μ ξδ. λείπει ις ιϛ. ἴσος δυ ᾱ ις δ μ β. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ξβ ι. τουτέστι λᾶ ι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος πξᾶ. ὁ δὲ δεύτερος αχπᾶ. ὁ δὲ τρίτος βυᾶ. καὶ ποιῶσι τὸ πρόβλημα τὸ ζητούμενον. τουτέστι ξεῖς τετράγωνοι ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ᾧ ἐστι τῷ τελείῳ τὸ ἥμισυ μεῖζον ἑκάστου αὐτῶν. νῦν ἔρχομαι δεῖξαι τὸ προβεβλημένον, τουτέστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὅπως συνὶ δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τρεῖς τετραγώνους ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, τοῦτο δὲ προδείκται, καὶ εἰσὶν οἱ τετράγωνοι

INVENIRE tres numeros in æquali interuallo, vt bini iuncti quadratum efficiant. Quæro primùm tres quadratos numeros æqualibus interuallis distantes, quorum summæ semissis maior sit quouis ipsorum. Ponatur igitur primus 1 Q. secundus autem 1 Q. + 2 N. + 1. & est ipsorum interuallum 2 N. + 1. si autem addidero secundo 2 N. + 1. fiet tertius 1 Q. + 4 N. + 2. Hæc æquantur quadrato à latere 1 N. − 8. fitque quadratus 1 Q. + 64 − 16 N. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fit 1 N. $\frac{62}{20}$. hoc est $\frac{31}{10}$. Erit ergo primus 961. secundus 1681. tertius denique 2401. & satisfaciunt proposito, sunt enim tres quadrati æquali interuallo distantes, & semissis summæ illorum, quouis ipsorum est maior. Venio nunc ad id quod quæritur, scilicet quo pacto tres numeri inueniantur eodem interuallo se superantes, quorum bini coniuncti quadratum faciant. Primùm quæro tres quadratos in æquali interuallo, vti iam demonstratum est, & sunt huiusmodi quadrati.

Primus

Primus 961. ſecundus 1681. tertius 2401. inueniendum iam eſt quomodo primus & ſecundus facere poſſint 961. ſecundus & tertius 2401. nam ob interualli æqualitatem inuertitur ordo, tertius & primus 1681. Statuatur trium ſumma 1 N. Cùm ergo tres ſimul ſint 1 N. ſi inde detraxero ſummam primi & ſecundi nimirum 961. habebo tertium 1 N. — 961. & rurſus ſi ab 1 N. abſtulero ſummam ſecundi & tertij, nempe 1401. habebo primum 1 N. — 2401. ſi autem ab 1 N. dempſero ſummam tertij & primi, nimirum 1681. habebo ſecundum 1 N. — 1681. Reſtat vt tres ſimul iuncti æquales ſint 1 N. & fit 1. N. 25 21. ÷ & factum eſt quod imperabatur.

ὁ πρῶτος πξᾱ. ὁ δεύτερος αχπα, ὁ τρίτος ϛυᾱ. ἰὺν δεῖ εὑρεῖν ὅπως ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος ποιῶσι μ̄ πξᾱ. ὁ δὲ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ϛυα. ἐπήλλαχται γὰρ διὰ τὴν ἴσην ὑπεροχήν. ὁ ἄρα τρίτος, καὶ ὁ πρῶτος μ̄. αχπᾱ. πεπλάσθωσαν οἱ τρεῖς ς̄ ἰνὸς, ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσιν ς̄ ἰνός, ἐὰν ἀφ' ἑαυτοῦ ἀφέλω τὰς τῆ πρώτου καὶ δευτέρου μ̄ πξᾱ. ἔξω ἄρα τρίτον ς̄ ᾱ μ̄ πξα. καὶ πάλιν ἐὰν ς̄ ἰνὸς, ἀφέλω τὰς τῆ δευτέρου καὶ τρίτου μονάδας ϛυᾱ. ἔξω τὸν πρῶτον ς̄ ᾱ λείψει μ̄, ϛυᾱ. ἐὰν δὲ ς̄ ἰνὸς ἀφέλω τὰς τῆ τρίτου καὶ τ πρώτου μονάδας αχπᾱ. ἔξω τὸν δεύτερον ς̄ ᾱ, λείψει μ̄ αχπᾱ. λοιπὸν ὅτι τὰς ζῆς συντεθέντας ἴσους ἔχει ᾱεικωᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἰσοπλευρὸς βφκᾱ καὶ ἥμισυ. καὶ μένει τὸ ἐπίταγμα.

IN QVAESTIONEM IX.

HIc multa obſeruanda ſunt quæ minimè attigit Xilander, ſine quibus operatio Diophanti nequit perfectè intelligi.

Primò, quærit tres quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quorum ſummæ ſemiſſis maior ſit quolibet ipſorum, quia vult vt quæſiti numeri bini & bini conſtituant huiuſmodi quadratos. Id autem fieri non poteſt, niſi trium quadratorum ſummæ ſemiſſis quolibet ipſorum ſit maior, vt demonſtratum eſt ad decimam ſextam primi, ad quam tandem reducitur hæc quæſtio, vt liquet ex vltima operatione quæ prorſus eadem eſt cum operatione decimæ ſextæ primi. vnde etiam vti poſſes Canone ibidem tradito.

Secundò, ſumit huiuſmodi quadratos æqualibus interuallis diſtantes, quia inde ſequitur ipſos tres numeros quæſitos, qui bini hos quadratos conſtituunt, diſtare etiam inter ſe interuallis æqualibus, vt poſtulat quæſtio. Quod pendet à tali propoſitione.

Si fuerint tres numeri, qui bini conſtituant ſummas æqualibus interuallis diſtantes, & ipſi numeri æqualibus diſtabunt interuallis, & è conuerſo.

A 2. B 5. C 8. D 7. E 10. F 13.

Sint tres A B C. quorum A B ſimul faciant D. At A C ſimul componant E, & B C. ſimul conſtituant F. ſintque D E F. æqualibus diſtantes interuallis. Dico & ipſos A B C. æqualibus interuallis diſtare, imò iiſdem prorſus quibus diſtant ipſi D E F. Etenim quia idem A. additus vtrique B & C. facit D & E. erit idem interuallum inter D & E. quod eſt inter B & C. (nam idem numerus duobus inæqualibus additus, ſummas facit eodem interuallo inæquales.) Similiter quia idem C. additus vtrique A & B. componit ipſos E & F. erit eandem ob cauſam, idem interuallum ipſorum E F. quod eſt ipſorum A B. Quare conſtat propoſitum. vnde etiam innoteſcit inuerſio illa ordinis de qua loquitur Diophantus, nam primus & ſecundus conſtituunt D. At ſecundus & tertius faciunt F. Ac demum tertius & primus componunt E. Quare & ipſe in quadratis inuentis ordinem inuertit, vult enim primum quadratum eſſe ſummam primi & ſecundi numeri. At tertium quadratum eſſe ſummam ſecundi & tertij numeri. Ac demum ſecundum quadratum eſſe ſummam tertij & primi numeri.

Tertiò numeri quadrato æquandi 1 Q. + 4 N. + 2. latus fingit Diophantus 1 N. — 8. tali arte vt reſoluendo hypoſtaſes per valorem Numeri, fiant quadrati quæſiti quales poſtulantur, nimirum vt quilibet ipſorum, minor ſit ſemiſſe ſummæ eorumdem. Id autem quomodo certa ſcientia conſequi poſſimus non ſtatim apparet. Et Xilander quidem experiendo didicit latus fictitium eſſe non poſſe 1 N. — 6. Sed non docuit modum inueniendi terminum ſupra quem conſiſtere debet vnitatum numerus in dicto latere ponendus cum defectu, quem ſanè ſi eſſe 8. exiſtimauit, allucinatus eſt, cùm optimè fingi poſſit latus illud 1 N. — 7. vt mox patebit. Itaque vt rem à fundamentis aperiamus. Quia ſi ſint tres numeri quorum quilibet minor ſit ſemiſſe ſummæ illorum, hoc idem eſt, atque ſi duo quilibet ex ipſis maiores ſint reliquo vt manifeſtum eſt. At duo quilibet maiores erunt reliquo, ſi duo minores ſimul ſuperent maximum. Eo redacti ſumus vt inueniamus tres quadratos in medietate Arithmetici, vt medius & minimus ſimul excedant maximum. eſt autem minimus 1 Q. medius 1 Q. + 2 N. + 1. Horum ergo ſumma 2 Q. +

2 N. + 1. debet esse maior maximo qui est 1 Q. + 4 N. + 2 & auferendo vtrinque similia, remanet 1 Q. maior quàm 2 N. + 1. qua æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm ß. 2 + 1. seu quàm 2 ½. Quamobrem in fingendo latere quadrati 1 Q. + 4 N + 2. curandum est vt valor numeri non fit minor quàm 2 ½. Atqui valor Numeri fiet à quodam quadrato, multato binario, & diuiso per duplum sui lateris quaternario auctum. Inueniendus ergo est huiusmodi quadratus. Ponatur is 1 Q. Igitur $\frac{1\text{ Q.} + 2}{4\text{ N.} + 4}$ non minor esse debet quàm 2 ½. & omnia ducendo in 2 N. + 4. fit 1 Q. + 2 non minor quàm 5 N. + 10. & tandem 1 Q. non minor quàm 5 N. + 12. Quare æquabimus 1 Q. numero paulo maiori quàm 5 N. + 12. puta 5 N. + 14. & fiet 1 N. 7. Itaque in latere fictitio ponentur vnitates non minores quàm 7. Quod si fingatur latus illud 1 N. − 7. fiet quadratus 1 Q. − 14 N. + 49. æqualis 1 Q. + 4 N. + 2. & fiet 1 N. ½. sunt ergo quæsiti quadrati 2209. 4225. 6241.

Hinc ad soluendum hoc lemma elicitur huiusmodi Canon.

Sume quemuis numerum non minorem quàm 7. & eius quadratum binario multatum diuide per duplum sui lateris quaternario auctum, quotientis quadratus est minimus quæsitorum. Cui si addas duplum sui lateris vnitate auctum, fiet secundus, & huic si addas idem internallum, fiet tertius.

Semel autem inuentis tribus huiusmodi quadratus, reperientur alij infiniti idem præstantes, si iam inuenti per eundem aliquem quadratum multiplicentur vel diuidantur, nam fient quadrati æqualibus quoque internallis distantes, vt iam monuimus ad vigesimam secundi, quæ causa est cur Diophantus omisso communi denominatore, solis vtatur numeratoribus. Denique hoc lemmate expedito, soluetur iam ipsa quæstio per Canonem decimam-sextam primi, vt euidens est. sic inuentis quadratis 2209. 4225. 6241. horum summam cape fiet 12675. cuius semissis 6337 ½. vnde auferendo sigillatim eosdem quadratos, remanent ordine inuerso quæsiti numeri 4128 ½. 2112 ½. & 96 ½.

QVÆSTIO X.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινὸς δοθέντος προσευρεῖν ἑτέρους ξεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνῶν προσλαβὼν ϟ δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν δοθεὶς μὲ τελῶν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ δύο τῶ πρώτων δυνάμεως α ϛ δ μ̊ α̃. ἵνα μὲν ϟ τελῶν μονάδων ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ ἑξῆς δύο δ̊ α̃ ϛ ε̃ μ̊ ε̃. οἱ δὲ τρεῖς δ̊ α ϛ ι̅ μ̊ ιγ̃. ἵνα δὲ ὅτοι μὲν μ̊ τελῶν ποιῶσι τετράγωνον, δὲ ἐπὶ οἱ ξεῖς εἶσι δ̊ α̃ ϛ ι̅ μ̊ ις̃. ὧν οἱ πρῶτοι δύο δ̊ α̃ ϛ δ μ̊ α̃. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ὄφει ϛ δ̃ μ̊ ιβ̃. πάλιν ἐπὶ τρεῖς εἶσι δ̊ α̃. ϛ ι̅. μ̊ ιγ̃. ὧν ὁ δεύτερος ϵ τρίτος δ̊ α̃ ϛ ε̃ μ̊ ε̃. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ὄφει ϛ β μ̊ ζ̃. ἀλλὰ καὶ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερός εἶσι δυνάμεως α̃ ϛ δ μ̊ α̃. δὲ λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ̊ α̃ ϛ β λείψει μ̊ ε̃ λοιπὸν ὄφει δὲ τὸν πρῶτον μὲ τῶ τρίτου προσλαβόντα μ̊ ξεῖς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ πρῶτος μὲ τῶ ξείτου προσλαβὼν μ̊ γ̃. γίνονται ϛ̊ ε̃ μ̊ κβ̃. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μονάδος λγ̃ ὁ δὲ δεύτερος μ̊ ρπϟ̃. ὁ δὲ τρίτος μ̊ ξδ̃. καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

DAto aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero faciat quadratum; sed & summa trium dato numero adiecto faciat quadratum. Esto datus numerus 3. Compositus autem ex duobus primis sit 1 Q. + 4 N. + 1. vt adscito 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 6 N. + 6. Tres autem simul 1 Q. + 8 N. + 13. vt & hi adsumpto 3. faciant quadratum. Et quoniam trium summa est 1 Q. + 8 N. + 13. quorum primi duo sunt 1 Q. + 4 N. + 1. Relinquitur vtique tertius 4 N. + 12. Rursus quoniam tres simul sunt 1 Q. + 8 N. + 13. quorum secundus & tertius sunt 1. Q. + 6. N. + 6. relinquitur vtique primus 2 N. + 7. sed & primus & secundus sunt 1 Q. + 4 N. + 1 relinquitur ergo secundus 1 Q. + 2 N − 6. Superest vt primus & tertius adscito 3. faciant quadratum. Sed primus & tertius adscito 3. faciunt 6 N. + 22. Hæc ergo æquantur quadrato. Esto is 100 fit 1 N. 13. Erit igitur primus 33. secundus 189. tertius 64. & satisfaciunt proposito.

IN QVAESTIONEM X.

QVÆ monet Xilander de positionum varietate, verissima sunt. Sed allucinatur cùm ait numerum 6 N. + 22. æquari posse cuilibet quadrato maiori quàm 22. Nam oportet talem quadratum deligi à quo auferendo 22. & residuum per 6. diuidendo fiat quotiens cuius quadratus auctus duplo tui lateris superet 6. aliter habere non posset secundus numerus qui positus est 1 Q. + 2 N. − 6. Ita si ponas 6 N. + 22 æquari quadrato 25. secundus numerus inuenietur minor nihilo. Quamobrem sumendus est quadratus 36. vel quilibet alius maior quàm 36. vt certà ratione facilè concludi potest. Etenim quia 1 Q. + 2 N. debent excedere 6. hac æquatione resoluta, fit 1 N. maior quàm 2 7 − 1. seu non minor quàm 1 ½. fit autem valor numeri, vt dictum est à quodam quadrato auferendo 22. & residuum diuidendo per 6. quare quæratur huiusmodi quadratus, & esto 1 Q. Igitur ¼ Q. − ½. non minor esse debet quàm 1 ½. & tandem 1 Q. reperitur non minor quàm 32 ¼. qualis est 36. & alius quilibet suprà 36.

OBSERVATIO D. P. F.

QVomodo inueniendi sint 4 numeri vt compositus ex binis quibuslibet adsumpto dato numero conficiat quadratum inuenimus ad propositionem 3. libri 5.

QVAESTIO XI.

DATO aliquo numero, inuenire tres alios, vt compositus ex duobus quibuslibet dempto dato numero faciat quadratum, sed & trium summa detracto dato numero faciat quadratum. Esto rursus datus numerus 3. Ponatur compositus ex duobus primis 1 Q. + 3. vt detracto 3. faciat quadratum. Duo verò deinceps sint 1 Q. + 2 N. + 4. Trium verò summa 1 Q. + 4 N. + 7. vt & hi dempto 3. faciant quadratum. Et quoniam summa trium est 1 Q. + 4 N. + 7. quorum primus & secundus faciunt 1. Q. + 3. relinquitur tertius 4 N. + 4. Rursus quia secundus & tertius sunt 1 Q. + 2 N. + 4. quorum tertius est 4 N. + 4. relinquitur secundus 1 Q. − 2 N. sunt autem primus & secundus 1 Q. + 3. quorum secundus est 1 Q. − 2 N. relinquitur ergo primus 2 N. + 3 Oportet itaque tertium & primum detracto 3. facere quadratum. Sed tertius cum primo, detracto 3. facit 6 N. + 4. Hæc igitur æquantur quadrato. Esto is 64. & fit 1 N. 10. Ad positiones. Erit primus 23. secundus 80. tertius 44. & satisfaciunt quæstioni.

ΑΡΙΘΜΟΥ τινος δοθέντος προσθεῖναι ἑτέρους ξεῖς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ δύο ὁποιωνοῦν τ̄ τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ γ̄. ὁ δὴ συγκείμενος ἐκ τῶν δύο πρώτων δ̄ ᾱ μ̄ γ̄. ἵνα λείψας τὰς τρεῖς μονάδας ποιῇ τετράγωνον. οἱ δὲ δύο ἑξῆς δ̄ ᾱ ις̄ β̄ μ̄ δ̄. οἱ δὲ τρεῖς δ̄ ᾱ ις̄ δ̄. μ̄ ζ̄ ἵνα ἐκ τοῦ λείψει μ̄ γ̄. ποιῶσι τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ οἱ τρεῖς εἰσι δ̄ ᾱ ἀριθμοῦ δ̄ μονάδων ζ̄. ὧν ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος δ̄ ᾱ μ̄ γ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ὄζων ις̄ δ̄ μ̄ δ̄. πάλιν ἐπεὶ ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος εἰσι δ̄ ᾱ ις̄ β̄ μ̄ δ̄. ὧν ὁ τρίτος ὄζων ις̄ δ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται δ̄ ᾱ λείψει ις̄ β̄. ἔστι ἢ καὶ ὁ πρῶτος, καὶ ὁ δεύτερος δ̄ ᾱ μ̄ γ̄. ὧν ὁ δεύτερος ὄζων δ̄ ᾱ τ̄ ις̄ β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται ις̄ β̄ μ̄ γ̄. δίχα ἄρα καὶ τὸ τρίζον μ̄ τῶν πρώτου λείψει μ̄ γ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τρίτος μ̄ τῶν πρώτου λείψει μ̄ γ̄ ἔστιν ις̄ ε̄ μ̄ δ̄. ταῦτα ἵνα τετραγώνῳ ἴσῳ τῷ ξδ̄. ἐγένετο ὁ ἀριθμὸς μ̄ ῑ̄ ὃν καὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος μ̄ κγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ π̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ μδ̄. ἐποίουν τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XI.

HIC quoque lapsus est Xilander cùm putauit numerum 6 N. + 4. æquari potuisse quadrato 16 sic enim secundus qui positus erat 1 Q. − 2 N. Inuenitur æqualis nihilo. Quare determinandum est de huiusmodi quadrato, hac arte. Vt 1 Q. sit maior quàm 2 N. oportet vtique 1 N. maiorem esse quàm 2. Itaque quia æquando quadrato 6 N. + 4. fit valor Numeri à quodam quadrato auferendo 4. & residuum per 6. diuidendo: Eò redacti sumus vt inueniamus quadratum qui multatus quaternario, & per 6. diuisus det quotientem maiorem quàm 2. Esto is 1 Q. Igitur ⅓ Q. − ⅔. maior est quàm 2. & tandem 1 Q. reperitur maior quàm 16. Quamobrem numerus 6 N. + 4. æquandus erit quadrato cuilibet maior quàm 16.

OBSERVATIO D. P. F.

Quæ notauimus ad tertiam libri 5. docebunt quomodo inueniendi sint 4. numeri, quorum bini quilibet sumpti dempto dato numero conficiant quadratum.

QVÆSTIO XII.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὸν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. διατετάχθω δὴ τὸν ιβ. ὑποὶ οὖν ζητοῦμεν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου προσλαβόντα τὸν ιβ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀφ' ἑνὸς ἀπὸ τινος τετραγώνου ἀφέλω τὸν ιβ ἴσον τῷ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω δὴ ὁ τετράγωνος μ̄ κ̄ε̄. ἐὰν ἀφ' ἑνὸς ἀπὸ τινος ἀφέλω τὸν ιβ. λοιπὸν ἴσον τῷ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μ̄ ιγ̄, ἔστω οὖν ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ιγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ᾱ. καὶ τετάχθωσαν ἐν ἀριθμοῖς. ὥστε τὸν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖν μ̄ ιγ̄. καὶ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ις̄ ιγ̄. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ. ἐὰν δὲ ὑπὸ ἑτέρων τετραγώνων ἀφέλω μ̄ ιβ. ἴσον τῷ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου. ἔστω ἀπὸ τοῦ κ̄ε̄. λοιπὸς ἄρα ὁ ἀπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ἴσος μ̄ δ̄ζ̄. τετάχθω πάλιν ἐν ἀριθμοῖς ὥστε ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν μ̄ δ̄ζ̄. ὧν ὁ δεύτερος ἔστω ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔστι ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ις̄ δ̄, διπλασίων καὶ τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μ̄ μ̄ ιβ ποιεῖν τετράγωνον, ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ̄ ιβ̄. διπλασίων ἄρα δ̄ ιβ̄ μ̄ μ̄ ιβ ποιεῖν τετράγωνον. καὶ εἰ εἶχον τὸ πλῆθος τῶν ιγ̄ μ̄ τὸν πρώτον τετράγωνον, δυσχερὴς ἦν ἡ ἴσωσις. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ μὲν ιβ, ἀπὸκειται. μοναὶς δὲ τὸ ἀριθμεῖν φύσει ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ὑφ' αὑτὸν ἓν τετράγωνος, καὶ ἔτι ἑκάστης μ̄ μ̄ ιβ πλῆν τετράγωνον, ἐὰν ᾖ αὐτὴ ἀριθμῷ δύο τινὰς τετραγώνους, ἔστι ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος. ἔχομεν οὖν εὑρεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος μ̄ μονάδων ιβ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον, ἐπεὶ δυνατὸν ὡς ἔφαμεν πεῖραν λαβεῖν ἴσωσιν, καὶ ἔστω ὁ μὲν δ̄. ὁ δὲ ε̄ ἑκάτερος γὰρ τούτων μ̄ μονάδων ιβ ποιεῖ τετράγωνον. τούτων εὑρεθέντων ἐρχόμεθα ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ κάτω τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν δ̄. τὸν δὲ δεύτερον ᾱ. τὸν δὲ τρίτον ις̄ ϛ̄. καὶ λοιπὸν ἔσται τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου, μ̄ μ̄ ιβ ποιεῖν τετράγωνον ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ̄ ϛ̄. δ̄ ἄρα ϛ̄ μ̄ μ̄

INVENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, is adscito dato numero faciat quadratum. Datus esto 12. Quoniam igitur postulatur vt productus ex primo in secundum adscito 12. faciat quadratum, si ab aliquo quadrato dempiero 12. habebo productum ex primo in secundum. Esto itaque quadratus 25. Si ergo ab eo detraxero 12. reliquum habebo productum ex primo in secundum, nempe 13. Esto igitur primus 13. secundus autem 1. & statuantur in numeris, ita tamen vt productum multiplicationis eorum sit 13. & sit primus 13 N. at secundus $\frac{1}{1}$. Itaque si ab altero quadrato detraxero 12. habebo productum ex secundo in tertium. Esto a quadrato 16. relinquitur ergo productus ex secundo in tertium 4. statuantur rursus in numeris, ita vt productum multiplicationis eorum sit 4. Cùm ergo secundus sit $\frac{1}{1}$. erit vtique tertius 4 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium addito 12 fieri quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 52 Q. Proinde 52 Q. + 12. æquantur quadrato. Et si 13. numerus pro primo positus quadratus fuisset, facilis esset æquatio. Quod cùm non sit, eo res deducta est vt duo numeri sint inueniendi, vt productum multiplicationis eorum sit quadratus, & præterea vterque cum 12. faciat quadratum. Sed & si loco numerorum quadratos inueniam, ij sua multiplicatione quadratum producent. Oportet ergo inuenire duos quadratos quorum vterque adscito 12. faciat quadratum. Hoc autem facile est, & æquationem expediet, & est alter 4. alter $\frac{1}{4}$. vterque enim addito 12. facit quadratum. His repertis recedo ad id quod initio actum erat, & pono primum 4 N. secundum $\frac{1}{4}$. tertium $\frac{4}{1}$ N. Restat vt productus ex primo in tertium

adiuncto 12. faciat quadratum. Sed productus ex primo in tertium est 1 Q. Proinde 1 Q. + 12. æquatur quadrato Formo quadratum à latere 1 N. + 3 nempe 1 Q. + 6 N + 9. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & constat propositum.

ιβ̄. ἴση ἔστι τετραγώνῳ. πλάσας τὸ τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ α̈ μϊ γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ̄ α̈ ς̄ μϊ ϛ̄. καὶ γίνῃ ὁ ἀριθμὸς γ̄. ϛ̄. καὶ μένει τὸ ὑπόταγμα.

IN QVAESTIONEM XII.

HÆc quæstio cum sequente est de earum numero quas pro deploratis reliquit Xilander, in quam cum multa infeliciter commentus sit, textum tamen Diophanti leuiter admodum depraua tum restituere non potuit. Sanè tota depravatio in eo est, quod fractionem Numericam $\frac{1}{\text{N}}$. imperitus librarius ambiguè semper expressit, nam primo loco sic eam exhibet ς^ο να̈. deinde passim ϛ̄. cùm tamen aliarum fractionum more potiùs fuisset sic exprimenda α^ι. Hinc erroris ansam accipiens Xilander, vertit vbique 1 N. loco $\frac{1}{\text{N}}$. vnde in difficultates inextricabiles seipsum coniecit.

Porrò dupliciter variari possunt positiones & solutio, nam loco ipsorum 4. & $\frac{1}{2}$. infiniti alij quadrati inueniri per vndecimam secundi, qui adscito 12. quadratum faciant. Deinde numeri quadrato æquandi 1 Q. + 12. latus diuersimodè fingi potest, videlicet ab 1 N. + tot vnitatibus, quarum quadratus sit maior quàm 12. Diophantus æquauit quadrato à latere 1 N. + 3. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. suntque quæsiti numeri 2. $2\frac{1}{2}$.

Placet etiam in artis specimen aliam tradere analysim, Diophantæa vtique non deteriorem, quàm excogitaueram priusquam mihi contigisset Græcum videre Codicem. Sit datus numerus 20. quæratur quadratus qui adsumpto 20. faciat quadratum, is erit 16. Iam ergo statuantur. Primus & secundus duo quilibet Numeri, quorum mutuo ductu fiat 16. Et sit primus 8. secundus 2. nam euidens est sic vni parti propositi satisfieri. Tum verò statuatur pro tertio certus quadratorum numerus, qui ductus in secundum 2. faciat quadratum, puta 2 Q. vel 8 Q. vel 18 Q. &c. & adiiciatur ei defectus tot vnitatum, vt hæ multiplicatæ per eundem secundum numerum 2. faciant datum numerum 20. Hunc vnitatum numerum reperies diuidendo 20. per 2 vnde fit 10. Quamobrem ponetur tertius 2 Q. — 10. sic enim eo ductu in secundum 2 fit 4 Q. — 20. cui addendo datum numerum 20. fit quadratus 4 Q. Superest vt productus primi in tertium adsumpto 20. faciat quadratum, facit autem 16 Q. — 60. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 4 N. — 2. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 8. 2. 22. & satisfaciunt proposito.

Hac ratione operando poni possunt primus & secundus duo quilibet numeri, quorum mutuo ductu fiat quadratus qui adsumpto dato numero quadratum faciat. Vnde iam duplex oritur variatio, tum quia huiusmodi diuersi quadrati infiniti reperientur per vndecimam secundi tum quia eodem sumpto quadrato sumentur alij atque alij duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Præterea in hypostasi tertij poni potest quilibet quadratorum numerus, qui ad vnitates secundi rationem habeat quadrati ad quadratum, vt in nostra hypothesi, poni poterat tertius non solùm 2. Q. — 10. sed etiam 8 Q. — 10. 32 Q. — 10. &c. Denique vltimi quadrati latus puta ipsius 16 Q. — 60. diuersimodè fingi potest, nimirum à 4 N. — quotlibet vnitatibus. Vnde sanè infinita solutionum diuersarum suppetit sylua.

Canones ex his operationibus elici possent, sed non adeò expediti. Quare præstat duos alios elegantissimos afferre, qui ex quibusdam propositionibus libri secundi porismatum manifestè deducuntur. Primus itaque Canon esto.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum diuide per interuallum laterum eorundem quadratorum, duo quotientes vnà cum predicto laterum interuallo quæsitos exhibebunt numeros.

Verbi gratia datus numerus esto 12. auferatur eum à quadratis 36. & 64. remanent 24. & 52. quæ si diuidas per 2. interuallum laterum, fient quotientes 12 & 26, sunt ergo quæsiti numeri 12. 26. 2. Huius Canonis demonstratio facilis est. Nam ex ipsa constructione manifestum est, ducto 2. in ipsos 12. & 26. & productis 24. & 52. addito eodem 12. fieri quadratos 36. & 64. Rursus productum ex 12. in 26. adsumpto 13. facere quadratum, demonstratum est vndecima secundi porismatum. Quamobrem ex omni parte patet propositum. Secundus autem Canon est.

Datum numerum aufer à duobus quadratis, vtrumque residuum sigillatim diuide per interuallum laterum: duo quotientes, vnà cum duplo summa ipsorum, multato supradicto interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Itaque duo primi numeri per hunc canonem reperti, sunt iidem cum duobus primis per superiorem Canonem inuentis, sed tertius diuersus est. Ita dato eodem 12. & sumptis iisdem quadratis 36. & 64. fient vt prius primus & secundus 12. & 26. sed erit tertius duplum summæ illorum multatum binario, nimirum 74. Huius Canonis demonstratio integra continetur propositione decima tertia

ſecundi poniſmatum. Cæterùm vtriuſque Canonis ſimul auxilio licebit propoſitionem extendere ad quatuor numeros, & pulcherrimum problema à nemine hactenus tentatum enodare, nimirum.

Inuenire quatuor numeros, vt qui producitur ex binorum mutuo ductu adſcito dato numero fiat quadratus. Datus eſto 3.

Finge duos quadratos ab 1 N. + tot vnitatibus quarum, quadrati ſuperent 3. ita vt interuallum earundem vnitatum ſit quadratus numerus. Verbi gratia finge latera quadratorum 1 N. + 2 & 1 N. + 6. quorum interuallum eſt quadratus 4. erunt quadrati 1 Q. + 4 N. + 4. & 1 Q. + 12 N. + 36. à quibus auſer ſigillatim datum numerum 3 & reſidua diuide ſigillatim per interuallum laterum 4. Et ſtatue primum quæſitorum $\frac{1}{4}$ Q. + 1 N. + $\frac{1}{4}$. Secundum $\frac{1}{4}$ Q. + 3 N. + $8\frac{1}{4}$. Tertium duplum ſummæ vtriuſque multatum interuallo 4. nimirum 1 Q. + 8 N. + 13. ſic enim productus ex binorum multiplicatione adſcito 3. quadratus fit per ſecundum Canonem. Ponatur denique quartus ipſum interuallum laterum 4. ſic enim primus ſecundus, & quartus ſi bini inter ſe ducantur, & producto addatur 3. fit quadratus per primum Canonem. Supereſt igitur vt producto ex tertio in quartum addendo 3. fiat quadratus. Fit autem 4. Q. + 32. N. + 55. Hoc ergo æquatur quadrato. Fingo eius latus abs 2 N. − tot vnitatibus quarum quadratus ſuperet 55. ſitque illud 2 N. − 10. fit 1 N. $\frac{15}{4}$. Ad hypoſtaſes. Erunt quæſiti numeri $\frac{225}{64}$. $\frac{345}{64}$. $\frac{1155}{64}$ & 4. qui ſatisfaciunt propoſito. Nam ex primo in tres reliquos qui producuntur, ſigillatim adſumpto 3. faciunt quadratos $\frac{231361}{4096}$. $\frac{354025}{4096}$. $\frac{11025}{64}$. quorum latera $\frac{481}{64}$. $\frac{595}{64}$. $\frac{105}{8}$. At ex ſecundo in tertium & quartum producti, adſcito 3. faciunt quadratos $\frac{1413721}{4096}$ & $\frac{11025}{64}$ quorum latera $\frac{1189}{64}$ & $\frac{105}{8}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur. adſcito 3. quadratum facit $\frac{44521}{256}$ cuius latus $\frac{211}{16}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur. initio ponatur alter quilibet quadratus numerus maior dato numero 3. puta 4. & fingatur alter ab 1 N. + latere prioris quadrati, nimirum ab 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N + 4. Tum ab vtroque quadrato auferatur 3. & reſidua diuidantur per interuallum laterum quod eſt 1 N. & ſtatuatur primus quæſitorum $\frac{1}{1N}$. ſecundus 1 N. + 4 + $\frac{4}{1N}$. Tertius horum ſummæ duplum multatum interuallo laterum 1 N. nimirum 1 N. + 8 + $\frac{12}{1N}$. Quartus autem ipſum interuallum laterum, nimirum 1 N. Conſtat itaque ex vtroque Canone omnibus poſtulati partibus ſatisfieri, ſi productus ex tertio in quartum adſcito 3. faciat quadratum. Facit autem 1 Q. + 8 N. + 7 hoc ergo æquatur quadrato. Eſto latus eius 1 N. − 23. & ſit 1 N. $\frac{53}{7}$ Ad hypoſtaſes. Erunt quæſiti numeri $\frac{1}{49}$. $\frac{1681}{49}$. $\frac{4232}{49}$. $\frac{53}{7}$. qui ſatisfaciunt poſtulatis. Etenim ex primo in reliquos tres qui producuntur, adſumpto 3. quadrato faciunt $\frac{5041}{49}$. $\frac{12696}{49}$. 4. quorum latera $\frac{71}{7}$. $\frac{106}{7}$. 2. At ex ſecundo in tertium & quartum producti, adſcito 3. faciunt quadratos $\frac{17909041}{2401}$. & $\frac{50176}{49}$. quorum latera $\frac{4231}{49}$. & $\frac{224}{7}$. Denique productus ex tertio in quartum, adſumpto 3. quadratum facit $\frac{1003529}{343}$. cuius latus $\frac{1417}{49}$.

Vtraque operatio elegans eſt, & multam recipit varietatem, vt curioſo lectori conſiderandum relinquo. Videtur ipſe Diophantus in hoc problemate hæſiſſe, vt apparet ex vigeſima prima quarti. Qua quærit quatuor Numeros, vt productus ex binorum mutuo ductu adſcita vnitate quadratum faciat. Nam eius operatio cuilibet numero applicari nequit, ſed ſolis quadratis, vt ibi docebimus.

QVÆSTIO XIII.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁπωσοῦν γ ϟ δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ὑποτετάχθω δὴ τὸν ι. ἐπὶ ζητοῦμεν ϟ ἀπὸ τοῦ πρώτου ϟ δευτέρου λείψει μ̄ ι. ποιεῖν τετράγωνον ἐὰν ἀφ᾽ ἑνὸς τετραγώνου ἀφεθῶ μ̄ ι. ἔξω τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν. ἔστω τῷ δ̄. ἔσται ἄρα ὁ ἀπὸ πρώτου ϟ δευτέρου μ̄ ιδ̄. ἔστω ἀφεθεὶς μ̄ ιγ̄. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ̄ ᾱ. ϟ τετάχθωσαν πάλιν οἱ ἀριθμοὶ, ὧν τὸν ὑπ᾽ αὐτῶν ποιεῖν μ̄ ιδ̄. ϟ ἔστω ὁ μὲν πρῶτος ιϛ̄ ᾱδ̄. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ̄. πάλιν ἐπὶ ἑτέρου τετραγώνου προσθῶ μ̄ ι. ἔξω τὸν ἀπὸ ϟ δευτέρου ϟ τρίτου. ἔστω τῷ ϑ̄. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ δευτέρου ϟ τρίτου μ̄ ιϑ̄. ὧν ὁ δευτέρος ὄντι ᾱ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ιϛ̄ ιϑ̄. ὅπου

IN VENIRE tres numeros vt quem bini mutua multiplicatione producunt, multatus dato numero faciat quadratum. Sit datus 10. Quando volumus productum ex primo in ſecundum dempto 10. facere quadratum, ſi alicui quadrato adiecero 10. habebo illum productum. Eſto quadrato 4. erit ergo productus ex primo in ſecundum 14. ſit primus 14. ſecundus igitur erit 1. Statuantur rurſus in numeris, ita tamen vt productus multiplicationis faciat 14. & eſto primus 14. N. ſecundus $\frac{1}{14}$. Rurſus ſi alteri quadrato adiecero 10. habebo productum ex ſecundo in tertium. Adiiciatur quadrato 9. erit ergo productus ex ſecundo in ter-

tium 19. proinde cùm ſecundus ſit $\frac{1}{19}$. relinquitur tertius 19 N. Oportet igitur & productum ex primo in tertium dempto 10. facere quadratum. Facit autem 266. Q.—10. hæc ergo æquantur quadrato. Quare ob ea quæ in præcedenti dicta ſunt, eò deuentum eſt vt inueniendi ſint duo quadrati, quorum vterque dempto 10. faciat quadratum. Hoc autem facilè fit, inuenies enim ſi quæras quis quadratus dempto 10. faciat quadratum, & quoniam ſi cui numero additur 1. & ſummæ dimidium in ſe ducitur, & à ſic facto quadrato numerus initio ſumptus detrahitur, relinquitur rurſum quadratus. Addo 1. ad 10. & ſummæ ſemiſſem nimirum 5 $\frac{1}{2}$. duco in ſe, & à producto 30 $\frac{1}{4}$ aufero 10. & habeo quadratum 20. $\frac{1}{4}$ à latere 4 $\frac{1}{2}$. Pono igitur primum 30 $\frac{1}{2}$. tertium autem 1 Q. Oportet ergo vt & ab 1 Q. dempto 10. remaneat quadratus. Quare 1 Q.—10. æquatur quadrato. Formo quadratum à latere 1 N.—2. nimirum 1 Q. + 4.— 4 N. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Tertius igitur qui poſitus erat 1 Q. erit 12 $\frac{1}{2}$. eſt autem & primus 30 $\frac{1}{2}$. nam vterque dempto 10. remanet quadratus. Venio ad id quod initio quærebatur. Et ſtatuo primum 30. $\frac{1}{2}$ N. ſecundum $\frac{1}{19}$. tertium 12 $\frac{1}{2}$ N. Supereſt itaque vt productus ex primo in tertium dempto 10. faciat quadratum. Atqui productus ille eſt 370 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{19}$ Q. Hic ergo dempto 10. æquatur quadrato, & vt quadrati integri ſint, multiplicemus eos per 19. ergo 5929. Q.—160. æquantur quadrato à latere 77 N.— 2. qui eſt 5929 Q. + 4 — 308 N. & fit 1 N. $\frac{1}{77}$. Statueram primum 30 $\frac{1}{2}$ N. erit igitur $\frac{1}{77}$ $\frac{1}{2}$. ſecundum $\frac{1}{19}$. erit igitur $\frac{1}{38}$. tertium 12. $\frac{1}{2}$ N. is erit $\frac{1}{77}$ $\frac{1}{2}$. & conſtat propoſitum.

ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου τ μ̄ ῑ. πεισῶν τετράγωνον. γίνεται δὲ δ̄ σ̄ξ̄ τ μ̄ ῑ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὰ ἐν τῷ πρὸ τούτου εἰρημένα, ἀπῆκται μὲν εἰς τὸ δύρειν δύο τετραγώνους ὧν ἑκάτερος λείψει μ̄ ῑ. ποιῶν τετράγωνον. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. εὑρήσεις γὰρ ἐπὶ ζητήσεως ἀεὶ τινος τετράγωνος λείψει μ̄ ῑ. ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐπί τινι ἀριθμῷ προτεθῇ μονὰς, καὶ τὴν ἡμιολίαν τοῦ ἡμίσεος τετραγωνίσωμεν, καὶ ἀπὸ τοῦ ἡμιολίου τετράγωνα ἀφέλωμεν τὸν ἐξ ἀρχῆς, ὁ λοιπὸς πάλιν τετράγωνος ἔσται. προτίθημι ταῖς μ̄ ᾱ. καὶ τὴν ἡμιολίαν τοῦ ἡμίσεος τουτέστι τοῦ ῑ καὶ ἥμισυ. τετραγωνίσας ἀπὸ τῆς ἡμιολίας μ̄ λ̄. ᾱ ϛ̄. ἀφελῶ ταῖς μ̄ ῑ ἵνα τετράγωνον μ̄ κ̄. ᾱ δ̄. ἀπὸ πλευρᾶς δὶς καὶ ἥμισυ. τάσσω οὖν τὸ μὲν πρῶτον λ̄. ᾱ ϛ̄. τὸν δὲ τρίτον δ̄ ᾱ. δύσῃ ἄρα καὶ ἀπὸ δ̄ ᾱ ἀφαιρεθεισῶν μ̄ ῑ. τὸ λοιπὸν γίνεσθαι τετράγωνον. δ̄ ἄρα ᾱ λείψει μ̄ ῑ ἴσοι ἐστὶ τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ ᾱ λείψει μ̄ β̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ̄ ᾱ μ̄ δ̄ λείψει ις̄ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ ζ̄ καὶ ἥμισυ. ἐπεὶ ἔταξα τὸ τρίτον δ̄ ᾱ. ἔσται ιβ̄. ᾱ ϛ̄. ἐστὶ δὲ καὶ ὁ πρῶτος λ̄. ᾱ ϛ̄. εἴ τινες λείψει μ̄ ῑ. ποιοῦσι τετράγωνους. ἥρμοσται ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον, καὶ τάσσω τὸ πρῶτον ις̄ λ̄. ᾱ ϛ̄. τὸ δὲ δεύτερον α̅. τὸν δὲ τρίτον ις̄ ιβ̄. ᾱ ϛ̄. λοιπὸν δεῖ τὸν ἀπὸ πρώτου καὶ τρίτου λείψει μ̄ ῑ, γίνεσθαι τετράγωνον, ὁ δὴ ἀπὸ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ̄ τὸ. ᾱ ϛ̄. ᾱ ι̅ϛ̅. ἐστὶ ἄρα λείψει μ̄ ῑ ἴσος ἐστὶ τετραγώνῳ, καὶ ἵνα ὅλαι δυνάμεις ὦσι ποιᾷ αὐτὰς ἐκκαιδεκάκις, δ̄ ἄρα ἐστὶ τ μ̄ ρξ̄. ἴσαι τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ις̄ οζ̄ λείψει μ̄ β̄. τουτέστι δυνάμεις ἐστὶ μ̄ δ̄ λείψει ις̄ τ̄π̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ μᾱ ο̅ϛ̅. ἔταξα δὲ πρῶτον ις̄ λ̄. ᾱ ϛ̄. ἔσαι ασυᾱ ο̅ϛ̅. ᾱ ϛ̄. τὸν δὲ δεύτερον α̅ ἴσαι οζ̄. μ̄α̅. τὸν δὲ τρίτον ις̄ ιβ̄. ᾱ δ̄. ἴσαι φβ̄ ο̅ϛ̅. ᾱ ϛ̄. καὶ ὑφύσει τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XIII.

EADEM ferè dici poſſunt de hac quæſtione quæ de præcedente dicta ſunt. Operatio & ſolutio totidem modis poteſt variari. Nam infiniti quadrati reperientur per vndecimam ſecundi, qui multati numero 10. quadratum relinquant. Et vltimi quadrati 5929. Q.— 160. latus diuerſimodè fingi poteſt, nimirum à 77 N.— quotlibet vnitatibus. Cæterùm Diophantus compendium quærens ad vndecimam ſecundi, hoc vtitur lemmate.

Si dato numero addatur vnitas, & à ſummæ ſemiſſis quadrato auferatur datus numerus, relinquitur quadratus.

A..... D.... B. C

Sit datus numerus A B. cui addatur vnitas B C. & totius A C semissis esto A D. dico quadratum ipsius A D multatum numero A B. relinquere quadratum. ' Etenim quadratus A D æqualis est producto ex A B in B C vnà cum quadrato ipsius D B. Sed productus ex A B in B C æquatur ipsi A B, quia B C est vnitas. Igitur A B & quadratus ex D B simul æquantur quadrato ex A D. Quare si à quadrato ex A D auferatur A B. relinquetur quadratus ex D B. Quod erat ostendendum.

5.° secundi.

Licet etiam per nostram analysim soluere quæstionem hac arte. Datus esto 20. Quæratur quadratus à quo auferendo 20. supersit quadratus, puta 36. & statuantur pro primo & secundo quæsitorum numerorum, duo quilibet quorum mutuo ductu fiat 36. sit ergo primus 9. secundus 4. Tum ponatur tertius quilibet quadratorum numerus, qui ductus in secundum 4. quadratum faciat, puta 1 Q. eique adiiciantur tot vnitates vt ductæ in eundem secundum 4. faciant datum numerum 20. Et esto totus tertius 1 Q. + 5. sic enim duabus propositi partibus satisfit. Restat vt productus ex primo in tertium detracto 20. faciat quadratum, facit autem 9 Q. + 25. hoc ergo æquatur quadrato, esto latus illius 3 N. + 1. fiet 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 9. 4. 21. & constat. Sed & geminum Canonem eliciemus ex libro secundo porismatum. Quorum primus est.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide sigillatim per interuallum laterum, duo quotientes vnà cum eodem interuallo, quæsitos exhibent numeros.

Vt si datus sit 10. adde 10. quadratis 16. & 36. fiunt summæ 26. & 46. quas si diuidas per 2. interuallum laterum, fiunt 13. & 23. duo ex quæsitis numeris, quorum tertius est ipsum interuallum laterum 2. Canonis huius demonstratio in promptu est. Nam constat per constructionem ducto 2. in ipsos 13. & 23. fieri 26. & 46. à quibus auferendo datum numerum 10. remanent quadrati 16. & 36. At productum ex 13. in 23. detracto 10. esse quadratum, ostensum est duodecimæ secundi porismatum. Secundus Canon erit.

Datum numerum adde duobus quadratis, vtramque summam diuide per interuallum laterum: duo quotientes vnà cum duplo summæ illorum multato eodem interuallo quæsitos exhibent numeros.

Itaque sumptis eisdem quadratis, duo primi numeri coincident cum duobus primis per præcedentem Canonem inuentis. Tertius autem diuersus erit. Nam sumptis vt prius quadratis 16. & 36. fient duo primi vt suprà 13. & 23. At tertius erit 70. Huius autem Canonis demonstratio habetur decima quarta secundi porismatum. Porrò vtriusque Canonis ope soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire quatuor numeros, vt productus ex binorum mutua multiplicatione detracto quouis dato numero, quadratus maneat.

Datus esto 10.

Finge duos quadratos, alterum ab 1 N. + aliquo quadrato numero, puta ab 1 N. + 4. erunt quadrati 1 Q. & 1 Q. + 8 N. + 16. His adde sigillatim datum numerum 10. & summas diuide per interuallum laterum 4. Erit ergo primus quæsitorum $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$. Secundus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$ + 2 N. Tertius horum summæ duplum multatum eodem interuallo 4. nimirum 1 Q. + 14 + 4 N. Quartus denique erit idem interuallum, videlicet 4. Sic enim ex vtroque Canone constat quinque propositi partibus abundè satisfieri. Restat vt productus ex tertio in quartum detracto 10. relinquatur quadratus. Relinquitur autem 4 Q. + 46 + 16 N. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto eius latus 2 N. + 6. fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{13}{16}$. $\frac{61}{16}$. $\frac{1}{16}$. 4. qui satisfaciunt postulatis. Nam ex primo in reliquos tres qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{2197}{256}$. $\frac{1525}{256}$. $\frac{25}{256}$. quorum latera $\frac{47}{16}$. $\frac{39}{16}$. $\frac{1}{16}$. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{3721}{256}$ & $\frac{81}{256}$ quorum latera $\frac{61}{16}$ & $\frac{9}{16}$. Denique productus ex tertio in quartum, detracto 10. quadratum facit $\frac{225}{256}$ cuius latus $\frac{15}{16}$.

Aliter. Ex quadratis qui exponuntur initio ponatur alter, quilibet quadratus, puta 1. Alter verò fingatur ab 1 N. + latere prioris, nimirum ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. Tum vtrique quadrato addatur datus numerus 10. & summæ diuidantur sigillatim per interuallum laterum 1 N. Et statuatur primus quæsitorum $\frac{11}{1N}$. Secundus 1 N. + 2 + $\frac{11}{1N}$. Tertius horum summæ duplum multatum interuallo laterum. videlicet 1 N. + 4 + $\frac{44}{1N}$. Quartus denique ipsum interuallum laterum, puta 1 N. Itaque patet ex vtroque Canone quinque postulati partibus esse satisfactum. Restat ergo vt productus ex tertio in quartum detracto 10. maneat quadratus. Manet autem 1 Q. + 4 N. + 34. Hoc ergo æquatur quadrato. Sit eius latus 1 N. − 8. fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Sunt quæsiti numeri. $\frac{33}{4}$. $\frac{9}{4}$. $\frac{121}{4}$. $\frac{1}{4}$. qui soluunt quæstionem. Etenim ex in primo in tres reliquos qui producuntur, detracto 10. faciunt quadratos $\frac{1089}{16}$. $\frac{3993}{16}$. 1. quorum latera $\frac{33}{4}$. $\frac{63}{4}$. 1. At producti ex secundo in tertium & quartum, detracto 10. manent quadrati $\frac{14641}{16}$ & $\frac{121}{16}$. quorum latera $\frac{121}{4}$. & $\frac{11}{4}$. Denique ex tertio in quartum qui producitur, detracto 10. relinquit quadratum $\frac{1521}{16}$ cuius latus $\frac{39}{4}$.

Quomodo autem reperiendi sint tres numeri, vt productus ex binorum multiplicatione detractus à dato numero, relinquat quadratum, nondum in vniuersum assequi licuit, sed soluo quæstionem huiusmodi, cum datus numerus vel quadratus est, vel ex duobus quadratis compositus.

Sit

Sit enim datus 20. ſumatur vnus quadratorum, ex quibus 20. componitur, puta 16. & ſtatuantur primus & ſecundus quæſitorum, duo quilibet numeri quorum mutuo ductu fiat 16. puta 8. & 2. tertius verò ponatur talis vnitatum numerus, qui ductus in ſecundum 2. faciat datum numerum 20. eſt is numerus 10. cui addatur defectus tot Quadratorum, vt ſecundo 2. in eos ducto fiat quadratus. Statuatur ergo tertius 10 — 2 Q. ſic enim duabus propoſiti partibus ſatisfit. Reſtat vt productus ex primo in tertium detractus à 20. relinquat quadratum. Sed relinquit 16 Q. — 60. Hoc ergo æquatur quadrato cuius latus fingetur à 4 N. — tot vnitatibus, vt per valorem Numeri reſoluendo hypoſtaſes fiat 1 Q. minor quàm 5. quia ſcilicet tertius poſitus eſt 10. — 2 Q. Itaque cùm quadratus debeat eſſe minor quàm 5. oportet valorem numeri minorem eſſe quàm 2 $\frac{1}{2}$. fiet autem valor Numeri à quodam quadrato adſumente 60. & diuiſo per octuplum ſui lateris. Quærendus ergo eſt quadratus qui adſumens 60. & diuiſus per octuplum ſui lateris, det quotientem minorem quàm 2 $\frac{1}{2}$. fit is 1 Q. Igitur $\frac{1Q.+60.}{8N.}$ minor eſt quàm 2 $\frac{1}{2}$ & omnia ducendo in 8 N. fit 1 Q. + 60 minor quàm 18 N. Quare æquemus 18 N. numero paulò maiori quàm 1 Q. + 60. puta numero 1 Q. + 65. fiet 1 N. 5. vel 13. Proinde oportet latus quadrati fingere 4 N. — tot vnitatibus, quæ non deficiant à 5. nec excedant 13. fingatur 4 N. — 5. fiet 1 N. $\frac{1}{11}$. ſunt igitur tres quæſiti 8. 2. $\frac{41}{121}$. & conſtat.

QVÆSTIO XIV.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adiecto reliquo quadratum faciat. Quando quærimus productum ex primo in ſecundum addito tertio facere quadratum, ſi expoſito aliquo quadrato, partem illius aliquam ſtatuamus pro tertio, reſiduum autem pro producto multiplicationis primi & ſecundi vnum poſtulatorum præſtabimus. Formetur quadratus ab 1. N. + 3. erit vtique 1 Q. + 6 N. + 9. eſto itaque tertius 9. relinquitur ergo productus ex primo in ſecundum 1 Q. + 6 N. Ponatur primus 1 N. erit igitur ſecundus 1 N. + 6. Oportet ergo & productum ex ſecundo in tertium adſumpto primo, hoc eſt 10 N. + 54. æquari quadrato, & præterea productum ex tertio in primum adſumpto ſecundo, nempe 10 N. + 6. æquari quadrato, & fit duplicata æqualitas. Eſt autem ipſorum interuallum 48. Quamobrem oportet inuenire duos quadratos quorum interuallum ſit 48. Quod facile eſt, & infinitis modis fieri poteſt; eſtque minor 16. maior 64. vtri horum æquationem accommodemus, reperiemus quantus ſit 1 N. ſi enim dicamus 64. æquari maiori, puta 10 N. + 54. inuenitur 1 N. 1. Rurſus ſi dicamus minorem 16. æquari 10 N. + 6. fit etiam 1 N. 1. Ad poſitiones. Erit primus 1. ſecundus 7. tertius 9. & ſoluunt quæſtionem.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁποιωνοῦν πολυπλασιασθεὶς τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. ἐπὶ ζητοῦμεν ἀπὸ πρώτου καὶ δευτέρου πολυπλασιάσαντα τὸν λοιπὸν ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἐκτιθῶμεν τινὰ τετράγωνον, μέρος μέν τι αὐτοῦ τάξωμεν τὸν τρίτον, τὸν δὲ λοιπὸν τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, λύσωμεν ἐν τοῖς ὑποδεδειγμένοις. πεπλάσθω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ς̄ ā μ̄ γ̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ̄ ā ς̄ ϛ̄ μ̄ ϟ̄ ἴσων δὲ ὁ τρίτος μ̄ ϟ̄, λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου δ̄ ā ς̄ ϛ̄. πεπλάσθω ὁ πρῶτος ς̄ ā. λοιπὸς ἄρα ὁ δεύτερος ἔσαι, ς̄ ā μ̄ ϛ̄. δεήσει ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου πολυπλασιάσαντα τὸν πρῶτον τοῦτον, ς̄ ā μ̄ ϛ̄ ἴσον εἶναι τετραγώνῳ, καὶ ἐπὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου πολυπλασιάσαντα τὸν δεύτερον τοῦτον ς̄ ā μ̄ ϛ̄ ἴσον πάλιν γίνεσθαι τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης. καὶ ἔστιν αὐτῇ ὑπεροχὴ μ̄ μ̄. δεήσει ἄρα εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἐν ὑπεροχῇ μ̄ μ̄. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἀπειραχῶς γίνεται. καὶ ἔστι ὁ μὲν ἐλάσσων μ̄ ις̄. ὁ δὲ μείζων μ̄ ξδ̄. καὶ πρὸς ὁποῖον αὐ αὐτῇ ποιήσωμεν τοῦτον ἰσότητα, διρήσει τοῦτον ὁποσάσιον τοῦ ς̄ ἐστὶ τὸ γὸ φήσωμεν τὰς τοῦ μείζονος μ̄ ξδ̄ ἴσας εἶναι ς̄ ī. μ̄ πδ̄. συνάγεται ὁ ς̄ μ̄ ā. ἐὰν δέ τι πάλιν φήσωμεν τὰς τοῦ ἐλάσσονος μ̄ ις̄ ἴσας εἶναι ς̄ ī. μ̄ ϛ̄ συνάγεται ὁ ς̄ μ̄ ā. ὅθεν τὰς ὑποκειμένας. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ā· ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ζ̄. ἔστω δὲ καὶ ὁ τρίτος μ̄ ϟ̄, ὃ ἐποίησε τὸ ὑποκείμενον.

IN QVÆSTIONE XIV.

BENE monet Xilander hic duplicem contingere posse variationem. Primò enim Quadratus qui ponitur fieri ex producto primi in secundum, adscito tertio fingi potest à certis numeris + quotlibet vnitatibus, finxit Diophantus ab 1 N. + 3. sed fingere potuisset ab 1 N. + 2. vel 1 N. + 4. vel etiam 2 N. + 3. 2 N. + 4. &c. Deinde duplicata æqualitas infinitis modo resolui poterat, sumendo scilicet duos quoslibet quadratos, quorum interuallum sit 48. adhibita tamen cautione quam tradimus ad duodecimam secundi, vt videlicet maiores sint sumpti quadrati numeris 54. & 6. Verùm quod præcipuum est, non attigit Xilander, quomodo nimirum positiones primi & secundi ita instituat Diophantus, vt tandem in vtroque numero quadrato æquando reperiatur idem Numerorum numerus, puta 10 N. Hoc enim si non curasset, inexplicabilis fuisset æquatio. Cùm enim vnitates 54. & 6. nec æquales sint, nec quadrati numeri, oportuit numerum Numerorum vtrobique eundem reperiri. Itaque cùm productus ex primo in secundum positus sit 1 Q. + 6 N. ex infinitis numeris quorum mutuo ductu gigni poterat 1 Q. + 6 N. tales deligendi fuerunt, vt in eorum vtroque idem esset numerorum Numerus, quales sumpsit Diophantus 1 N. & 1 N. + 6. nec alij proposito satisfacientes sumi potuissent, quia vt dictum est, oportet ducendo eundem tertium 9. in vtrumlibet ipsorum, & producto addendo reliquum, fieri vtrobique eundem Numerorum numerum, quod fieri non posset, si Numerorum numeri primi & secundi non essent æquales.

QVÆSTIO XV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. Τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α̃. ὁ ἢ δεύτερος ς̄ α̃ μ̄ δ̄. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῶν ἔσται δ̄ α̃. ςς̄ δ̄. δεῖ οὖν ἄρα τοῦτον λείψαι τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐστω ἢ τρίτος τάξω ςς̄ δ̄. λύσιμον ἐκ τῆς ὑποταγμένης. λοιπὸν δὴ ἐκ τοῦ ὑπὸ δευτέρου & τρίτου τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον, ἡ ἔστι ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου & τρίτου λείψας τὸν πρῶτον ἔστι δ̄ δ̄ ςς̄ ιϛ̄ ἴσος τετραγώνῳ. ὁ ἢ ὑπὸ τρίτου & πρώτου λείψας τὸν δεύτερον ἔστι δ̄ δ̄ ςς̄ ιϛ̄ ἴσος τετραγώνῳ. ὁ ἢ ὑπὸ τρίτου & πρώτου λείψας τὸν δεύτερον ἔστι δ̄ δ̄ λείψει ς̄ ἑνὸς μ̄ δ̄ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ γίνεται πάλιν διπλῆ ἡ ἴσωσις. τῆς γὰρ ὑποθέσεως αὐτῷ τυγχανούσης ςς̄ ιϛ̄ μ̄ δ̄. ζητῶ δύο ἀριθμὺς ὧν τὸ ὑπὸ ποιῇ ςς̄ ιϛ̄ μ̄ δ̄. εἰσὶ δὲ μ̄ δ̄. & ςς̄ δ̄ μ̄ α̃. πάλιν οὖν ἡ συνθέσεως τούτων τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ὂν τῷ μείζονι. ἡ δ' ὑποθέσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς κ̄ ᾱ. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος κ̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ρ̄ ᾱ. ὁ δὲ τρίτος β̄ ᾱ. καὶ μένει τὰ τῆς ὑποστάσεως.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione dempto reliquo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 1 N. + 4. Productus ipsorum multiplicatione erit 1 Q. + 4 N. Oportet igitur hunc dempto tertio facere quadratum, si ergo ponamus tertium 4 N. satisfactum erit vni postulatorum. Superest itaque vt & productus ex secundo in tertium dempto primo faciat quadratum, & præterea productus ex tertio in primum dempto secundo faciat quadratum. Sed productus ex secundo in tertium dempto primo est 4 Q. + 15 N. æqualis quadrato. At productus ex tertio in primum dempto secundo est 4 Q — 1 N. — 4. æqualis quadrato. Et occurrit rursus duplicata æqualitas. Cùm itaque interuallum ipsorum sit 16 N. + 4. Quæro duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. sunt autem 4. & 4 N. + 1. Rursus ergo vel summæ semissis quadratus æquatur maiori, vel interualli semissis quadratus æquatur minori; & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erit igitur primus $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{9}{2}$. tertius $\frac{33}{2}$. & constat propositũ.

IN QVAESTIONEM XV.

NON temerè, vt malè arbitratur Xilander, secundum numerum posuit Diophantus 1 N. + 4. Nam necesse est vnitates secundi numeri, quadratum esse numerum, puta 4. vel 9. vel 16. &c. Cuius rei ratio ex ipsamet operatione subtilius considerata, statim innotescit. Tertius enim numerus semper æqualem Numerorum multitudinem continet, vnitatibus in secundo 1 N. + 4.

vel 1 N. + 9. &c. erit tertius 4 N. vel 9 N. &c. Quamobrem rursus ex ductu tertij tam in primum quàm in secundum, in quorum vtroque est 1 N. fient totidem quadrati, vt vides in hypothesi Diophanti, fieri 4 Q. & si secundus positus esset 1 N. + 9. fierent 9 Q. Si autem in numeris quadrato æquandis 4 Q. + 15 N. & 4 Q. − 1 N. − 4. numerus quadratorum 4. non esset quadratus, explicari non posset duplicata æqualitas. Nam si, vt fecit Xilander, ponatur secundus 1 N. + 10. atque adeo tertius 1 N. fient tandem quadrato æquandi 10 Q. + 99 N. & 10 Q. − 1 N. − 10. Quæcunque autem fingas quadratorum latera nunquam produces 10. Q. (cùm nullus sit numerus qui in se ductus efficiat 10. vnde necesse erit in æquationem complexam deueniri, & duas species, vni æquales remanere, ac proinde solutionem vt plurimum contingere irrationalem.

Præterea etiam ritè facta positione secundi numeri, statuendo scilicet in eo vnitatum numerum quadratum, aduerte, posse te adhuc in easdem cautes impingere, nisi magna cum cautione seligas duos numeros, quorum mutuo ductu fiat interuallum numerorum quadrato æquandorum. Etenim in Diophantæa hypothesi, vbi interuallum est 16 N. + 4. licet id ex infinitorum numerorum mutuo ductu produci possit, nulli tamen idonei sunt quæstioni soluendæ præter 4 N. + 1. & 4. si enim Verbi gratia, sumas 2 N. + $\frac{1}{2}$ & 8. horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + $8\frac{1}{4}$ N. + $\frac{49}{49}$ æquabitur 4 Q. + 15 N. vnde fiet solutio irrationalis. Itaque tales seligendi sunt numeri mutuo ductu producentes propositum interuallum, vt in eorum summa contineatur duplum lateris Quadratorum, qui in numeris quadrato æquandis reperiuntur. Vt in eadem hypothesi, vbi quadratorum numerus est 4 Q. cuius latus 2 N. cuius duplum 4 N. Oportet tales deligi numeros, quorum mutuo ductu fiat 16 N. + 4. vt eorum summa contineantur 4 N. Quia verò patet primùm illorum necessario constare debere ex Numeris & vnitatibus, secundum autem ex solis vnitatibus, sequitur in primo necesse esse constitui 4 N. atque adeo vt ex secundo in primum fiant 16 N. oportet secundum esse 4. Vt autem præter 16 N. fiant etiam 4. (cùm totum interuallum sit 16 N. + 4) necesse est primum esse 4 N. + 1. secundum 4. Quoniam autem eodem artificio sæpè in sequentibus vtendum erit, vt res tyronum memoriæ firmius inhæreat, age alio eam exemplo illustremus. Posito primo numerorum quæsitorum 1 N. sit secundus 1 N. + 9. tertius 9 N. ducto ergo tertio in primum, & inde ablato secundo remanet 9. Q − 1 N. − 9. æquandus quadrato. Rursus ducto tertio in secundum, & inde ablato primo remanet 9 Q. + 80 N. æquandus quoque quadrato. Horum interuallum est 81 N. + 9. Quare sunt inueniendi duo numeri, quorum mutuo ductu id fiat eum cautione suprà explicata. Itaque cùm quadratorum numerus sit 9. Q. cuius latus 3 N. cuius duplum 6 N. Oportet in primo quæsitorum statui 6. N. Quamobrem vt ex secundo in primum fiam 81 N. necesse est secundum est $13\frac{1}{2}$. Rursus autem vt fiat alia pars interualli, puta 9. euidens est primum debere esse 6 N. + $\frac{1}{2}$. secundum $13\frac{1}{2}$. Reliquam operationem absolue, si vacat.

Cæterùm moneo totam solutionum diuersitatem, oriri ex illo quadrato qui ponitur in secundo numero. Nam eodem ibidem posito quadrato, licet primus ponatur 2 N. vel 3 N. vel 4 N. &c. eadem tamen semper continget solutio. Quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Ponatur primus 2 N. secundus 2 N. + 4. tertius 8 N. productus ex secundo in tertium abiecto primo fit 16 Q. + 30 N. æquandus quadrato. Et rursus productus ex primo in tertium adiecto secundo fit 16 Q. − 2 N. − 4. æquandus etiam quadrato. Horum interuallum est 32 N. + 4. qui fit ex 8 N. + 1 in 4. hi enim soli apti sunt proposito ob causas suprà traditas. Horum summæ semissis quadratus est 16 Q. + 20 N. + $\frac{25}{4}$ æqualis 16 Q. + 30 N. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{2}$. $\frac{11}{2}$. 5. iidem quos inuenerat Diophantus. Rursus pone primum 3 N. secundum 3. N. + 4. Tertium 12 N. fient tandem æquandi quadrato 36 Q. + 45 N & 36. Q. − 3 N. − 4. quorum interuallum 48. N. + 4. quod fit ex 12 N. + 1 in 4. horum summæ semissis quadratus est 36 Q. + 30 N. + $\frac{25}{4}$ qui æquatur 36 Q. + 45 N. & fit 1 N. $\frac{1}{12}$ suntque quæsiti numeri, vt prius $\frac{1}{2}$. $\frac{11}{2}$. 5.

Denique animaduersione dignum est, qualiscunque numerus Numerorum statuatur pro primo. Dum idem statuatur pro secundo + aliquot vnitatibus quadratis, & tertius ponatur productus ex primo in vnitates secundi, semper contingere in numeris quadrato æquandis, numerum quadratorum esse quadratum, vt in Diophanti exemplo 4 Q. in proximè allatis 16 Q & 36 Q. quod ex necessitate fieri, sic demonstrabitur. Esto A numerus Numerorum primi. Et A + B vnitatibus quadratis esto secundus. Et tertius esto D. productus ex A in B. Itaque vt patet ex operationis processu, ex D in A fiet quadratorum numerus qui reperitur in numeris quadrato æquandis, sit is E. Hunc dico esse quadratum. Nam sumptis tribus numeris A. B. A. idem E fiet siue A ducatur in B. & productus D in A. siue A ducatur in A. & quadratus ipsius A in B. Quare cùm & B sit quadratus, patet E productum ex quadrato in quadratum, & ipsum esse quadratum. Quod erat demonstrandum. Sed de his satis.

A 3 N.
A 3 N. + B 4.
D 12 N. E 36 Q.

3. 1. *perism.*

QVÆSTIO XVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν τὸν ἀπὸ λοιποῦ τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ς̄ δ̄ μ̄ δ̄. ὁ δὲ τρίτος μοναδος ᾱ. ἵνα ἡ λειπομένη δυάς τῶν δοθέντων. λοιπὸν ὅζι ἐστὶ τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν τὸν ἀπὸ δευτέρου ποιεῖ δ̄ ις̄ ς̄ λ̄ μ̄ ις̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ δ̄ γ̄ μ̄ ᾱ. τουτέστι δ̄ ις̄ μ̄ κᾱ λείψει ς̄ μ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ϛ̄ ἴσος ὁ μὲν πρῶτος ϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος τκδ̄. ὁ δὲ τρίτος οϛ̄. καὶ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumpto reliqui quadrato, faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus 4 N. + 4. tertius autem 1. vt duabus propositi partibus satisfiat. Superest vt productus ex tertio in primum adsumens quadratum secundi faciat quadratum. Sed productus ex tertio in primum adsumens secundi quadratum facit 16 Q. + 33 N. + 16. Hæc igitur æquanda quadrato, nempe à latere 4 N. — 5. qui est 16 Q. + 25 — 40. N. & fit 1 N. 7/40. Erit igitur primus 9. secundus 328. tertius 73. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVAESTIONEM XVI.

FALLITVR hic etiam Xilander existimans positiones pro arbitrio variari posse, nulla adhibita cautione, hoc enim manifestæ falsitatis arguitur ipso exemplo quo suam nititur comprobare sententiam, ait enim licuisse ponere primum 1 N. secundum 1 N. + 2. tertium 1. Quod nequaquam verum est, nam productus quidem ex primo in secundum adscito quadrato tertij, facit quadratum 1 Q. + 2 N. + 1. At productus ex secundo in tertium adscito quadrato primi facit 1 Q. + 1 N + 2. qui quadratus non est, cùm tamen per ipsas positiones duabus propositi partibus satisfieri velit Diophantus. Itaque tali artificio ipsas positiones instituemus. Statuatur pro secundo quilibet numerus Numerorum + quotlibet vnitatibus. Et ponatur primus quadrans Numerorum, tertius quadrans vnitatum secundi. Sic Diophantus posito secundo 4 N. + 4. posuit primum 1 N. secundum 1. Quod si ponas secundum 4 N. + 8. erit primus 1 N. tertius 2. Et si ponas secundum 8 N. + 12. Erit primus 2 N. Tertius 3. & sic de alijs. Hoc autem ne quis absque fundamento dictum putet, sic demonstratur.

E 4 N. F 6.
C 2 N. A 8 N. + B 12. D 3.
G 16 Q. + H 24 N. + K 9.
L 4 Q. + M 24 N. + P 36.

Sit secundus certus Numerorum numerus A + vnitatibus B. & sit C primus, quadrans ipsius A. sitque D. tertius quadrans ipsius B. & quia C A sunt plani similes, sit medius eorum proportionalis E duplus scilicet ad C. sub duplus ad A. Similitérque sit F medius proportionalis inter B D, duplus scilicet ad D, sub duplus ad B. Tum ducatur C in A + B. & fiat G + H certus scilicet quadratorum numerus + certo numero Numerorum, hisque adiiciatur K quadratus ipsius D. Dico totum G H K esse quadratum. [4. secundi.] Quod vt probetur, oportet ostendere ipsos G K esse quadratos, & ex eorum lateribus bis inuicem ductis produci H. Et quidem ipse K quadratus est ipsius D. ex constructione. [1. noni.] At G. cùm fiat ex mutuo ductu planorum similium C A. quadratus est medij proportionalis E. Restat ergo probandum ipsum H. produci ex E in D bis. Itaque quoniam est A ad C, vt B ad D. [16 septimi.] qui sub extremis A D continetur, æqualis ei qui sub mediis C B. At ex C in B fit H. per constructionem. Igitur ex A in D fit idem H. Quarè cum A sit duplus ipsius E. fiet idem H ex E in D bis. Quod erat probandum. Similiter si D ducatur in A + B. vnde fiat M + P. certus scilicet numerus Numerorum + certis vnitatibus, hisque adiiciatur L quadratus ipsius C dico totum L M. P quadratum esse. Quod iisdem probatur argumentis. Nam L. ex constructione quadratus est ipsius C. At P. qui fit ex mutuo ductu planorum similium B D. quadratus est medij proportionalis F. Denique vt ostensum est M, qui producitur ex A in D, producetur etiam ex C in B. hoc est ex C in F bis. Igitur ex omni parte constat propositum.

Ex dictis patet duplici de causa diuersas contingere posse solutiones. Primò prout diuersimodè instituentur positiones cum tradita cautione. Secundò prout producti ex primo in tertium adsumentis quadratum secundi latus diuersimodè fingetur, vt iam sæpe in simili, fieri posse docuimus.

Cæterùm huius quæstionis ope, licebit & sequentes absoluere.

QVAESTIO PRIMA.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, quorum bini mutuo ductu quem producunt, is adscito reliqui quadrato, quadratus fiat.

Esto datus 10.

Sumantur tres numeri per superiorem quæstionem inuenti, & statuantur in Numeris. Erunt ergo quæsiti 9 N. 73 N. 328 N. & productus ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato, quadratum facit. Restat vt eorum summa sit 10. Quamobrem 410 N. æquantur 10. & fit 1 N. $\frac{1}{41}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{9}{41}$ $\frac{73}{41}$ $\frac{328}{41}$ seu 8.

QVAESTIO SECVNDA.

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato quadratos faciant, & quadratorum latera datum constituant numerum.

Datus esto 25. Statuantur rursus pro quæsitis, numeri per decimam sextam inuenti, nimirum 9 N. 73 N. 328 N. sic enim producti ex binorum multiplicatione adscito reliqui quadrato, quadratos faciunt 108241 Q. 24025. Q. 8281 Q. quorum latera 329 N. 155 N. 91 N. Restat vt horum laterum summa æquetur 25. Quare 575 N. æquantur 25. & fit 1 N. $\frac{1}{23}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{9}{23}$ $\frac{73}{23}$ $\frac{328}{23}$.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros vt productus ex binorum multiplicatione adsumpta, eorumdem summa quadratum faciat. Enim vero productus multiplicatione duorum quorumlibet quadratorum proximorum, adscita ipsorum summa quadratum facit. Ponatur itaque primus 4. secundus 9. vt productus eorum multiplicatione quadratus, nempe 36. adscita vtriusque summa faciat quadratum. Restat vt & productus ex secundo in tertium, adscito vtroque: itemque productus ex tertio in primum vtroque adsumpto faciat quadratum. Statuatur tertius 1 N. fitque productus ex secundo in tertium, vtroque adsumpto 10 N + 9. æquandus quadrato. At productus ex tertio in primum adsumens vtrumque fit 5. N. + 4. æqualis quadrato. Hic quoque rursus duplicata æquatio occurrit; estque interuallum 5 N. + 5. Quæro igitur duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 5 N. + 5. & sunt, hic quidem 1 N. + 1. ille verò 5. Atque vt in secundo libro docuimus, vel summæ horum semissis quadratus æquatur maiori: vel interualli semissis quadratus æquatur minori. Et fit 1 N. 28. Erit igitur primus 4. secundus 9. tertius 28. & satisfaciunt postulatis.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωοῦν προσλαβὼν συναμφότερος ποιῇ τετράγωνον. παντὸς δὲ δύο τετραγώνων, καὶ τὸ ἐξῆς ὁ ὑπὸ προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω τοίνυν ὁ μὲν πρῶτος μ̄ δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ θ̄ ἵνα ὁ ὑπ' αὐτοῦ γεγομένος τετράγωνος μ̄ λς̄. προσλαβὼν συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. λοιπὸν ὄζι καὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβόντα συναμφότερον, καὶ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβόντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ις̄ ῑ μ̄ θ̄ ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἔτι ὁ ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ις̄ ῑ μ̄ δ̄ ἴσος τετραγώνῳ καὶ γίνεται πάλιν καὶ ἐνταῦθα διπλῆ ἡ ἴσωσις. καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ ις̄ ῑ μ̄ ῑ. ζητῶ οὖν πάλιν δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ὄζι ις̄ ῑ. μ̄ ῑ καὶ εἰσὶν ὁ μὲν ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. ὁ δὲ μ̄ ῑ. καὶ ὁμοίως τοῖς ἐν τῷ δευτέρῳ, ἢ τῆς συνθέσεως αὐτοῦ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ μείζονι, ἢ τῆς ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον τῷ ἐλάσσονι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κη̄. καὶ ἔστιν ὁ μὲν πρῶτος μ̄ δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ θ̄. ὁ δὲ τρίτος μοναδὸς κη̄. καὶ ποιοῦσι τὰ τῆς προτάσεως.

IN QVAESTIONEM XVII.

DEMONSTRANDVM est Porisma quod assumit Diophantus, nimirum.

Productus ex multiplicatione duorum quadratorum, quorum latera vnitate distant, adscita ipsorum quadratorum summa, quadratum facit.

Sunto quadrati A. B. quorum latera C. D. vnitate distent. Et productus ex A in B. esto G. cui addendo summam ipsorum A B. fiat H. Dico H esse quadratum. [1] Quia enim inter quadratos A B. cadit medius proportionalis productus ex C in D. [2] patet G esse quadratum producti ex C in D. At verò summa quadratorum A B [3] æquatur duplo producti ex C in D. & quadrato interualli ipsorum C D, hoc est vnitati. Igitur eadem summa quadratorum æquatur duplo lateris quadrati G vnitate aucto. Quamobrem cum addendo quadrato G duplum sui lateris vnitate auctum fiat H, [4] patet H esse quadratum, cuius latus vnitate superat latus ipsius G. Quod erat demonstrandum.

11. *Octaui.* 20. *septimi.* 4. 2. *perism.* C 2. D 3. A 4. B 9. G 36. H 49.

18. 1 *perism.*

Quod autem attinet ad positiones primi & secundi numeri quos Diophantus vult esse quadratos continenter proximos, puta 4 & 9. allucinatur etiam Xilander cùm putat alios quoslibet numeros potuisse poni per trigesimam primam secundi inuentos. Nam si huiusmodi ponantur qui non sint quadrati, hi quidem vni parti propositi satisfacient, sed duplicata æqualitas ad quam per hanc operationem deuenitur, inexplicabilis erit. Etenim vt patet, numeri pro primo & secundo positi, sunt iidem cum vnitatibus quæ reperiuntur tandem in numeris quadrato æquandis, vt in hypothesi Diophanti, cùm primum & secundum posuisset 4. & 9. Inuenit quadrato æquandos 10 N. + 9. & 5. N. + 4. Quare cùm hic Numerorum numeri sint inæquales, nec habeant rationem quadrati ad quadratum, necesse est vnitates adiunctas quadratas esse, alioquin resolui non posset æquatio. Cùm enim horum interuallum sit 5 N. + 5. tales deligendi sunt numeri, quorum mutuo ductu id fiat vt in quadrato semissis summæ illorum reperiantur vnitates 9. & in quadrato semissis interualli reperiantur vnitates 4. Vt scilicet vnitatibus in æquatione se mutuò abolentibus vna species vni æqualis remaneat, puta quadrati Numeris. Hoc autem fieri nequit, nisi in semisse summæ sint vnitates 3. latus in ipsius 9. & nisi in semisse interualli sint vnitates 2. latus ipsius 4. Proinde nisi 9. & 4. quadrati sint, rem perfici non posse est manifestum. Hinc facile est videre cur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. sumpserit Diophantus numeros 1 N. + 1 & 5. Nam vt ex dictis constat tales sumendi sunt vt summa vnitatum in ipsis contentarum sit 6. interuallum verò earundem 4. Quare per Canonem primæ primi reperientur vnitates ponendæ in illis numeris esse 1. & 5. Atqui posito altero multiplicatorum 5. euidens est alium esse non posse nisi 1 N. + 1. vt eorum mutuò ductu fiant 5 N. + 5. Posset quidem alter poni 1. alter verò 5 N. + 5. Sed horum summæ & interualli semissis quadrati secundum omnes suas partes maiores sunt propositi ad æquandum quadrato numeris, vnde inuenitur valor Numeri minor nihilo. Quare restat solos 5. & 1 N. + 1. quæstioni soluendæ idoneos reperiri. Attamen ostendemus ad quadragesimam quintam quarti hanc æquationem etiam infinitis modis resolui posse per modum vtendi duplicata æqualitate à nobis inuentum, quem ibi explicabimus. Quod ad Hypostasim tertij numeri spectat, is non solùm poni potest 1 N. sed etiam quilibet Numerorum numerus. Sed si iidem ponantur primus & secundus eadem semper continget solutio vt experiendo deprehendes. Quamobrem omnis solutionis varietas pendet ex primi & secundi positione, quæ infinitis modis fieri potest. Cùm sumi possint alij atque alij quadrati continenter proximi.

OBSERVATIO D. P. F.

EXtat huius quæstionis Diophanti problema in libro quinto quæstione quinta, Num vero problema sequens ipse Diophantus sciens prætermisit, an potius in aliquo tredecim librorum constructum erat, nescimus.

Inuenire 3. quadratos vt productus ex binorum multiplicatione adsumptâ eorundem summa quadratum faciat. Huius tamen quæstionis infinitas solutiones dare possumus.

En verbi gratia sequentem solutionem; satisfaciunt nempe problemati tres quadrati sequentes.

1. quadratus.

2. quadratus.

3. quadratus.

Imo & vlterius progredi & Diophanteam quæstionem promouere nihil vetat. Sequens enim problema generaliter & infinitis modis construximus.

Inuenire 4 numeros sub quibus binis quod fit planum adscitâ amborum summâ faciat quadratum.

Inueniantur per 5. propositionem lib. 5. tres quadrati vt quem bini faciunt planum adsciscens amborum summam faciat quadratum & sunto illi numeri quadrati;

Sunt ergo tres isti quadrati, tres primi numeri nostræ quæstionis, ponatur quartus 1 N. fient tria producta vna cum summis æqualia.

$\frac{11}{9}$ N + $\frac{11}{9}$ primum.
$\frac{23}{9}$ N + $\frac{23}{9}$ secundum.
$\frac{253}{9}$ N + $\frac{253}{9}$ tertium.

Hæc igitur tria æquanda quadrato, & oritur triplicata æqualitas cuius explicationem dedimus ad quæstionem 24. libri sexti.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros, vt productus ex binorum multiplicatione adsumens vtriusque summam faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus verò 3. & est productus eorum multiplicatione addito vtroque 4 N. + 3. æquandus quadrato. Esto quadrato 25. & fit 1 N. 5 $\frac{1}{2}$. ergo primus 5 $\frac{1}{2}$ erit, secundus 3. & vni postulatorum est satisfactum. Nam productus eorum multiplicatione adsumens vtrumque facit quadratum 25. Oportet igitur vt & productus ex secundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum adscito vtroque faciat quadratum. Ponatur tertius 1 N. & fit productus ex secundo in tertium vtroque adscito rursus 4 N. + 3. At productus ex tertio in primum addito vtroque fit 6 $\frac{1}{2}$ N. + 5 $\frac{1}{2}$. Horum vterque quadrato æquatur. Sed quia alterius & numerorum & vnitatum multitudo, iis qui sunt in altero est maior, neque eorum inter se ratio est quæ quadrati ad quadratum, inutilis est huiusmodi positio. Eò itaque deuentum est vt quærantur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione vtroque adscito faciat quadratum, & præterea ipsorum vnitate auctorum ratio sit quæ quadrati ad quadratum. Quandoquidem si numerus numeri quadruplum ternario excedat, ipsi vnitate aucti rationem habent ad inuicem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Pono primum 1 N. secundum verò 4 N. + 3. Restat vt productus eorum multiplicatione vtroque addito faciat quadratum. Sed productus eorum multiplicatione vtroque addito est 4 Q. + 8 N. + 3. hic ergo æquatur quadrato. Formo quadratum abs 2 N − 3. & fit quadratus 4 Q. + 9. − 12 N. & fit 1 N. $\frac{8}{12}$ seu $\frac{2}{3}$. erit igitur primus $\frac{2}{3}$. secundus $\frac{17}{3}$ seu 4 $\frac{2}{3}$. Ita postulatorum vni est satisfactum. Superest vt productus ex secundo in tertium, itemque productus ex tertio in primum addito vtroque

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν συναμφότερος ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν πρῶτος ς̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ γ̄. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτοὺς μῆ συναμφοτέρους ις̄ δ̄ μ̄ γ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ, ἴσων μονάδων κβ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ α̈ καὶ ἡμίσους. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ α̈ ℈ ἡμίσους. ὁ δὲ δεύτερος μονάδων γ̄. ℈ λέλυται ἐν τῷ ὑποδείγματι, ὁ γὰρ ὑπ' αὐτοὺς μῆ συναμφοτέρους ποιεῖ τὸν κβ̄ τετράγωνον. δεύτερος ἄρα καὶ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου, καὶ ἔτι ὁ ὑπὸ τρίτου ℈ πρώτου προσλαβόντα συναμφοτέρους ποιεῖ τετράγωνον. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου προσλαβὼν συναμφοτέρους πάλιν ις̄ δ̄ μ̄. γ̄. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου ℈ πρώτου προσλαβὼν συναμφοτέρους ς̄ ε̄ καὶ ἡμίσους μονάδων α̈ ℈ ἡμίσους, ἴσος ἑκατέρους τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τὸ πλευράζειν ἐν τῷ ἑτέρῳ τὸ πλῆθος τῆς ις̄ καὶ τῆς μονάδων. καὶ μηδὲ λόγον αὐτοὺς ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. χολάζει ἡ γεωμετρία ὑπόστασις. ἀπῆκται δὲ εἰς τὸ εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτοὺς μῆ συναμφοτέρους ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔτι οἱ μονάδι μείζονες αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τάσσω τὸν μὲν πρῶτον ς̄ ᾱ. τὸν δὲ δεύτερον ις̄ δ̄ μ̄ γ̄ δηλονότι τὸν ὑπ' αὐτοὺς μῆ συναμφοτέρους ἴσους εἶ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτοὺς μῆ συναμφοτέρους ἐστὶ δ̄ δ̄ ις̄ η̄ μ̄. γ̄ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ις̄ β̄. ϛ̄ μ̄ γ̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ δ̄ μ̄ ϛ̄ ϛ̄ ις̄ β̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ς̄ α̈. τουτέστι γ̄ ῑ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ῑ ὁ δὲ δεύτερος μβ̄ ῑ. τουτέστι δ̄. α̈ ῑ καὶ μένει ἐν τῷ ὑποδείγματι. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ὑπὸ δευτέρου καὶ τρίτου ℈ ἔτι τὸν ὑπὸ τρίτου καὶ πρώτου μῆ συναμφοτέρους ποιεῖν τετράγωνον. τάσσω τὸν τρίτον ς̄ ᾱ. ἔστι δὲ καὶ ὁ δεύτερος μ̄ δ̄. α̈ ῑ. γίνεται ὁ ὑπ' αὐτοὺς μῆ συναμφοτέρους ις̄ ῑ. α̈ ῑ. μ̄

δ̄ α ῑ μ̄ δ̄ ᾱ ῑ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ̄ κ̄ῑ. πάλιν ἐπεὶ ὁ μὲν τρίτος ἑνὶ ς̄ α̃. ὁ δὲ πρῶτος γ̄ ῑ. ἔσται ὁ ὑπ' αὐτῶν μ̄ συναμφοτέρων ς̄ ῑ γ̄ ῑ μ̄ γ̄ ῑ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω μ̄ ρ̄ πιῶ τὰ ς̄ ᾱ ῑ. α ῑ. μ̄ δ̄. α ῑ ὅπου τὸν κε̄. γίνονται ς̄ ρλ̄ μ̄ μ̄ ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ὁμοίως τὰ τῶ ς̄ ῑ γ̄ ῑ. μονάδας γ̄ ῑ. ὅπου τὸν ρ̄ γίνονται ς̄ ρλ̄ μονάδες λ̄. ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. ᾧ ὅξιν αὐτῶν ὑπεροχὴ μονάδες οὐ. καὶ ἔστι διπλῆ πάλιν ἰσότης, καὶ συνάγεται ὁ ἀριθμὸς ζ̄ ῑ. ἔστι ὁ μὲν τρίτος ζ̄ ῑ. ὧν δὲ καὶ ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ῑ. ὁ δὲ δεύτερος μβ̄ ῑ. καὶ πιθοι τὸ ὑπόταγμα.

faciat quadratum. Pono tertium 1 N. Est autem secundus $4\frac{1}{10}$. fit productus eorum multiplicatione addito vtroque $5\frac{1}{10}$ N + $4\frac{1}{10}$ æquandus quadrato: Esto quadrato 25. Rursus quia tertius est 1 N. primus autem $\frac{1}{10}$. erit productus eorum multiplicatione adsumpto vtroque $\frac{11}{10}$ N. + $\frac{1}{10}$. æquandus quadrato, puta 100. Duco $5\frac{1}{10}$ N. + $4\frac{1}{10}$ in 25. fiunt 130 N. + 105. æquanda quadratò. Similiter duco $\frac{11}{10}$ N. + $\frac{1}{10}$ in 100 fiunt 130 N. + 30. æquanda rursus quadrato. Et est eorum interuallum 75. & duplicata rursus occurrit æquatio, & fit 1 N. $\frac{1}{10}$. erit igitur tertius $\frac{1}{10}$. erat autem primus $\frac{1}{10}$ secundus $\frac{11}{10}$ & soluunt quæstionem.

IN QVAESTIONEM XVIII.

SVBTILE est hoc problema, & elegans modus vtendi duplicata æqualitate in eo continetur, quem cùm non perceperit Xilander, mirum non est si parum feliciter eum explicauit. Quamuis corruptos solutionis numeros benè restituerit. Nos ergo triplicem Diophanti positionem percurrentes notatu digna quæque percensebimus, & obscura dilucidemus.

Prima positione quæruntur duo numeri, vt productus illorum multiplicatione adscita summa eorundem, quadratum faciat, & reperiuntur $5\frac{1}{10}$ & 3. Quamobrem hos statuendo pro primo & secundo, ponitur tertius 1 N. quem ducendo sigillatim in priores duos, & productis addendo summam eorum ex quibus producuntur, fiunt quadrato simul æquandi 4 N. + 3 & $6\frac{1}{10}$ N + $5\frac{1}{10}$. Hæc autem æquatio inexplicabilis est, quia cùm numeri quadrato æquandi componuntur ex Numeris & vnitatibus, oportet vel numeros Numerorum æquales esse, vt contigit propositione decima quarta huius, vbi æquatur quadratis 10 N. + 54. & 10. N. + 6. vel numero Numerorum in æquali existente, oportet vnitates esse quadratas, vt in præcedente quæstione, vbi æquantur quadratis 10 N. + 9 & 5 N. + 4. vel denique (quod hucusque non accidit) cùm vnitates quadratæ non sunt, nec numeri Numerorum æquales, oportet saltem numeros Numerorum inter se rationem habere quadrati quam trademus infrà. Hoc igitur vt consequamur. Videndum est vnde prouenerint Numerorum ad quadratum, ob causam numeri 4 N. & $6\frac{1}{10}$ N. At prouenerunt ex ipsis initio inuentis numeris 3. & $5\frac{1}{10}$ vnitate auctis, cùm ducendo sigillatim in ipsos 1 N. & productis addendo 1 N. fiant 4 N. & $6\frac{1}{10}$ N. Corrigenda ergo est prima positio, & loco ipsorum 3. & $5\frac{1}{10}$ alij duo numeri sunt inueniendi, quorum productus adscita eorundem summa quadratum faciat, ita vt ipsi numeri vnitate aucti rationem inter se habeant quadrati ad quadratum. Id fiet per secundam positionem.

Secunda itaque positione vt inueniantur huiusmodi numeri, & alterum postulatorum per ipsas positiones consequamur, tali vtendum lemmate.

Si fuerint duo numeri quorum maior minoris quadruplum ternario excedat, ipsi numeri vnitate aucti erunt plani similes.

Cuius lemmatis demonstratio facilis est. Sit enim maior A E minor C D. & à maiore auferendo ternarium B E supersit A B quadruplus ad C D. Dico si vtrimque addatur vnitas E F. D G. totos A F. C G. esse planos similes. Cùm enim B F quaternarius sit quadruplus vnitatis D G. Est vt A B ad C D, ita B F ad D G. Quare & totus A F ad totum C G est in eadem ratione quadrupla; quod erat propositum. Ponitur ergo primus 1 N. secundus 4 N. + 3 vnde restat vt productus eorum multiplicatione adscita eorum summa quadratum faciat, & peracta æquatione fit 1 N. $\frac{1}{10}$. suntque quæsiti numeri $\frac{1}{10}$ & $4\frac{1}{10}$. quibus vtentes tertiam instituemus positionem.

A ..... B .. E. F
C .. D. G

12. *septimi.*

Tertia igitur positione quæsitorum ab initio numerorum ponitur primus $\frac{1}{10}$. Secundus $4\frac{1}{10}$. Tertius 1 N. vnde tandem proueniunt quadrato æquandi $5\frac{1}{10}$ N. + $4\frac{1}{10}$ & $\frac{11}{10}$ N. + $\frac{1}{10}$. Vbi quia Numerorum numeri sunt plani similes, sic explicabitur æquatio, sumantur duo quadrati in eadem ratione illorum numerorum, puta 100. & 25. ductoque minore in maiorem, & maiore in minorem fient iam quadrato æquandi 130 N. + 105. & 130 N. + 30. vbi numeri Numerorum sunt æquales, quia datis quatuor numeris proportionalibus, ex primo in quartum idem procreatur numerus, qui

19 *septimi.*

fit

fit ex secundo in tertium. Nec per huiusmodi multiplicationem immutatur æqualitatis ratio, quia quadrato per quemlibet quadratum siue multiplicato, siue diuiso, semper fit quadratus, vnde patet si 130. N. + 105. æquetur quadrato, & illius $\frac{1}{2}$. puta $5\frac{1}{2}$ N. + $4\frac{1}{4}$ fore quadratum. Et si 130. N. + 30. ponatur æquari quadrato, & eius centesimam partem, puta $\frac{13}{10}$ N. + $\frac{3}{10}$ fore quadrato æqualem. Sumpsit autem Diophantus quadratos 25. & 100. potiùs quàm alios quoscunque in eadem ratione, vt vitaret fractiones, alioquin expeditius res ageretur ducendo denominatorem rationis, puta $4\frac{1}{2}$. minorem numerum $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. vnde fierent quadrato æquandi $5\frac{1}{4}$ N + $4\frac{1}{4}$ & $5\frac{1}{4}$ N. + $1\frac{1}{4}$. Itaque subtili artificio res deducta est ad primum modum duplicatæ æqualitatis, quo vsus est Diophantus tum duodecima, & decima quarta secundi, tum decima quarta huius. Etenim ipsorum 130 N. + 105. & 130 N. + 30. Interuallum est 75. qui fit, si libet, ex 3. in 25. quorum summæ semissis quadratus 196. æquatur maiori 130 N. + 105. & fit N. $\frac{1}{2}$.

Cæterùm varietas in operatione & in solutione à multis oritur capitibus.

Primò enim inueniri possunt infiniti duo numeri, quorum productus adscita eorum summa quadratum faciat, quique vnitate aucti fiant plani similes. Tum quia, vt benè monet Xilander, quod de quadruplis asserit Diophantus, potest congruenter applicari omnibus aliis numeris seruantibus rationem quadrati ad quadratum; similiter enim si numerus numeri noncuplum superet octonario, addita vtrimque vnitate, fient plani similes; & si numerus numeri sedecuplum excedat numero 15 adscita vterque vnitate, fient etiam plani similes, & sic de aliis. Tum quia numeri quadrato æquandi, qualis est in hypothesi Diophanti 4 Q. + 8 N. + 3. latus diuersimodè fingi potest, vt patet. Secundò rursus in secunda eadem positione alia varietas considerari potest. Primus enim non solum potest poni 1 N. sed & quilibet Numerorum numerus lemmate tamen tradito vtendo congruenter in positione secundi. Vt si ponatur primus 2. N. erit secundus 8 N. + 3. vel 32 N. + 15. &c. si ponatur primus 3 N. erit secundus 12 N. + 3. vel 27 N. + 8 &c.

Tertiò in tertia positione iisdem manentibus primò & secundò potest etiam tertius infinities variari, & poni non solum 1 N. sed & quilibet Numerorum numerus, sed ad hoc intelligemus ampliari lemma traditum hoc pacto.

Si fuerint duo numeri, quorum maior quadruplum minoris ternario superet, & vterque ducatur in tertium numerum, productisque addatur idem tertius, fient duo plani similes.

Quod ita demonstrabitur.

A . . . . . , B . . . C
D . . E F 5
G 55. H 10
K 60 L. 15.

Sit A C superans ternario B C ipsum A B quadruplum ipsius D E. & tertius quilibet numerus F ductus in ipsos A C. D E. faciat G H. quibus addendo sigillatim ipsum F fiant K L. dico ipsos K L esse in ratione quadrupla, atque ideò planos similes. Etenim quia G. qui fit ex F. in A C. æquatur productis ex F. in A B. & B C. At productus ex F. in A B. quadruplus est producti ex F. in D E seu ipsius H. (cùm A B. D E. sint in quadrupla ratione) productus autem ex F. in ternarium B C. triplus est ipsius F. patet G. continere quadruplum ipsius H. & triplum ipsius F. quare si eidem G. addatur F. summa K. quadrupla est ipsorum H F. seu ipsius L. Quod demonstrandum erat. Non aliter idem ostendetur de alia qualibet ratione quadrati ad quadratum. Vt si A C. ponatur excedere noncuplum vel sedecuplum ipsius D E. ternario, concludetur & K ipsius L esse noncuplum vel sedecuplum, & sic de alijs. Quare manifestum est iisdem manentibus primò & secundò puta $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. Tertium poni posse 1 N. vel 2 N. vel 3 N. &c. 1. secundi.

Denique ipsa duplicata æqualitas infinitis modis resolui potest, prout sumentur alij atque alij numeri, quorum mutuo ductu fiat 75. dummodo horum summæ & interualli semissis quadrati maiores sint ipsis 105. & 30. vt docuimus ad duodecimam secundi.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE tres numeros, ita vt binorum multiplicatione productus dempta amborum summa sit quadratus. Vt in præcedenti ponatur primus 1 N. secundus vnitatum quotuis, & eodem modo in difficultatem inexplicabilem incidemus. Vt ergo multitudinem Numerorum ad multitudinem Numerorum habeamus sub ratione quadrati ad quadratum, eò deuoluitur res vt quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu qui fit dempta ambo-

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ὁ ἀπὸ δύο ὁπισιοῦν λείψας σωματόποιον ποιῇ τετράγωνον, ὁμοίως πρὸς τοὺτε. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α̅. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ὅσων δὴ ποτε, καὶ ἐλεύσομαι ὡταύτης εἰς ἄπορον. ἵνα οὖν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν ἔχωμεν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ς̄ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἁπτέται εἰς τὸ ζητῆσαι δύο ςς̄, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν γ̄ σωματόποιον ποιῇ τετραγώνους. καὶ ἐπὶ μονάδι ἐλάσσους αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετρά-

γωνος πρὸς τετράγωνον. ℭ ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν τετραπλάσιον ἢ ὡς ἀπὸ μονάδας ἔχει, οἱ μονάδι αὐτῷ ἐλάσσονες πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπεισήνεγκε τῆς μ̄ ᾱ. ἀφ' ἑκατέρου ἀφαιρεθέντος γίνεται ἔλαττωσις μ̄ δ̄ ϰ̄ ᾱ. ℭ δῆλον ὅτι ἀπὸ τετραπλασίων, λόγου τετραπλασίονος ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ καταλειπόμενος ἔσται τετραπλασίων, τουτέστιν ὡς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. τάσσω δὴ τὸν μὲν πρῶτον ς̄ ᾱ. μ̄ ᾱ τὸν δὲ δεύτερον ς̄ δ̄ μ̄ ᾱ. καὶ μένει ὁ ὑπ' αὐτῶν γ̄ συναμφότερον δ̄ δ̄ λείψει μ̄ ᾱ ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ β̄ λείψει μ̄ β. τουτέστι δ̄ δ̄ μ̄ δ̄ γ̄ ς̄ η̄. ϰ̄ γίνεται ὁ ς̄ ῑ̄ ᾱ. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιγ̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος κη̄ ᾱ. ϰ̄ λέλυται ἐν τῷ ὀπιζομένῳ. ℭ ἐπεὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔστι ιγ̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος γ̄ ℭ ἥμισυ. τάσσω τὸν τρίτον ς̄ ᾱ. καὶ ὁ ὑπὸ δευτέρου ϰ̄ τρίτου συναμφότερος ς̄ γ̄ ᾱ ᶜ. μένει ς̄ λείψας τὸ συναμφότερον ς̄ ᾱ μ̄ γ̄ ᾱ μ̄ γ̄ ᾱ ᶜ. μένει ς̄ β̄. ᾱ ᶜ λείψει μ̄ γ̄. ᾱ ᶜ. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω μονὰς δ̄. ὁ δὲ ὑπὸ τρίτου ℭ πρώτου γινέσθω ς̄ ιγ̄ ᾱ. λείψας συναμφότερον γίνεται ς̄ η̄ ᾱ. λείψει μονάδων ιγ̄ ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω ις̄. ταῦτα ἐκκαιδεκάκις γίνονται ς̄ ᾱ λείψει μονάδων κε̄. ἴσοι τετραγώνῳ ℭ ὁμοίως αἱ ς̄ β̄. μ̄ λείψει μ̄ γ̄ ᾱ ᶜ τετράκις, γίνονται ς̄ ῑ̄ λείψει μ̄ ιδ̄ ἴσοι πάλιν τετραγώνῳ. ϰ̄ ἔστω αὐτῷ ὑποπροχὴ μ̄ ιβ̄. οὗτα τὸ ὑπὸ μ̄ β̄ καὶ μ̄ ς̄ συναμφότερον τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ̄ ις̄ ἴσαι τῷ μείζονι. τουτέστι ς̄ ῑ̄ λείψει μ̄ ιδ̄. ℭ γίνεται ς̄ μ̄. γ̄. ἔστι ὁ μὲν τρίτος μ̄ γ̄ τουτέστι κδ̄ ᾱ. ἔχομεν δὲ τὸν μὲν πρῶτον μ̄ ιδ̄ ᾱ. τὸν δὲ δεύτερον μονάδων γ̄. ᾱ ᶜ τουτέστι κη̄ ᾱ. καὶ πεποίηται τὸ προβλημα.

rum ſumma ſit quadratus, & præterea ipſi vnitate multati rationem habeant quam quadratus ad quadratum. Enim vero ſi numerus alterum quater, dempto ternario continet, ij vnitate multati rationem habent inter ſe quam quadratus ad quadratum; quia ſcilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis; & patet ſi à quadruplis quadrupla, auferantur, reſidua eſſe quadrupla, atque ideo in ratione quadrati ad quadratum. Pono igitur primum 1 N. + 1. ſecundum 4 N. + 1. & fit productus eorum multiplicatione, dempto vtroque 4 Q. − 1 æqualis quadrato à latere 2 N. − 2. hoc eſt 4 Q. + − 4. − 8 N. & fit 1. N. 2. erit ergo primus $\frac{11}{4}$ ſecundus $\frac{15}{4}$. & ſatisfit vni poſtulatorum. Et quoniam primus eſt $\frac{11}{4}$ ſecundus $3\frac{1}{2}$. pono tertium 1 N. & fit ſecundo in tertium $3\frac{1}{2}$ N. & vtroque detracto, puta 1 N. + $3\frac{1}{2}$ reſtat $2\frac{1}{2}$ N. − $3\frac{1}{2}$ æquandus quadrato. Eſto quadrato 4. Qui autem fit ex tertio in primum eſt $\frac{1}{4}$ N. & vtroque dempto reſtat $\frac{3}{4}$ N. − $\frac{11}{4}$ æquandus quadrato. Eſto ipſi 16. & per hunc iſtud multiplicetur fit 10 N. − 26. æquandus quadrato. Similiter $2\frac{1}{2}$ N. − $3,\frac{1}{2}$. ducantur in 4. fit 10 N. − 14. æqualis quadrato. Horum interuallum 12. quod fit mutuo ductu ipſorum 2. & 6. quorum ſummæ ſemiſſis in ſe facit 16. æqualem maiori, puta 10 N. − 14. & fit 1 N. 3. Ergo tertius eſt 3. ſeu $\frac{24}{1}$. habebamus autem primum $\frac{11}{4}$. ſecundum $3\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{15}{4}$. & ſoluunt quæſtionem.

IN QVAESTIONEM XIX.

OMNIA quæ ad præcedentem adnotata ſunt, hic etiam locum habent. Modus vtendi duplicata æqualitate idem eſt, & lemma quod aſſumit Diophantus eadem ratione demonſtratur, ipſiuſque demonſtrationis fundamentum attigit Diophantus his verbis. *Quia ſcilicet vtrimque ablata vnitate, fit diminutio hinc quaternarij, inde vnitatis, & patet ſi à quadruplis quadrupla auferantur, reſidua eſſe quadrupla.*

Operationis quoque & ſolutionis varietas totidem modis contingere poteſt, vt diutiùs pigeat immorari in re manifeſta.

QVÆSTIO XX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐάν τι ἑκατέρου πειῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ

INVENIRE duos numerus, vt productus eorum multiplicatione ſiue alterutrum, ſiue ſummam ipſorum adſciſcat,

faciat quadratum. Ponatur alter 1 N. alter 4 N. — 1. Quoniam si numerus sit numeri quadruplus dempta vnitate, productus eorum multiplicatione adsumens minorem facit quadratum. Iam duo postulatorum restant implenda, vt scilicet productus eorum multiplicatione adscito secundo, & vtroque simul faciat quadratum. Sed productus adsumens secundum fit 4 Q. + 3 N. — 1. æqualis quadrato. Et idem productus vtroque addito fit 4 Q. + 4 N. — 1. æquandus quadrato. Et est duplicata æqualitas. Horum interuallum 1 N. quod fit ex $\frac{1}{2}$ in 4 N. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Erit igitur primus $\frac{9}{16}$. secundus $\frac{25}{16}$. & soluunt quæstionem.

μῷ ς̄ ᾱ. ὁ ᾗ ς̄ς̄ δ̄ τ̄ μ̄ ᾱ. ἐπιδήπερ ἐστὶ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ἡ τετραπλασίων ὢν δ̄ μονάδα, ὑφ' αὑτῷ ποιῆσαι τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ τετράγωνον. ἔξεις δὴ καὶ τὰ λοιπὰ δύο ὁπτάγωνα κατασκευάσαι. ὥστε ὁ ὑπ' αὐτῷ ποιῶν ὁ δεύτερον, καὶ ἓν συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῷ ποιῶν τὸν δεύτερον γίνεται δ̄ ς̄ ᾱ̄ λείψει μ̄ ᾱ̄. ἴσος τετραγώνῳ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῷ ποιῶν συναμφότερον γίνεται δ̄ δ̄ λείψει μ̄ ᾱ̄. ἴσος τετραγώνῳ, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, ἐπεὶ ἴσει αὐτῷ ὑπάρχει ἀριθμὸς εἷς, καὶ ἀφῄρηται ὑπὸ μ̄ ᾱ̄ ᾱ̄. καὶ ἀριθμῷ δ̄. καὶ συναίρεται ὁ ς̄ ξ̄ᾱ̄ ᾱ̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ξ̄ᾱ̄ ᾱ̄. ὁ δὲ δεύτερος λ̄ς̄ ᾱ̄ᾱ̄, καὶ ποιοῦσι τὸ προβλημα.

IN QVAESTIONEM XX.

MAGNA est conformitas huius quæstionis cum vigesima-septima secundi. Vbi quæruntur duo numeri, quorum productus adscito alterutro quadratum faciat. Sed hîc præterea postulatur vt idem productus adsumpta amborum summa faciat quadratum. Itaque suas positiones eodem modo instituit Diophantus, & eorundem lemmatum quæ ibi demonstrauimus hîc vsus esse potest.

Porro notandus hic modus vtendi duplicata æqualitate, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum constat ex solis numeris. Tunc enim necesse est in numeris quadrato æquandis reperiri quadratorum numerum quadratum, vt hîc 4 Q. Numeros autem quorum mutuo ductu fiat interuallum 1 N. accipit Diophantus 4 N. & $\frac{1}{2}$ ob similem causam illius quam attulimus ad decimam quintam huius. Oportuit enim talem sumi numerorum numerum, cuius semissis quadratus efficeret 4 Q. Quare debuit pro altero sumi 4 N. vnde sequitur alterum necessario esse $\frac{1}{4}$ vt eorum mutuo ductu fiat 1 N.

Cæterum tota diuersitas in primis positionibus consistit, quas diuersimodè fieri posse constat auxilio lemmatum ad vigesimam septimam secundi allatorum.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue alterutro siue vtriusque summa multatus quadratum faciat. Ponatur alter 1 N. + 1. alter 4 N. Quandoquidem si numerus numeri sit quadruplus, demptis quatuor vnitatibus, productus eorum multiplicatione detracto maiore quadratum facit. Restat itaque vt productum multiplicationis siue minore, siue vtriusque summa multatus, faciat quadratum. Sed productum illud dempto minore fit 4 Q. + 3 N. — 1. Et idem productum dempto vtroque fit 4 Q. — 1 N. — 1. Horum vtrumque quadrato æquale est. Interuallum 4 N. Statuo illud mutuo ductu producentes 4 N. & 1. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Erit ergo primus 2 $\frac{1}{2}$. secundus 5. & manifesta est demonstratio.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐπί τε λήψῃ ἑκάτερον, ἐπί τε συναμφότερον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μὲν ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. ὁ δὲ ς̄ς̄ δ̄. ἐπιδήπερ ἐστὶ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ἡ τετραπλασίων ὢν δ̄ μ̄ δ̄. ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἢ μείζονα ποιεῖ τετράγωνον λοιπὸν δὴ ἢ ὑπ' αὐτῶν ἢ τὸν ἐλάσσονα ποιεῖν τετράγωνον. καὶ ἔτι ἢ ὑπ' αὐτῶν λείψαντα συναμφότερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ μὲν ὑπ' αὐτῶν λείψας τὸν ἐλάσσονα γίνεται δ̄ δ̄ ς̄ς̄ γ̄ λείψει μ̄ ᾱ. ὁ δὲ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον δ̄ δ̄ λείψει ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. ἴσος τετραγώνῳ. καὶ ἴσει αὐτῷ ὑπάρχει ς̄ς̄ δ̄. τάσσω τὸν μὲν ς̄ς̄ δ̄. ἐξ ἀνάγκης ὁ ς̄ μ̄ ᾱ. ᾱ ᾱ. καὶ ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ β̄. ᾱ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ᾱ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXI.

EADEM aut similia dici possunt de hac quæstione, quæ de superiore dicta sunt vide quàm sit conformis vigesimæ octauæ secundi, & quomodo vtrobique eodem vtens lemmate Diophantus, eodem modo suas instituat positiones. Modus vtendi duplicata æqualitate idem est, quo vsus est in præcedente, & easdem ob causas ad conficiendum interuallum 4 N. sumpsit 4 N. & 1.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τῶ συγκειμένω ἐκ τῆ τετάρων τετράγωνο, ἐάν τι προσλάβῃ ἕκαστον, ἐάν τι λείψῃ ποιῆ τετράγωνον. ἐπὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐάν τι προσλάβῃ ἡ δὶς ὑπὸ τῆ περὶ τὴν ὀρθὴν, ἐάν τι λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. ζητῶ πρότερον τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. τὸ δ' αὐτὸ δεῖ τετράγωνον πολλαπλασιεῖν τε ἑάυτὸ εἰς δύο τετραγώνους. ἐκ ἐμάθομεν ἢ δυάδα τετράγωνον διελεῖν εἰς β τετραγώνους ἀπειραχῶς. νῦν οὖν ὅσα θέλομεν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν οἷον γ. δ. ε. ι. ιβ. ιγ. καὶ πολλαπλασίασον ἕκαστον τὸν ἐκκειμένων δὶς τὸν ὑποτείνουσαν τῶ ἑτέρου, καὶ ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τρίγωνον λϛ. ρβ. ξι. τὸ δεύτερον κα. ξ. ξι. καὶ ἔστι ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἐπὶ δὲ φυσικῶς ὁ ξι. διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους διχῶς εἴς τε τὸν ις. καὶ τὸν μϛ. ἀλλὰ μὲν ἐκ τὸν ξϛ. ἐκ τῶν μονάδα. τῶτο δὲ συμβαίνει ἐπεὶ ὁ ξι ἀριθμὸς σύγκειται ὑπὸ τῶ ιγ καὶ τῶ ι. ὧν ἕκατος διαιρεῖται εἰς δύο τετραγώνους. νῦν τῆ ἐκκειμένων τῶτε μϛ. καὶ τῶ ις. λαμβάνω τὰς πλευρὰς, εἰσὶ δὲ ζ καὶ δ. ἐκ πλάσω τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὑπὸ ἀριθμῶν δύο τῶτε ζ καὶ τῶ δ. καὶ ἔσι λγ. νϛ. ξι. ὁμοίως καὶ τῶ ξϛ. καὶ τῆς μονάδος αἱ πλευραὶ ᾖ καὶ α. καὶ πλάσω πάλιν ἀπ' αὐτῶν ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ αἱ πλευραὶ ις. ξγ. ξι. καὶ γίνονται τέσσαρα τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσας ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας. ἐλήφθω οὖν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα, τάσσω τὸν μὲν συγκείμενον ἐκ τῆ τεσσάρων ις ξι. ἕκαστον δὲ τῶτων τῆ τετάρων δυνάμεων ποσοῦτον, ὅσων ἐσι τετραπλασίων τῶ ἑνὸς ἑκ, τὸν μὲν πρῶτον δ^ν ἑνς. τὸν δὲ δεύτερον δ^ν γ. τὸν τρίτον δ^ν γχιϛ καὶ ἐπὶ τὸν τέταρτον δυνάμεις βις. καὶ εἰσὶν αἱ τέσσαρες δ^ν μϋ. α. βϡξϋ. ἴσαι ις ξι. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ν

INVENIRE quatuor numeros vt compositi ex omnibus quadratis, singulorum tam adiectione quàm detractione faciat quadratum. Quoniam in quolibet triangulo rectangulo quadratus hypotenusæ siue auctus, siue multatus duplo eius quod fit è multiplicatione laterum circa rectum, facit quadratum. Quæro primum quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Hoc ipsum verò est, quadratum aliquem diuidere quater in duos quadratos. Atqui didiscimus datum quadratum diuidere in duos quadratos infinitis modis. Nunc ergo exponamus duo triangula rectangula in minimis numeris, quales sunt 3. 4. 5. & 5. 12. 13. & multiplicetur vnumquodque ipsorum per hypotenusam alterius, & erit primum triangulum 39. 52. 65. secundum 25. 60. 65. & sunt rectangula æquales habentia hypotenusas. Adhuc autem suapte natura numerus 65. diuiditur bis in duos quadratos, nempe in 16. & 49. Et rursus in 64. & 1. quod ei contingit quia fit ex multiplicatione mutua 5. & 13. quorum vterque in duos diuiditur quadratos. Nunc expositorum 49. & 16. sumo latera, sunt autem 7. & 4. & formo triangulum rectangulum à duobus numeris 7. & 4. & est 33. 56. 65. Similiter ipsorum 64. & 1. latera sunt 8. & 1. à quibus rursus formo triangulum rectangulum, cuius latera sunt 16. 63. 65. & fiunt quatuor triangula rectangula æquales habentia hypotenusas. Refero me igitur ad propositam initio quæstionem, & pono compositum ex quatuor numeris 65 N. Quemlibet verò ipsorum quatuor pono tot quadratorum quot continet vnitates quadruplum areæ. Primum quidem 4056 Q. Secundum autem 3000. Q. Tertium 3696 Q. Quartum denique 2016 Q. & est il-

lorum ſumma 12768 Q. æqualis 65 N. & fit 1 N. ,,,. Ad poſitiones. Erit primus 17136600. Secundus 12675000. ſub eiuſdē partis denominatione. Tertius 15615600. ſub eiuſdem partis denominatione. Quartus 8517600. ſub eiuſdem partis denominatione. Eſt autem partis denominator 163021824.

ξε μυ. ς. μὰ ςτξε. ὅτι τὰς ὑποσάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρώτῳ μᾱ ᾱψγ. μονάδι, ςχ. ὁ δὲ δεύτερος μᾱ. αρξζ. μ' ι μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος μᾱ. αφξα. μ' ιχ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τέταρτος μᾱ. ωνα. μ' ζχ. μερίου τοῦ αὐτοῦ. τὸ δὲ μόριον μυ. ᾱ. μᾱ. ςτβ. μ' ᾱωκδ'.

IN QVAESTONEM XXII.

PVLCHERRIMVM eſt hoc problema & raræ ſubtilitatis, in quo cùm multum deſudarit Xilander, perfectam tamen eius enodationem afferre non potuit, deſtitutus ſcilicet ope poriſmatum quæ ad hoc requiruntur. Quoniam ergo gloriam rei peroſcuræ explicandæ nobis libenter reliquit, nos eam libentiùs amplectamur. Et vt omnia clariora fiant, ſingula quæque notatu digna ordine proſequamur.

Aduerte itaque primò lemma quod aſſumit Diophantus de triangulis rectangulis idem ferè eſſe licet aliis verbis enunciatum, quod iam vſurpauit trigeſima prima ſecundi, vbi & monuimus, quod hic repetere non pigebit, illo nil aliud contineri, quàm quod oſtenditur quarta ſecundi Euclidis, & quarta ſecundi poriſmatum. Etenim per quartam ſecundi, conſtat ſummam quadratorum à duobus numeris adſumpto duplo producti laterum efficere quadratum ſummam laterum. At per quartam ſecundi poriſmatum patet duplum producti laterum detractum à ſumma quadratorum, relinquere quadratum interualli laterum. Quare cùm in triangulo rectangulo quadratus hypotenuſæ ſit æqualis quadratis laterum circa rectum, manifeſtum eſt, quod ait Diophantus, quadratum hypotenuſæ ſiue adſumpto, ſiue detracto duplo producti laterum circa rectum, facere vtrimque quadratum. Proinde rectè Diophantus ſummam quatuor quæſitorum numerorum conſtituit hypotenuſam alicuius trianguli rectanguli, vnumquemque verò ipſorum numerorum ponit duplum producti laterum circa rectum, ſeu quadruplum areæ trianguli, vt conſtat ex tertia definitione tertij poriſmatum, ſic enim optimè ſatisfit poſtulatis. Quamobrem vt ipſi numeri diuerſi reperiantur, ſupereſt vt inueniamus quatuor triangula rectangula, quorum eadem ſit hypotenuſa.

Aduerte igitur ſecundò, vt benè monet Diophantus, reperire quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenuſam, nil aliud eſſe quàm quadratum quemlibet diuidere quater in duos quadratos. Quare niſi fractiones in operando vitare voluiſſet, poterat rem abſoluere per octauam ſecundi, qua docuit quadratum quemlibet infinities diuidere in duos quadratos. Vt autem fractiones in operatione vitentur, ſubtili ſanè artificio quadratum inueſtigat author, qui quater diuidatur in duos quadratos integros. Exponit ſcilicet duo triangula rectangula non ſimilia, puta 3. 4. 5. & 5. 12. 13. Tunc vtriuſque latera per alterius hypotenuſam multiplicans, inuenit alia duo triangula, quorum eadem eſt hypotenuſa, nimirum 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Nam & hæc eſſe latera trianguli rectanguli patet per primam tertij poriſmatum, cùm fiant lateribus trianguli rectanguli per eundem numerum multiplicatis. Quod autem dixi exponenda eſſe triangula non ſimilia, id factum eſt, quia ſi triangula ſimilia ſint, non iam alia duo hac ratione formabuntur ab his triangula, ſed vnicum duntaxat. Quod ſic demonſtratur. Sint triangula ſimilia A B C. D E F. & ducta hypotenuſa F in ſingula alterius latera fiat triangulum G. H. K. dico idem triangulum G H K, & non aliud, fieri, ſi hypotenuſa C. ducatur in ſingula latera alterius D E F. Nam primo ex hypotheſi ex C in F fiet K. Deinde ' quia eſt A ad D vt C ad F. fiet, vtique ' idem G ex C in D qui fit ex A in F. ſimiliter quia eſt B ad E vt C ad F. fiet rurſus idem H ex C in E qui fit ex B in F. Quare conſtat propoſitum.

A 3. B 4. C 5.
D 6. E 8. F 10.
G 30. H 40. K 50.

defin. 4. 3. poriſm. 1. ſeptimi.

Aduerte tertiò. Vt rurſus inueniatur alia duo triangula, quorum ſit eadem hypotenuſa 65. Diophantum vti poriſmate, quod demonſtrauimus propoſitione ſeptima libri tertij nimirum. Si duo numeri ex duobus quadratis compoſiti inter ſe ducantur, productus componetur bis ex duobus quadratis. Hac de cauſa triangula initio expoſita ita delegit, author, vt cuiuſlibet hypotenuſa componatur ex duobus quadratis, puta 5. ex quadratis 1. & 4. ac 13. ex quadratis 4. & 9. vnde optimè concludit 65. componi bis ex duobus quadratis, nimirum ſemel ex 16. & 49. Atque iterum ex 1. & 64. Hi autem quadrati vt reperiantur oſtendit ſeptima tertij poriſmatum. Sed illius limitationes attendendæ ſunt, quarum prima requirit, vt quilibet expoſitorum numerorum componatur ex duobus quadratis inæqualibus, nam ſi alter ex duobus æqualibus quadratis compoſitus ſit, productus eorum multiplicatione componetur tantum ſemel ex duobus quadratis, vt ſi ſumantur 5. & 8 quorum 8 componitur ex æqualibus quadratis 4. & 4. erit productus 40. ſemel tantùm ex duobus quadratis compoſitus, puta ex 36. & 4. ſecunda verò limitatio requirit, vt expoſiti numeri componantur ex quadratis minimè pro-

portionalibus, alioquin idem sequitur incommodum, vt si sumantur 5. & 20. compositi ex quadratis proportionalibus 1. 4. 4. 16. erit productus 100. ex duobus quadratis semel duntaxat compositus, videlicet ex 64. & 36. Quæ omnia loco citato demonstrantur.

☞ Aduerte quarto. Inuentis quadratis 16. & 49. itemque 1. & 64. ex quibus 65. componitur ex iis Diophantum formare triangula rectangula duo, quorum eadem est hypotenusa 65. eo quem demonstrauimus modo tertia vel quinta tertij porismatum. Etenim si per tertiam libeat operari à quadratis 16. & 49. fiet triangulum cuius hypotenusa erit summa ipsorum puta 65. basis vero interuallum eorundem puta 33. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis, puta 56. Rursus à quadratis 1. & 64. formabitur triangulum, cuius hypotenusa erit summa ipsorum, puta 65. Basis verò interuallum eorundem, puta 63. Perpendiculum autem erit duplum medij proportionalis, puta 16. & sic habebuntur triangula duo quæsita 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Quæ eadem reperientur per quintam tertij porism. Verùm hic notandus est Casus, cùm productus ex mutuo ductu duorum numerorum ex duobus quadratis, compositorum, componitur quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componitur ex duobus quadratis æqualibus, vt sumptis 5. & 10. productus 50. componitur quidem semel ex quadratis 1. & 49. inæqualibus. Sed componitur iterum ex æqualibus 25. & 25. Vnde per hanc compositionem inutilis redditur operationi Diophanti, non enim inde concludi potest eius quadratum componi ex duobus quadratis, cùm ipsorum 25 & 25. nullum sit interuallum, quod deberet esse latus vnius quadratorum illorum. Porro id semper accidit, quando tales sumuntur duo numeri ex duobus quadratis compositi, vt quod fit ex interuallo laterum vnius, in interuallum laterum alterius, æquetur duplo producti ex minore latere in minus latus. Quod ita demonstratur.

C 6.
A 3. B 9. M 90.
F 1.
D 1. E. 2. N 5.
G 3. H 9. K 6. L 18.

Sint A B latera quadratorum vnius, quorum interuallum C. & sint D E latera quadratorum alterius, quorum interuallum F. & productus ex C. in F æquetur duplo producti ex A in D. Porro compositus ex quadratis ipsorum A B esto M. & productis esse quadratis ipsorum 1 D E esto N. dico productum ex M in N. componi quidem bis ex duobus quadratis, sed vna compositione componi ex duobus æqualibus quadratis. Etenim ducto D in ipsos A B, fiant G H. & ducto E in eosdem A B. fiant K L. Patet ex demonstratis septima tertij porismatum, , productum ex M. in N. componi tum ex quadrato summæ amborum G L. & & ex quadrato interualli ipsorum G K. Tum ex quadrato summæ amborum H K. & ex quadrato interualli ipsorum H L. Verùm aio summam ipsorum H K. æquari interuallo ipsorum G L, ac proinde productum ex M in N. hac compositione constare ex duobus quadratis æqualibus. Quia enim L fit ex E in B. seu ex duobus D F. in duos A C. si hinc auferatur productus ex D in A. puta G. patet interuallum ipsorum G L. æquari productis ex A in F, ex C in D, & ex C in F. & loco producti ex C in F. sumendo duplum producti ex A in D illi æqualem ex hypothesi, erit prædictum interuallum æquale duplo producti ex A in D. & productis ex D in C. & ex A in F. Sed eisdem productis patet æqualem esse summam ipsorum H K. Nam H fit ex D in B. seu ex D in A. & ex D in C. At K fit ex A in E. seu ex A in D. & ex A in F. Vnde constat duorum H K. summam æquari duplo producti ex A in D, & productis ex D in C. & ex A in F. Igitur ipsorum H K summa æquatur interuallo ipsorum G L. Quod demonstrandum erat.

Aduerte quintò. Textus Græci lacunas à me esse repletas, tum deficientes numeros restituendo, tum corruptos emendando, & ne fortè hæreas in numeris Græcis, moneo Diophantum maximos numeros in quibus ingens Myriadum multitudo continetur, sic exprimere vt Myriadas à reliquis vnitatibus distinguat perspicuitatis ergo, signum autem Myriadibus apponit $\mu\acute{\upsilon}$ Myriadibus myrandum $\mu\mu$. duplex μ. At reliquis vnitatibus signum consuetum $\mu\tilde{o}$. Sic vides numerum 163021824. sic ab eo exprimi, $\mu\mu\sigma'$. ideſt Myrias vna myriadum. $\mu\eta.\ \varsigma\tau\zeta''$ id est Myriades 6302. $\mu\tilde{o}\ \alpha\omega\kappa\delta'$. ideſt vnitates 1824. Et sic de aliis.

Aduerte postremò, sine porismate Diophanti æquè benè inueniri posse in integris quatuor triangula rectangula eandem habentia hypotenusam, auxilio decimæ tertij porismatum. Etenim expositis triangulis non similibus 3.4.5. & 5.12.13. si cum Diophanto formes ex his alia duo ducendo vtramque hypotenusam in alterius latera, habebis 39. 52. 65. & 25. 60. 65. Tum si per decimam tertij porism. ex iisdem triangulis prius expositis formes alia duo modo ibi tradito, fient vtique 33. 56. 65. & 16. 63. 65. Immò ex ibi demonstratis licebit ampliare Porisma Diophanti, & illud extendere non solùm ad numeros ex duobus quadratis compositos, sed etiam ad duos ex duobus planis similibus compositos, & vniuersalissimè proponere.

Si numerus ex duobus planis similibus compositus, ducatur in alium ex duobus planis similibus compositum, qui non sint proportionales iis ex quibus primus componitur; producetur numerus cuius quadratus componetur quater ex duobus quadratis.

A 24. B 45. C 51.
D 9. E 12. F 15.

Sint enim C F ex duobus planis similibus vterque compositus, qui non sint proportionales. Et ex C in F fiat T. dico T quater componi ex duobus quadratis. Etenim quia C componitur ex duobus planis similibus, erit hy-

G 693. K 324. L 756. M 117. N 675. P 360. Q 612. R 459. T 765

potenusa trianguli rectanguli per tertiam tertij porismatum. Sint ergo latera circa rectum A. B. similiter F ostenditur hypotenusa trianguli rectanguli, cuius latera circa rectum D E. Igitur à duobus triangulis A B C D E F. formentur alia duo ducendo hypotenusam vtramque in alterius latera, erunt triangula N P T. Q R T. Rursus formentur alia duo per decimam tertij porismatum, erunt hæc G K T. L M T. Quare constat propositum.

Cæterum animaduersione quoque dignum est, quæstionem hanc ad quotlibet numeros eadem arte extendi posse, cum si fractiones quidem minimè vitentur, quilibet quadratus infinitis modis diuidi possit in duos quadratos. Si verò etiam per integros rem absoluere libeat, facilè sit Diophanti artificium imitando quadratum reperire, qui quoties quis jusserit componatur ex duobus quadratis integris, quandoquidem per porisma quod assumit Diophantus, quodque demonstratum est septima tertij porismatum licet numerum inuenire quoties quis jusserit ex duobus quadratis compositum. Nam sicut per illud porisma inuenitur numerus bis compositus ex duobus quadratis, ducendo numerum semel ex duobus quadratis compositum, in alium item semel ex duobus quadratis compositum, ita si numerus bis compositus vt 65. ducatur in alium semel compositum, quales sunt 5 13. 10. 17. productus ter aut quater ex duobus quadratis componetur, ter quidem si 65. ducatur in 5. vel in 13. ex quorum mutuo ductu ipse fit, vel in aliquem illorum multiplicem. Quater autem si secus. Verbi gratia productus ex 5. in 65. puta 325. ter tantum componitur ex duobus quadratis, nempe ex 225. & 100. ex 324. & 1. ex 289. & 36. Quod accidit quia 5. & 65. componuntur ex duobus quadratis. Quare si intelligamus 65. componi ex 49. & 16 necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi ex duobus quadratis qui sunt 225. & 100. 324. & 1 Rursus verò si capiamus 65. vt compositum ex 64. & 1. necesse est productum ex 5. in 65. puta 325. componi etiam bis ex duobus quadratis, nimirum ex 289. & 36. & ex 225. & 100. Sed quia hi coincidunt cum duobus ob priorem multiplicationem inuentis, constat 325. ter tantùm diuidi in duos quadratos. At si ducas 17. in 65. fiet 1105. quater compositus ex duobus quadratis nimirum ex 576. & 529. quorum latera 24. 23. ex 1024. & 81. quorum latera 32. 9. ex 961. 144. quorum latera 31. & 12. Ac demum ex 1089. & 16. quorum latera 33. & 4.

Quod si velis numerum sexies compositum ex duobus quadratis, sume aliquem ter compositum vt 325. eumque ducito in semel compositum, dum non sit aliquis eorum qui metiuntur 325. vel multiplex eorum, sed sume v. g. 17. quo ducto in 325. fit 5525. sexies compositus ex duobus quadratis, nempe ex 3025. 2500. quorum latera 55. 50. ex 3844. 2681. quorum latera 62. 41. ex 4900. 625. quorum latera 70. 25. ex 5041. 484. quorum latera 71. 22. ex 5329. 196. quorum latera 73. 14. Ac demum ex 5476. 49. quorum latera 74. 7.

Ita si velis numerum octies ex duobus quadratis compositum, duces compositum quater in compositum semel, vel bis compositum in bis compositum, dummodo inter eos nulla sit communicatio, & sic in infinitum. Qua de causa si ducas 5525. sexies compositum, vt ostensum est, in 1073. bis compositum, nimirum ex binis quorum latera 32. & 7. Et rursus ex binis quorum latera 28. 17. fiet 5928325. compositus (quod mirabile est) viciesies & quater ex duobus quadratis, quorum accipe binorum latera.

2110	2426	2417	2390	2362	2191	1985	2118
1215	207	294	465	591	1062	1410	1201
2319	2335	1823	1953	2415	2434	2271	2385
742	690	1614	1454	310	63	878	490
2282	2202	2065	2238	1746	1890	1633	2433
849	1039	1290	959	1697	1635	1896	94

OBSERVATIO D. P. F. AD COMMENTARIVM, præcipuè ad locum illum, Aduerte tertio, &c.

NVmerus primus qui superat vnitate quaternarii multiplicem semel tantùm est hypotenusa trianguli rectanguli, eius quadratus bis, cubus 3. quadratoquadratus 4 &c. in infinitum.

Idem numerus primus & ipsius quadratus componuntur semel ex duobus quadratis: eius cubus & quadratoquadratus, bis: quadratocubus & cubocubus ter &c. in infinitum.

Si numerus primus ex duobus quadratis compositus ducatur in alium primum

etiam ex duobus compositum quadratis, productum componetur bis ex duobus quadratis: si ducatur in quadratum eiusdem primi: productum componetur ter ex duobus quadratis: si ducatur in cubum eiusdem primi productum componetur quater ex duobus quadratis, & sic in infinitum.

Hinc facile est determinare quoties numerus datus sit hypotenusa trianguli rectanguli, sumantur omnes primi quaternarij multiplicem vnitate superantes qui datum numerum metiantur v. g. 5. 13. 17. Quod si potestates dictorum primorum metiantur datum numerum, Disponantur vna cum reliquis loci laterum v. g. metiantur datum numerum 5. per cubum, 13. per quadratum & 17. per latus simpliciter.

Sumantur exponentes omnium diuisorum Nempe numeri 5. exponens est 3. propter cubum, numeri 13. exponens est 2. propter quadratum & numeri 17. vnitas tantum: ordinentur igitur vt volueris dicti omnes exponentes vt si velis. 3. 2. 1. ducatur primus in secundum bis & producto adjiciendo summam primi & secundi fit 17. ducatur iam 17. in tertium bis & producto adiiciendo summam 17 & tertij fit 52. datus igitur numerus erit hypotenusa 52. triangulorum rectangulorum, nec est dissimilis in quotcunque diuisoribus & ipsorum potestatibus methodus.

Reliqui numeri primi qui quaternarii multiplicem vnitate non superant nihil aut addunt quæstioni aut detrahunt neque ipsorum potestates.

Inuenire numerum qui quoties quis velit sit hypotenusa: quæratur numerus qui sit septies hypotenusa, numerus 7. ductus dupletur fit 14. adiice vnitatem fit 15. sume omnes primos qui mensurant 15. sunt hi 3. & 5. ab vnoquoque demptâ vnitate sume reliqui dimidium, fiunt 1. 2. quærantur tot primi diuersi quot hic sunt numeri nempe duo & secundum exponentes 1 & 2 inter se multiplicentur nempe vnus in quadratum alterius, in hoc casu satisfiet quæstioni modò primi quos sumis superent quaternarium vnitate, ex his constat facilè posse inueniri numerum minimum qui quoties quis velit sit hypotenusa.

Inuenire numerum qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis: sit datus numerus 10. eius duplum 20. cuius omnes partes primæ sumantur. 2. 2. 5. ab vnaquaque tolle vnitatem fiunt 1. 1. 4. sumantur igitur 3. numeri primi, (qui nempe vnitate superant quaternarium,) v. g. 5. 13. 17. & quadratoquadratus vnius propter exponentem 4. ducatur in reliquos duos. Fiet numerus quæsitus. Vt autem dignoscatur quoties datus numerus ex duobus quadratis componitur. Sit datus numerus 325. numeri primi qui eum componunt (nempe quaternarium vnitate superantes) sunt 5. 13. hic semel, ille per quadratum. Exponentes disponantur 2. 1. productus multiplicatione iungatur summa, fit 5. cui adiunctâ vnitate fit 6. cuius dimidium 3. toties igitur numerus datus componitur ex duobus quadratis, si essent 3. exponentes vt 2. 2. 1. Ita procedendum, productum sub prioribus adiunctum summæ facit 8. ducatur 8. in tertium & iungatur productum summæ fit 17. cui iunge vnitatem fit 18. cuius dimidium dat 9 toties iste secundus numerus componetur ex duobus quadratis; ex his facile potest inueniri minimus numerus qui quoties quis velit componatur ex duobus quadratis. Si vltimus numerus bifariam diuidendus esset impar, tunc demptâ vnitate reliqui dimidium sumi debet.

Sed proponatur si placet sequens quæstio. Inuenire numerum in integris qui adsumpto dato numero conficiat quadratum, & sit hypotenusa quotlibet triangulorum rectangulorum. Hæc quæstio ardua est, proponatur v. g. inueniendus numerus qui sit bis hypotenusa, & adsumpto binario conficiat quadratum. Erit quæsitus numerus 2023. & sunt alij infiniti idem præstantes, vt 3362. &c.

QVAESTIO XXIII.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui dempta vtraque parte diuisi faciat quadratum. Esto datus 10. Ponatur inueniendus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Is siue ei adimas 2 N. + 1. siue 4 N. remanebit quadratus. Statuo igitur primum 2 N. + 1. secundum 4. N. Oportet horum summam æquari dato numero. Sed horum summa est 6 N. + 1. Hoc ergo æquatur 10. & fit 1 N. 1 ½. Ad positiones. Erit primus 4. Secundus 6. Quadratus autem 6 ¼

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον. ὃς λείψας ἑκάτερον τῶν συγκειμένων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ῑ. τετάχθω ὁ προσδεησάμενος τετράγωνος δ^ος ᾱ ς̄ β̄. μ̄ ᾱ. δεῖ δὴ ἑκατέρῳ λείψει ς̄^ῳ β̄ μ̄ ᾱ. καταλείπεται τετράγωνος. ἐπὶ ἑνὸς ς̄^ῳ δ̄. πάλιν καταλείπῃ τετράγωνος. πάσων δὴ τὸν ἐλάχιστον ς̄ δ̄. ταῦτα δεῖ συντιθέντα ποιεῖν τὸ δοθέν, ἀλλὰ συντιθέντα ἔστι ς̄^ους ϛ̄ μ̄ ᾱ. ταῦτα ἴσα μ̄ ῑ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄^ος μ̄ ᾱ. α^ς. δεῖ πάντας ὑποπεσόντας. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ δ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ϛ̄ ὁ δὲ τετράγωνος μ̄ ϛ̄. ᾱ ϛ̄.

IN QVÆSTIONEM XXIII.

MIROR Xilandrum non aduertisse quæstionem hanc eandem esse cùm decima sexta secundi, sicut & sequens non differt à decima quinta eiusdem libri. Operatio quidem est paulò diuersa Sed eodem fermè recidit.

Cæterùm varietas solutionis in eo consistit quod quadrati inueniendi latus potest fingi diuersimodè, nimirum ab 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor numero diuidendo, puta in hypothesi Diophanti 1 N. + 1. vel 1 N. + 3. vel 1 N. + quotlibet vnitatibus, quarum quadratus sit minor quàm 10. sic enim totidem diuersæ contingent solutiones quot modis variabitur vnitatum numerus, præterquàm in vno casu, cùm scilicet tales duo sumentur vnitatum numeri, vt vtriusque quadratum auferendo à dato numero, & residua diuidendo per sextuplum sumptorum numerorum, fient quotientes eodem distantes interuallo, quo distant sumpti numeri. Vt si sumantur numeri 1. & 2. in nostra hypothesi; nam ab eodem 10. auferendo quadratos eorum, puta 1. & 4. remanent 9. & 6. quibus diuisis per sextuplum ipsorum numerorum, puta 9. per 6. & 6. per 12. fiunt quotientes ¾ & ½ quorum interuallum idem est atque ipsorum 1 & 2. Quamobrem siue fingas latus quadrati quæsiti 1 N. + 1. siue 1 N. + 2. eadem continget solutio, cuius symptomatis causàm ex ipsa operatione paulò attentiùs considerata facilè deprehendes.

Sed & animaduersione dignum est eodem posito vnitatum numero in latere Quadrati, eandem semper contingere solutionem, quantumlibet varietur Numerorum numerus. Sic in hypothesi Diophanti, siue latus fingatur 1 N. + 1. siue 2. N. + 1 siue 3 N. + 1 &c. semper eadem fiet solutio, eruntque quæsitæ partes 6. & 4. & quadrati latus 2 ½. Similiter siue quadrati latus ponatur 1 N. + 3. siue 2. N. + 3. siue 3 N. + 3. &c. semper erit eadem solutio, quippe quæsitæ partes inuenientur ⅐ & 9 ⅐. At quadrati latus ⅘. Huius quoque symptomatis causam ex ipsamet operatione deprehendes, & ab huiusmodi theoremate.

Si fuerint tres numeri, & à primo detrahatur quadratus secundi, & residuum diuidatur per sextuplum producti ex secundo in tertium, ac quotiens ducatur in tertium, idem semper procreatur numerus quamtumlibet varietur tertius primo & secundo inuariatis.

Hoc verò nil aliud est quàm ex eodem numero per sextuplum eiusdem numeri diuiso eundem semper procreari numerum, vt tibi considerandum relinquo. Porro hinc talem elicio Canonem.

A dato numero aufer quadratum quemlibet, residuum diuide per sextuplum lateris illius, quotiens autem eodem latere, erit latus quæsiti quadrati: eiusdem verò quotientis quadruplum erit altera quæsitarum partium.

Moneo demum, etiam eodem modo facta positione quæsiti quadrati, ipsarum partium positiones variari posse. Nam posito quadrato 1 Q. + 2 N. + 1. sicut alteram partium Diophantus posuit 4 N. qua detracta à quadrato posito, remanet quadratus 1 Q. − 2 N. + 1. sic & aliam ponere potuisset 6 N. − 3. vel 8 N. − 8. &c. quibus ab eodem quadrato detractis remanent quadrati 1 Q. − 4 N. + 4. & 1 Q. − 6 N. + 9. Ita si ponas quæsitas partes 4 N. & 6 N. − 3. fiet horum summa 10 N. − 3. æqualis 10. & erit 1 N. 1 3/10. & quæsitæ partes 5/7 & 4/7. latus quadrati 1 3/10. Qua ratione operan-

do, necesse non est in quadrato quæsito reperiri plures vnitates quàm in dato numero. Nam ponatur quadratus quæsitus 1 Q. + 8. N. + 16. & ponantur partes quæsitæ 16 N. & 18 N. − 9. nam his ab exposito quadrato detractis, remanent quadrati 1 Q. − 8 N. + 16. & 1 Q. − 10. N. + 25. Partium summa est 34 N. − 9. æqualis 10. & fit 1 N. $\frac{19}{34}$. sunt ergo partes quæsitæ $\frac{323}{34}$ $\frac{45}{34}$. latus verò quadrati $\frac{323}{34}$.

QVÆSTIO XXIV.

Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἀριθμοὺς δύο, καὶ προσευρεῖν αὐτοῖς τετράγωνον ὃς προσλαβὼν ἕκαστον τῶν δοθέντων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ κ̄. καὶ τετάχθω ὁ τετράγωνος δ° ᾱ. ς̄ β̄. μ̄ ᾱ. τούτῳ ἴσαι προσκείσθωσαν ς̄ β̄. μ̄ γ̄. ἔσται τετράγωνος. ἀλλὰ μὴν καὶ ἴσαι προσκείσθωσαν ς̄ δ̄. μ̄ κ̄. τάσσω δὴ τὸν μὲν πρῶτον ς̄ β̄ μ̄ γ̄. τὸν δὲ δεύτερον ς̄ δ̄. μ̄ κ̄ συναμφοτέρῳ ἄρα ἴσαι ς̄ μ̄ ιᾱ ταῦτα ἴσοι μ̄ κ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ. μ̄ ς̄. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τῶν δοθέντων μ̄ ε̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ ιθ̄. ὁ δὲ τετράγωνος μ̄ ς̄ ᾱᵛ. καὶ φανερὰ ἡ κατάδειξις.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, & inuenire quadratum, qui vtralibet diuisi parte assumpta faciat quadratum. Esto datus 20. Ponatur quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. Huic siue addas 2 N. + 3. siue 4 N. + 8. fit quadratus. Statuatur ergo primus 2 N. + 3. Secundus 4 N. + 8. Erit vtriusque summa 6 N. + 11. Hoc æquatur 20. & fit 1 N. 1. $\frac{1}{6}$. Erit itaque primus 6. Secundus 14. Quadratus autem 6 $\frac{1}{4}$. & demonstratio est euidens.

IN QVAESTIONEM XXIV.

EADEM est hæc quæstio cum decima quinta secundi, sed operatio aliquantulum diuersa. Positio quadrati variari potest infinitis modis, dummodo partes dati numeri sic ponantur, vt vnitates in iis contentæ simul sumptæ minores sint dato numero. Pro partibus etiam dati numeri variæ fieri possunt positiones, sed cum eadem cautione. Denique Canon ad decimam quintam traditus, ex huius etiam operatione formari poterat.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER QVARTVS.

QVÆSTIO I.

DAtvm numerum diuidere in duos cubos, quorum laterum ſumma data ſit. Oporteat numerum 370. diuidere in duos cubos, quorum latera faciant 10. Ponatur prioris cubi latus 1 N. + 5. hoc eſt dimidium ſummæ laterum. Relinquitur ergo alterius cubi latus 5 − 1 N. Ipſi autem cubi erunt ſimul 30 Q. + 250. Hæc æquantur 370. dato ſcilicet numero, & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit prioris cubi latus 7. ſecundi 3. Ipſi autem cubi 343. & 27.

ΤΟΝ δοθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο κύβους ὧν αἱ πλευραὶ εἰσὶ δεδομέναι. ἔστω δὴ τὸ μὲν ἀφ' οὗ δεῖ διελεῖν εἰς δύο κύβους, ὧν αἱ πλευραὶ μο ῑ. τετάχθω ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς ᾱ μο ε. τουτέστι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς. λοιπὸν ἄρα ἡ τοῦ ἑτέρου κύβου πλευρὰ ἔσται μο ε ⏜ ς ᾱ. αὐτοὶ ἔσονται οἱ κύβοι δ Δ̄ μ ς σ̄. ταῦτα ἴσα μο τῷ τετάρτῳ τοῦ δοθέντος, ἤγουν ὁ ς μο β. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ἡ τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ μο ζ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μο γ. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὁ μὲν τριῶν τμγ. ὁ δὲ δεύτερος κζ.

In IV. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

BInomiorvm 1 N. + 5. & 5 − 1 N. cubos ſumit Xilander modo communi, ſumendo ſcilicet prius eorum quadratos, & eos ducendo in ipſa binomia. Verùm compendioſius erit, huiuſmodi binomiorum cubos ſumere per vigeſimam ſecundi poriſmatum. Qua oſtenſum eſt cubum totius æquari cubis partium, & productis ter ex quadrato cuiuſlibet in alterum, ita ſi velis cubum ipſius 1 N. + 5. ſumes partium cubos, puta 1 C. & 125. Tum duces ter quadratum primæ partis in ſecundam, fient 15 Q. Denique duces ter quadratum ſecundæ partis in primam fient 75. N. Quamobrem erit cubus totus 1 C. + 15 Q + 75 N. + 125. Eadem arte inuenies cubum reſidui 5 − 1 N. nimirum 125 + 15 Q − 75. N. − 1 C. Vbi animaduerſione dignum eſt in binomij, & in reſidui cubis duas ſemper ſpecies eodem ſigno, duas verò contrario affici. Nam partis quæ in vtroque latere afficitur ſigno + cubus etiam idem ſignum retinet vt in hypotheſi 125. At partis affectæ ſigno − cubus etiam idem ſignum habet in cubo reſidui, puta in 1 C. Productus verò ter ex parte affecta ſigno + in quadratum alterius, idem retinet ſignum, puta 15 Q. At productus ter ex parte affecta ſigno − in quadratum alterius, habet etiam ſignum − in cubo reſidui, nimirum 75 N. Cæterùm ex operatione Diophanti elicitur huiuſmodi Canon.

Aufer cubum ſummæ laterum à quadruplo ſummæ cuborum, reſiduum diuide per triplum ſummæ laterum, oritur quadratus interualli laterum.

Habens itaque ſummam numerorum, & eorum interuallum, inuenies numeros per primam primi, ſed & alium non deteriorem Canonem elicere poſſumus ex decima nona ſecundi poriſmatum. Nimirum.

Aufer ſummam cuborum à cubo ſummæ laterum, reſiduum diuide per triplum ſummæ laterum, oritur planus ſub lateribus.

Habens autem ſummam numerorum, & productum multiplicationis eorundem, inuenies Numeros per trigeſimam primi.

Denique tam ex operatione Diophanti, quàm ex priore Canone colligitur, huic quæſtioni hanc conditionem debere adiici.

Oportet quadruplum ſummæ cuborum, multatum cubo ſummæ laterum, diuiſum per triplum ſummæ laterum, quotientem dare quadratum.

QVÆSTIO II.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμὸς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ἔτι ἡ ὑπ' αὐτῶν κύβων ὑπεροχή. ἔστω δὴ ὁ μὲν ὑπεροχὴν αὐτῶν ποιῶν μ̄ ϛ̄. τῶν δὲ ὑπεροχὴν ὑπ' αὐτῶν κύβων μ̄ φδ̄. πεπάχθω πάλιν ἡ τῆ μείζονος κύβου πλευρὰ ς̄ ᾱ μ̄ Ī τῆ δὲ ἐλάσσονος ς̄ ᾱ ☩ μ̄ γ̄. ἡ μὲν ἄρα τῶν ὑπεροχὴν αὐτῶν ἔσῃ μ̄ ϛ̄. λοιπὸν δὴ ὑπ' κύβων τῶν ὑπεροχὴν ἔσῃ μ̄ φδ̄. ἀλλ' ἡ ὑπ' κύβων ὑπεροχὴ ὄγδοι δ̄ ἐπὶ μ̄ νδ̄. ταῦτα ἴσα μ̄ φδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ᾱ. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἡ μὲν τῆ μείζονος κύβου πλευρὰ ἔσται μ̄ β̄. ἡ δὲ τῆ ἐλάσσονος μ̄ β̄. αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι ὧν μὲν φιβ̄. ὧν δὲ ᾱ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt illorum interuallum datum faciat numerum, & cuborum quoque ab ipſis ortorum ſit quod preſcribitur interuallum. Eſto interuallum numerorum 6. interuallum verò cuborum 504. Ponatur rurſus maioris cubi latus 1 N. + 3. minoris verò 1 N. − 3. & manet illorum interuallum 6. Supereſt vt cuborum interuallum ſit 504. ſed cuborum interuallum eſt 18 Q. + 54. Hæc ergo æquantur 504. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit maioris cubi latus 8. minoris verò 2. Ipſi autem cubi 512. & 8. & euidens eſt demonſtratio.

IN QVAESTIONEM II.

HIc ex operatione Diophanti eliciemus huiuſmodi Canonem.

Diuide quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur quadratus ſumma laterum.

Cùm autem habueris ſummam numerorum & eorum interuallum, inuenies ipſos numeros per primam primi; ſed & alium Canonem non deteriorem eliciemus ex vigeſima prima ſecundi poriſmatum, nimirum.

Diuide interuallum cuborum multatum cubo interualli laterum, per triplum interualli laterum, orietur planus ſub lateribus.

Porro cùm habueris interuallum numerorum, & productum eorum multiplicatione, inuenies ipſos numeros per trigeſimam tertiam primi. Colliges etiam tam ex operatione Diophanti quàm ex priore Canone, huiuſmodi conditionem huic quæſtioni præſcribi debere.

Oportet quadruplum interualli Cuborum multatum cubo interualli laterum, diuiſum per triplum interualli laterum, quotientem dare quadratum.

Quæſtiones etiam aliquot hic deſiderantur ad hanc materiam pertinentes, quas ſubiicere non grauabor.

QVAESTIO PRIMA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum ſumma æqualis ſit datorum interuallo. Oportet autem duplum minoris cubi non ſuperare maiorem.

Sint dati cubi 8. & 1. quorum interuallum 7. Oportet igitur diuidere 7. in duos cubos. Eſto latus vnius, latus maioris datorum cuborum − 1 N. puta 2. − 1 N. & fingatur alterius latus à certo Numerorum numero − latere minoris cubi, dum talis ſit numerus Numerorum, vt fiat diuidendo quadratum maioris lateris per quadratum minoris. Eſto itaque latus ſecundi cubi 4 N. − 1. Eſt ergo ſumma cuborum 7 + 63 C. − 42 Q. æqualis 7. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. ſuntque latera quæſitorum cuborum $\frac{4}{7}$ & $\frac{1}{7}$. ipſi cubi $\frac{64}{343}$. $\frac{1}{343}$.

Aliter fingatur latus vnius quæſitorum cuborum 1 N. − latere minoris datorum, puta 1 N. − 1. Alterius vero latus ponatur latus maioris cubi − tot Numeris, quot fiunt diuidendo quadratum minoris lateris per quadratum maioris, ponatur itaque 2 − $\frac{1}{7}$ N. fiet ſumma Cuborum 7 + $\frac{3}{49}$ C. − $\frac{1}{7}$ Q. æqualis 7. & fit 1 N. 2 $\frac{1}{7}$. ſuntque cubi quæſiti qui prius. Hic moneo in tyronum gratiam

ingeniosè fingi cuborum latera, vt maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos. Idcirco statuitur in vno laterum fictiorum maius datorum laterum cum signo + & in altero latere fictitio ponitur minus datorum laterum cum signo − vt facta additione cuborum, maneant tantum vnitates 7 quæ abolcantur per æqualem vnitatum numerum, qui est ex alia parte, æquationis. Deinde tales vtrobique ponuntur numeri Numerorum vt in vno cubo totidem inueniantur Numeri cum signo + quot reperiuntur in alio, cum signo −. vt his etiam per additionem se mutuo elidentibus, maneat tandem æquatio inter cubos & quadratos, cùm quadrati ob signum − adiunctum transeant in aliam æquationis partem.

Ex vtraque autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per summam cuborum, à maiore quotiente auferminus latus, & minorem quotientem aufer à maiore latere, relinquentur cuborum quæsitorum latera.

Hinc conditionis adiectæ ratio deduci potest. Nam si maior cubus ad minorem sit in dupla ratione, vel etiam in minore, non posse perfici quod iubet hic Canon, sic demonstratur. Sint cubi

A 1. B 2. C 1. D ʀ C. 2.
E ʀ C. 54. F 3. G ʀ C. 2.

A minor, & B duplus illius, quorum latera C D. ductoque A in D ter fiat E. quo diuiso per F summam cuborum A B. sit quotiens G. Ergo per hunc Canonem, vt habeamus latus vnius quæsitorum cuborum, oportet auferre G ab ipso D. Sed hac subtractione nil relinqui sic probatur. Quia B est duplus ipsius A. patet summam ipsorum A B, puta F triplam esse ipsius A. At E est triplum producti ex A in D. Cæterum idem quotiens G fiet siue E diuidatur per F. siue triens ipsius E per trientem ipsius F. diuidi concipiatur. Sed diuidendo productum ex A in D. per A. fit quotiens D. igitur ipsi D G. sunt æquales, ac proinde auferendo G ab ipso D nil remanet pro latere vnius quæsitorum Cuborum. Quod erat propositum. Multo minus perfici poterit quod iubet Canon, si B ponatur minor duplo ipsius A, tunc enim G maior esse ostendetur quàm D, ac proinde subtractio nullo modo perfici poterit. Si enim B minor est duplo ipsius A. erit & F minor triplo ipsius A. Quare cùm triens ipsius E nempe productus ex A in D. diuidetur per trientem F qui minor erit quàm A quotiens vtique puta G. maior erit ipso D. Nam si productus ex A in D. per A. diuideretur, fieret quotiens D, Quare si idem productus diuidatur per numerum minorem quàm A, fiet vtique quotiens maior quàm D. Quare patet propositum.

Hinc quoque pendet modus inueniendi tres cubos, qui simul additi cubum efficiant, quod fit hac arte.

Sume duos cubos quorum maior superet duplum minoris, & ducito maius latus in summam cuborum, fiet latus cubi summam trium æquantis. Ducito minus latus in summam cuborum. Itemque maius latus in suum cubum multatum duplo minoris cubi. Ac denique minùs latus in duplum maioris cubi multatum minore cubo, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Ista pluribus explicare operæ pretium fuit, quoniam hæc quæstio, tanquam porisma est ad decimam nonam quinti, vt suo loco docebimus.

OBSERVATIO D. P. F.

Determinationem operationis iteratione facillimè tollimus & generaliter tum hanc quæstionem tum sequentes quæstiones construimus, quod nec Bachetus nec ipse Vieta expedire potuit. Sint dati cubi 64 & 125. inuenendi alij duo quorum summa æqualis sit datorum interuallo. Ex quæstione tertiâ folio sequenti quarantur duo alij cubi quorum differentia æquet differentiam datorum. Illos Bachetus inuenit & sunt $\frac{1331000}{970299}$ *&* $\frac{1061}{970299}$ *isti duo cubi ex constructione habent interuallum æquale interuallo datorum. Sed isti duo cubi inuenti per quæstionis tertiæ operationem possunt iam transferri ad quæstionem primam cum duplum minoris non superet maiorem, datis itaque his duobus cubis quarantur alij duo quorum summa æquetur interuallo datorum, id quidem licet per determinationem huius quæstionis primæ. At interuallum datorum horum cuborum est per quæstionem tertiam æquale interuallo cuborum prius sumptorum 64. & 125. igitur construere nihil vetat duos cubos quorum summa æqualis sit interuallo datorum 64. & 125. quod sanè miraretur ipse Bachetus. Imo si tres istæ quæstiones eant in circulum & iterentur in infinitum, dabuntur duo cubi in infinitum idem præstantes, ex inuentis enim vltimo duobus cubis quorum summa æquet*

differentiam datorum, per quæstionis secundæ operationem quæremus duos alios quorum differentia æquet summam vltimorum, hoc est, interuallum priorum & ex hac differentiâ rursum quæremus summam & sic in infinitum.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datis duobus cubis, inuenire duos alios, quorum differentia æquet summam datorum.

Sint dati 8. & 1. oporteat inuenire duos alios cubos, quorum interuallum sit 9. Ponatur latus vnius 2 + 1 N. alterius verò 4 N. − 1. ob causas in precedente explicatas. Erit igitur Cuborum interuallum 9 + 54 Q. − 63 C. æqualis 9. & fiet 1 N. $\frac{5}{7}$. Sunt ergo latera cuborum $\frac{12}{7}$. & $\frac{13}{7}$. Ipsi cubi $\frac{1728}{343}$. & $\frac{2197}{343}$.

Aliter ponatur latus vnius cubi 1 N. − 1. alterius verò 2 − $\frac{1}{3}$ N. erit interuallum cuborum 9 + 3 $\frac{1}{3}$ Q. − $\frac{37}{27}$ C. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{10}{7}$. suntque cubi qui prius. Ex vtraque operatione elicitur huiusmodi Canon.

Vtrumque datorum Cuborum ducito ter in latus alterius, productos diuide per interuallum cuborum, & minori quotienti adde maius latus. Atque à maiore quotiente aufer minus latus, summa & residuum exhibebunt quæsitorum latera cuborum.

Hinc etiam alius colligitur modus inueniendi tres cubos, quorum summa cubum faciat, qui talis est.

Sume duos quosuis numeros, & ducito maiorem in suum cubum auctum duplo minoris cubi, fiet latus cubi æquantis summam trium. Rursus ducito eundem maiorem numerum in interuallum cuborum. Itemque ducito minorem numerum, tum in duplum maioris cubi auctum cubo minore: tum in cuborum interuallum, fient latera trium quæsitorum cuborum.

Cæterùm moneo inuentis semel tribus cubis, siue per hanc, siue per præcedentem quorum summa cubum faciat, si eorum latera sigillatim per quemlibet numerum vel multiplicentur vel diuidantur, fore vt & productorum & quotientum cubi idem præstent. Quod facile est demonstrare
11. *ostaui.* ex eo ' quod cubi sunt in triplicata ratione laterum, vnde sequitur numerorum proportionalium cubos esse proportionales, & propositum nullo negotio concluditur. Ita cùm per priorem regulam inuenti sunt cubi à lateribus 9. 12. 15. qui æquantur cubo à latere 18. si singula latera diuidantur per 3. fient rursus latera 3. 4. 5. quorum cubi simul æquabuntur cubo ipsius 6.

QVÆSTIO TERTIA.

Datis duobus cubis, inuenire alios duos, quorum differentia æquet datorum differentiam. Oportet autem duplum minoris excedere maiorem.

Sint dati cubi 64. & 125. quorum differentia 61. & quærendi sint alij duo cubi, quorum itidem interuallum sit 61. Ponatur vnius latus 1 N. − latere minoris cubi, puta 1 N. − 4. Et ponatur latus alterius tot Numerorum quot sunt vnitates in quotiente diuisionis quadrati à minore latere per quadratum maioris − latere maioris cubi. Sit ergo huiusmodi latus $\frac{16}{21}$ N. − 5. Cuborum interuallum est $\frac{4096}{9261}$ C. − $\frac{1664}{147}$ Q. + 61. quod æquatur 61. & fit 1 N. $\frac{1344}{1664}$ seu in minimis $\frac{21}{26}$. Sunt igitur latera cuborum $\frac{11}{26}$ & $\frac{15}{26}$. Ipsi verò cubi $\frac{1331}{17576}$ & $\frac{3375}{17576}$ quorum interuallum $\frac{1030301}{17576}$ seu 61. vt postulabatur.

Aliter. Ponatur latus vnius cubi 1 N. − 5. Alterius verò $\frac{15}{16}$ N. − 4. & eadem reperietur solutio. Quamobrem ex vtraque operatione hic formatur Canon.

Productum ex vtroque cubo ter in latus alterius diuide per summam cuborum. A maiore quotiente aufer minus latus, à minore quotiente aufer maius latus, relinquentur latera quæsitorum cuborum.

Porrò inde conditionis adiectæ ratio patet argumentando eodem prorsus modo quo ad primam istarum factum est. Nam similiter ostendetur si maior cubus sit duplus minoris, minorem quotientem æquari maiori lateri, & si maior cubus minoris sit plus quàm duplus demonstrabitur minorem quotientem, minorem esse maiore latere, ac proinde subtractionem huius ab illo fieri non posse.

Hinc etiam colligitur modus inueniendi quatuor cubos, vt bini binis sint æquales. nimirum.

Sume duos numeros, ita vt duplum cubi minoris superet maioris cubum. Deinde ducito minorem numerum tum in duplum cubi maioris multatum cubo minore, tum in summam cuborum, fient latera duorum cuborum quæsitorum. Rursus ducito maiorem numerum, tum in duplum minoris cubi multatum cubo maiore, tum in summam cuborum, fient reliquorum cuborum latera.

Ita si sumas numeros 5. & 4. fient cubi à lateribus 744. 756. æquales cubis à lateribus 945. & 15. Et diuidendo omnia latera per 3. erunt cubi à lateribus 248. & 252. æquales cubis à lateribus 315. & 5.

OBSERVATIO D. P. F.

Hvius quæstionis determinationem non esse legitimam simili quâ vsi in primâ quæstione sumus operatione aperiemus.

Imo ex supradictis quæstionem quam Bachetus ignorauit, feliciter construemus, datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos diuidere, idque infinitis modis per operationum continuatam vt supra monuimus, operationem.

Sint duo cubi quibus alij duo æquales inueniendi 8. *&* 1. *primum ex quæstione secunda quærantur duo cubi quorum differentia æquet summam datorum, eruntque* $\frac{1000}{1001}$ *&* $\frac{999}{1001}$ *Quia duplum minoris excedit maiorem, res deducitur ad tertiam quæstionem quæ demum reducetur ad primam & constabit propositio, si velis secundam solutionem rursus quæstio redibit ad secundam &c.*

Vt autem pateat quæstionis tertiæ determinationem non esse legitimam. datis duobus cubis 8. *&* 1. *inueniendi alij duo quorum differentia æquet differentiam datorum. Sanè Bachetus impossibilem hanc quæstionem pronuntiaret, cubi tamen duo per nostram methodum inuenti sunt sequentes quorum nempe differentia æquatur* 7. *differentiæ* 8. *&* 1. *cubi autem illi duo, sunt* $\frac{1000000000}{1003003001}$ *&* $\frac{999999999}{1003003001}$. *latera ipsorum* $\frac{1000}{1003}$. *&* $\frac{999}{1001}$.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt summa cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione, datos conficiant numeros. Oportet autem vt a quadrato summæ cuborum, auferendo quadruplum cubi producti multiplicationis remaneat quadratus.

Esto summa cuborum 72. productus 8. Pone alterum cuborum $36 + 1$ N. alterum $36 - 1$ N. Quia igitur productus ex mutuo ductu duorum cuborum æquatur cubo plani sub lateribus, si ducas $36 + 1$ N. in $36 - 1$ N. fiet $1296 - 1$ Q. æqualis 512. Ac proinde 1 N. est 28. suntque cubi quæsiti 64. & 8. & ipsa latera 4. & 2. Hinc fit Canon.

A quadrato semissis summa cuborum aufer cubum producti, residui latus quadratum adde & adime semissis summa cuborum, habebis cubos quæsitos.

Vel etiam.

A quadrato summa cuborum aufer quadruplum cubi producti, residui latus quadratum adde & adime summa cuborum, aggregati & residui semisses quæsitos exhibebunt cubos.

Vnde patet conditionem propositioni adiectam non omnino sufficere, vt solutio contingat rationalis. Sed oportet vt à quadrato summæ cuborum auferendo quadruplum cubi à producto, remaneat quadratus, cujus latus addendo & adimendo summæ cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros, vt interuallum cuborum ab ipsis ortorum, & productus eorum multiplicatione datos conficiant numeros. Oportet autem vt quadrato interualli addendo quadruplum cubi producti, quadratus fiat.

Esto interuallum cuborum 56. productus 8 Ponatur alter cuborum 1 N. + 28. alter 1 N. − 28. Ergo productus eorum multiplicatione 1 Q. − 784. æquatur cubo ipsius 8. puta 512. & fit 1 N. 36. Sunt ergo cubi quæsiti 64. & 8. vt prius. Hinc fit Canon.

Quadrato semissis interualli cuborum adde cubum producti, summæ latus quadratum adde & adime semissis interualli cuborum, fient cubi quæsiti.

Vel etiam.

Quadrato interualli cuborum adde quadruplum cubi producti, summæ latus quadratum adde & adime interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sunt cubi quæsiti.

Hic quoque conditio adiecta non sufficit, vt solutio sit omnino rationalis. Sed oportet vt quadrato interualli cuborum, addendo quadruplum cubi producti, fiat quadratus cuius latus addendo & adimendo interuallo cuborum, aggregati & residui semisses sint cubi numeri.

Porrò ex nonnullis harum quæstionum deducuntur Regulæ Algebræ de cubo affecto sub latere, vt abundè docuit Vieta noster libro de Recognitione æquationum.

QVÆSTIO III.

Ἐπὶ τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πλευρὰν πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν μὲν πλευρὰν κύβον, τὸν δὲ τετράγωνον τοῦ πλευρᾶς τὸν κύβον. πεπλάσθω ὁ μὲν πλευρὰ ἀπὸ α̅. ἡ ἄρα πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ς̲ εἷς, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμὸς ὁτιοῦν μ̲ κυβικῶν ὅσων δ̲ηποτε. ἔστω ϛ̅ η̅. ᵃ. ᶜ. δεῖ μὲν οὖν ϗ δ̲ α̅. πολλαπλασιάσαντες, εὑρίσκομεν ςς̲ η̅. δεῖ δὲ τὸν ς̲ α̅. πολλαπλασιάσαντες εὑρίσκομεν μ̲ η̅. θέλομεν δὲ τὰς ςς̲ η̅. κυβικὰν ὄντ πλευρὰν τ̅ μ̲ η̅. μονάδες ἄρα β̅ ἴσαι ςς̲ η̅. * καὶ γίνεται ὁ ς̲ β̅. ὁ δὲ πολλαπλασιάζόμενος ς̲ λβ̅ μ̲ λβ̅. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ̲ μὴ δ̲πλῆ, εὑρήσομεν ςς̲ η̅ ἴσας μ̲ β̅. * καὶ γίνεται ὁ ς̲ α̅ ᶜ. δεῖ τὰς ὑπερβάσας ἴσαι ὁ μὲν τετράγωνος α̅ ᶜ. ἡ δὲ πλευρὰ α̅ ᶜ. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ὁ λβ̅. εἰ γὰρ ὁ ς̲ ἴσται α̅ ᶜ. τὸ δὲ ἀριθμοστὸν ὄζει μ̲ δ̅. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN quadratum numerum, & in latus eius eundem multiplicare numerum, & facere ex latere quidem, cubum; ex quadrato autem, latus cubi. Ponatur quadratus 1 Q. Erit igitur latus illius 1 N. Qui in hos ducendus est, sit vnitatum cubicarum quotcunque per 1 N. diuisarum, esto $\frac{8}{1}$. Hunc igitur ducentes in 1 Q. inueniemus 8. N. adducentes in 1 N. inueniemus 8. volumus itaque 8 N. esse latus cubicum de 8. Proinde 2. æquantur 8 N. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Erit quidem quadratus $\frac{1}{16}$. eius latus $\frac{1}{4}$. Qui in illos ducetur erit 32. Si enim 1 N. est $\frac{1}{4}$. vtique $\frac{1}{16}$. est 4. & demonstratio euidens.

IN QVAESTIONEM III.

QVÆSTIONIS huius tractationem non percepit Xilander, eò quod signum Numeri malè hîc insutum putauit, non videns numerum qui ducendus est in quadratum, & in eius latus non esse simpliciter vnitates 8. sed $\frac{8}{1}$. Allucinatus autem est Xilander, & hîc & vbicunque ferè fractiones Numericas adhibuit Diophantus, quia (vt iam monuimus ad duodecimam tertij) huiusmodi fractiones in textu Græco passim ambiguè exprimuntur, vt ex hoc quoque loco colligere est. Nam legitur in manu exarato codice, ὁ πολλαπλασιαζόμενος μ̲ α̅. ς̲ τῶν κυβικῶν. ὅσων δ̲ηποτε. ἔστω δὲ μ̲ η̅. quæ more nostro emendauimus sic, ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἀριθμοστὸν μ̲ κυβικῶν ὅσων δ̲ηποτε. ἔστω δὲ η̅ ᶜ. Benè autem vidit idem Xilander, vt adulterina expungenda esse verba illa. καὶ γίνεται ὁ ς̲ β̅. ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος ς̲. λβ̅. μ̲ λβ̅. ἐὰν δὲ θελήσωμεν μ̲ μὴ δ̲πλῆν, εὑρήσομεν ςς̲ η̅ μ̲ β̅. quæ idcirco asteriscis inclusimus. Cæterùm emendato textu, vt fecimus in nostra versione, operatio Diophanti facilis est & perspicua. Vnde huiusmodi Canon elicitur.

Sume quemlibet numerum, eumque dinide per suum cubum, orietur latus quæsiti quadrati. Numerus autem in vtrumque ducendus, est quadratocubus sumpti initio numeri.

Hic etiam desiderari videtur huiusmodi quæstio.

In quadratum numerum & in latus eius, multiplicare eundem numerum, & facere ex quadrato cubum, ex latere latus eiusdem cubi.

Statuatur quadratus 1 Q. erit latus eius 1 N. Qui autem in hos ducitur, esto quilibet Numerorum numerus cubicus, puta 8 N. Eum si in 1 Q. ducas fient 8 C. si in 1 N. fient 8 Q. Debent ergo 8 Q. esse latus cubicum cubi 8 C. id autem est 2 N. Igitur 2 N. æquantur 8 Q. & fit 1. N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Quadratus est $\frac{1}{16}$. latus eius $\frac{1}{4}$. Is qui in vtrumque ducitur 2. Hinc formatur huiusmodi Canon.

Sume quemlibet numerum, eumque dinide per suum cubum, orietur latus quadrati quæsiti. Numerus autem in vtrumque ducendus, est sumptus initio Numerus.

Simili artificio soluemus quæstiones sequentes.

QVÆSTIO PRIMA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex cubo quadrato quadratum, ex latere latus quadrato quadrati.

Sit cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus in vtrumque ducendus sit vnitatum quotlibet, puta 2. Igitur 2 N. erunt latus quadrato quadraticum de 2 C. ac proinde 16 QQ. æquabuntur 2 C. & fiet 1 N. $\frac{1}{8}$. eruntque quæsiti numeri $\frac{1}{512}$. $\frac{1}{8}$. 2.

Et

Et sic inuenietur numerus qui ductus in quadrato quadratum, & in latus eius faciat ex quadrato quadrato quadratocubum, & ex latere latus quadratocubi. Ac demum inuenietur numerus qui ductus in quadratocubum & in latus eius, faciat ex quadratocubo cubocubum, & ex latere latus cubocubi. Vnde fit Canon vniuersalis.

Sume quemlibet numerum, eumque diuide per gradum ipsius, similem ei qui postulatur fieri, orietur latus quæsitæ potestatis. Numerus autem in vtrumque ducendus, erit sumptus numerus.

QVÆSTIO SECVNDA.

In cubum & in eius latus multiplicare eundem numerum, & facere ex latere quadratoquadratum, ex cubo latus quadratoquadrati.

Esto cubus 1 C. latus eius 1 N. Numerus autem in vtrumque ducendus sit fractio Numerica vnitatum quadratocubocubicarum, puta $\frac{256}{256}$. fient ergo ex multiplicatione 256. Q. & 256. & ille huius esse debet latus quadratoquadraticum, quare 256. Q. æquantur 4. & fit 1 N. quæsitum latus, igitur cubus est $\frac{4}{256}$ Numerus in vtrumque ducendus 2048. sic quoque inuenietur Numerus qui ductus in quadratoquadratum & in latus eius, faciat ex latere quadratocubum, & ex quadratoquadrato latus quadratocubi. Ac denique reperietur numerus qui ductus in quadratocubum, & in latus eius, faciat ex latere cubocubum, & ex quadratocubo latus cubocubi.

QVÆSTIO IV.

QVADRATO & lateri eius eundem adiicere numerum, & eadem facere. Esto quadratus 1 Q. ergo latus erit 1 N. Addendus autem esto tot quadratorum, vt additus ad 1 Q. faciat quadratum, esto 3 Q. Is adiectus ad 1 Q. facit quadratum 4 Q. Additus autem ad 1 N. facit 3. Q. + 1 N. Hæc æquantur lateri quadrati 4 Q. hoc est 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad hypostases. Erit quadratus $\frac{1}{4}$. latus eius $\frac{1}{2}$ Addendus $\frac{3}{4}$.

Τετραγωνω δε πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά, ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος δῡ α̅. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ς̄ α̅. ὁ δὲ προστιθέμενος ἔστω δῡ γ̅. αὗται προστεθεῖσαι τῇ μὲν δῡ α̅. ποιοῦσι τετράγωνον ἀ δῡ δ̅. τῷ δὲ ς̄ α̅. ποιοῦσι δῡ γ̅. ς̄ α̅. ταῦτα ἴσα τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τῇ μ̄ δ̄. τουτέστι ς̄ δυσὶ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ α̅ γ̅. δεῖ δὲ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν τετράγωνος α̅ δ̅. ἡ δὲ πλευρὰ α̅ γ̅. ὁ δὲ προστιθέμενος γ̅ δ̅.

IN QVAESTIONEM IV.

HIC ποιεῖν τὰ αὐτὰ nil aliud est quàm quadrato & lateri eius talem addere numerum, vt hac additione fiant rursus quadratus & latus eius. Cætera sunt perspicua, & ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Duorum quorumlibet numerorum internallum diuide per internallum quadratorum, quotientem ducito in minorem numerum, fiet latus quæsiti quadrati. Eiusdem quotientis quadratum ducito in quadratorum internallum, fiet addendus numerus.

QVÆSTIO V.

QVADRATO & lateri addere eundem numerum & eadem facere ordine inuerso. Esto quadratus 1 Q. latus ergo erit 1 N. Addendus autem vt ex latere quadratum faciat, esto aliquot quadratorum quadrato numero, cum defectu Numerorum qui sunt in latere prioris quadrati; esto itaque 4 Q. − 1 N. & si adiiciatur quadrato fit 5 Q. − 1 N. Hæc æquantur 2 N. lateri scilicet facti quadrati ex priori additione, & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad

Τετραγωνω δε πλευρᾷ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὰ ἀνάπαλιν. ἔστω ὁ τετράγωνος δῡ α̅. ἡ ἄρα πλευρὰ ἔσται ς̄ α̅. ὁ δὲ προστιθέμενος, ἵνα ἡ πλευρὰ ποιῇ τετράγωνον. δυνάμεσι τετραγωνικῶν ϛ̄ ἀριθμῷ τῷ τετραγώνου καὶ πλευρᾶς. ἔστω ἡ δῡ δ̅ ϛ̄ ς̄ α̅. δεῖ δὲ προστεθῆναι τὸν τετραγώνῳ, γίνεται δῡ ὁ ϛ̄ ς̄ α̅. ταῦτα ἴσα ς̄ δυσὶ τῇ πλευρᾷ τῇ τετραγώνου τῇ γενομένῃ ἐκ τῆς προσθέσεως. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς γ̅ ϛ̄. ὅπερ

ταὶς ὑποστάσ. ἔστω ὁ μὲν τετράγωνος $\overline{\Gamma}^{\overline{\alpha\gamma}}$. ἡ δὲ πλευρὰ $\overline{\gamma}^{\overline{\alpha}}$. ὁ δὲ προστιθέμενος καὶ $^{\overline{\alpha\gamma}}$.

positiones. Erit quadratus $\frac{3}{13}$. latus autem $\frac{1}{1}$. Addendus $\frac{13}{13}$.

IN QVAESTIONEM V.

ΤΑ ἐναλλὰξ idem est quod reciprocè, seu inuerso ordine, vult enim vt quadrato & lateri addendo eundem numerum, fiat ex latere quadratus, ex quadrato latus quadrati. Operatio euidens est, & ex ea elicitur iste Canon.

Sume quadratum aliquem, & per eum vnitate auctum, diuide latus eius vnitate auctum, orietur latus quæsiti quadrati. At quæsitum quadratum ducito in quadratum initio sumptum, & à producto aufer latus quæsiti quadrati, residuum erit addendus numerus.

QVÆSTIO VI.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον, καὶ ποιεῖν τὰ αὐτά. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβου $\overline{\alpha}$. ὁ δὲ τετράγωνος δυνάμεων ὅσων δή ποτε τῶν ἀριθμητικῶν ἔστω δὲ Δ^{Σ} $\overline{\Gamma}$. καὶ ἐπεὶ θέλομεν τετράγωνόν τινα μὲν Δ^{Σ} $\overline{\Gamma}$ ποιεῖν τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ὅστι μ$^{\Sigma}$ $\overline{\Gamma}$ \ ἔστω ὁ μ$^{\Sigma}$ $\overline{\alpha}$ καὶ μ$^{\Sigma}$ $\overline{\Gamma}$. ἐὰν ἀφέλω ἀπὸ τοῦ μ$^{\Sigma}$ $\overline{\theta}$. τὸν μονάδα, καὶ τοῦ λοιποῦ τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιάσω, ἕξω μ$^{\Sigma}$ $\overline{\iota\varsigma}$. ὥστε προσλαβὼν τὸν Δ^{Σ} ποιεῖ τετράγωνον, τάσσω δὴ τὸ προστιθέμενον τετράγωνον Δ^{Σ} $\overline{\iota\varsigma}$. καὶ μὲν ταὶς Δ^{Σ} $\overline{\theta}$ προστεθῇ, γίνεται τετράγωνος. ἐὰν δὲ ταὶς κύβῳ $\overline{\alpha}$. γίνεται κύβος $\overline{\alpha}$. Δ^{Σ} $\overline{\iota\varsigma}$ ταὐτὰ ἴσα κύβῳ. ἔστω τοῦ κύβου $\overline{\eta}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς $\overline{\iota\varsigma}$ $\overline{\xi}$. δεῖ δὴ ταὶς ὑποστάσ. ἔστω ὁ μὲν κύβος $\Delta\overline{\iota\varsigma}$ $^{\overline{\gamma\mu\nu}}$. ὁ δὲ τετράγωνος $\beta\tau\Delta^{\Sigma}$ $^{\overline{\mu\varsigma}}$ ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος $\Delta\overline{\iota\varsigma}$ $^{\overline{\mu\varsigma}}$.

CVBO & quadrato adiicere eundem quadratum, & eadem facere. Esto cubus 1 C. Quadratus autem quotcunque quadratorum numero quadrato. Esto itaque 9 Q. Et quia volumus aliquem quadratum adiectis 9 Q facere quadratum, exponamus duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9. puta 9. & 1. Si ergo aufero 1 de 9. & residui semissem in se duco habeo 16. qui adsumpto 9. facit quadratum. Pono igitur addendum quadratum 16 Q. Et sane si addatur ad 9 Q. facit quadratum. si autem adiiciatur ad 1 C. fit 1 C. + 16. Q. Hæc cubo æquantur. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{16}{1}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{4096}{4913}$. Quadratus $\frac{1024}{289}$. Addendus autem ipsis quadratus $\frac{1936}{289}$.

IN QVAESTIONEM VI.

MODVS quo hîc inuenit Diophantus quadratum qui ad 9. additus quadratum efficiat, idem est prorsus cum Canone vltimo ad vndecimam secundi tradito. Cæterùm positiones quadrupliciter variari possunt.

Primò enim cubus quæsitus statui potest quilibet cuborum numerus cubicus, puta 1 C. 8 C. 27. C. &c.

Secundò quadratus quæsitus poni potest quilibet quadratorum numerus quadratus, puta 1 Q. 4 Q. 9 Q. &c.

Tertiò addendus quadratus etiam infinitis modis variari potest, nam verbi gratia in hypothesi Diophanti, per vndecimam secundi infiniti quadrati reperiri poterant, qui ad 9. additi facerent quadratum.

Denique vltima æquatio institui potest cum quolibet cuborum numero cubico maiore quàm cubus initio sumptus v. g. 1 C. + 16 Q. æquari possunt 8 C. 27. C. 64 C. vel cuilibet cuborum numero cubico maiori quàm 1.

QVÆSTIO VII.

ΚΥΒΩ καὶ τετραγώνῳ προσθεῖναι τὸν αὐτὸν τετράγωνον καὶ ποιεῖν τὰ ἐναλλάξ. ἔστω ὁ μὲν κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος, ὁ δὲ προστιθέμενος αὐτοῖς τετράγωνος ὁ τρίτος καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν προστιθέμενον τε-

CVBO & quadrato addere eundem quadratum, & eadem facere ordine inuerso. Esto cubus, primus. Quadratus, secundus. Addendus autem quadratus, tertius. Et quia volo addendum qua-

dratum, nempe tertium, additū quadrato, nempe ſecundo, facere cubum: faciat cubum nempe primum: Ita vt primus ſuperet ſecundum, tertio, nimirum quadrato, cùm tertius quadratus ſit. Iam quoſcunque duos numeros expoſuero, eorum quadrati adiecto duplo producti multiplicationis eorum, quadratum faciunt. Debeo ergo expoſitis duobus numeris ponere pro primo ſummam quadratorum (quia primus æqualis eſt duobus quadratis, quæſito, & addendo i qui ſunt ſecundus & tertius) duplum autem producti multiplicationis, pro tertio. Atqui tertius debet eſſe quadratus, quare & duplum producti multiplicationis, quadratum eſſe oportet. Ponatur ergo alter 1 N. alter 2 N. vt duplum producti ſit quadratus. Sumens igitur ſummam quadratorum, ſtatuo primum 5 Q. Tertium verò duplum producti multiplicationis nempe 4 Q. vnde relinquitur ſecundus 1 Q. (quia is vnà cum tertio æquatur primo) ſupereſt vt primus ſit cubus. Proinde 5 Q. æquantur 1 C. & fit 1 N. 5. Ad poſitiones. Erit cubus ſeu primus 125. Quadratus ſeu ſecundus 25. Addendus autem quadratus, ſeu tertius 100. & manifeſta eſt demonſtratio.

ξάλωνον ἡ τρίτη, τῷ τετραγώνῳ τῷ δευτέρῳ, ποιεῖν κύβον. ποιείτω κύβον τὸν πρῶτον, ὥστε ὁ πρῶτος ὑπερέχῃ τῷ δευτέρῳ τῷ τρίτῳ, τουτέστι τετραγώνῳ. ὁ δὲ τρίτος ἐστὶ τετράγωνος. ἔστω δὲ ἀριθμοὶ δύο ἀεὶ μὲν, οἱ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι προσλαβόντες τὸν δὶς ὑπ' αὐτῶν ποιοῦσι τετράγωνον. ὀφείλω οὖν εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, τοὺς μὲν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον τὸν πρῶτον, ἐπὶ δὲ πρῶτος τοῖς δυσὶ τετραγώνοις ἴσος ὄντι τῷ ζητουμένῳ καὶ τῷ προσπεπληρωμένῳ τῷ τρίτῳ καὶ τῷ δευτέρῳ. ἡ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἡ τρίτη, ὄντι δὲ ὁ τρίτος τετράγωνος. ὥστε καὶ ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἐστι τετράγωνος. τετάχθω ὁ μὲν ς̄ ᾱ. ὁ δὲ ις̄ β̄. ἵνα ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. λοιπὸν οὖν τοὺς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους. τάσσω ἡ πρώτην δ̄ ε̄. ἡ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ἡ τρίτη δ̄ δ̄. λοιπὸν ἄρα ἴσαι τὸν δευτέραν δ̄ ᾱ. μὴ γὰρ τῆς τρίτης ἴσος ὄντι τῷ πρώτῳ. λειτόν ὄντι τὸν πρῶτον ποιεῖν κύβον. δ̄ ἄρα ε̄ ἴσοι κ̄ ἀριθμοῖς, ὧν γίνεται ὁ ἀριθμὸς ε̄. δεῖ δὲ καὶ τοὺς ὑποκειμένους. ἔσται ὁ μὲν κ̄ ὁ πρῶτος μ̄ ρκ̄. ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος κᾱ. ὁ δὲ προσπεπληρωμένος τετράγωνος ὁ τρίτος μ̄ ρ. καὶ φανερὰ ἡ ἀπόδειξις.

IN QVAESTIONEM VII.

MAGNO artificio Diophantus ſuas ita inſtituit poſitiones, vt tandem æquatio procedat inter 5 Q. & 1 C. vnde ſequitur primum numerum reperiri cubum, vt poſtulatur. Itemque ſummam ſecundi & tertij cubum conficere, quia ſcilicet fit æqualis primo. Supereſt igitur videre qua ratione reliquis propoſiti partibus ſatisfiat. Nimirum, quomodo ſecundus & tertius ſit vterque quadratus, & ſimul additi ſint æquales primo. Ac demum tertius ipſe primo additus quadratum conſtituat. Hæc autem omnia neceſſariò euenire operando cum Diophanto, ſic demonſtrabimus.

A 2. B 4. C 20. D 4. E 16.

Sumantur duo quilibet numeri A B. ita vt duplum producti eorum E ſit quadratus numerus. Et ſumma quadratorum ab ipſis A B ſit C. At numerus quo C ſuperat E ſit D. Dico ſi C ponatur primus D ſecundus E tertius ſatisfactum eſſe omnibus propoſitæ quæſtionis partibus, illa excepta qua requiritur primum C eſſe cubum. Primò enim D E ſimul conficiunt C ex conſtructione. Quare ſi C fiat cubus, erit & ſumma ipſorum D E cubus, vt poſtulatur. Secundò E quadratus eſt ex conſtructione, nam ſuppono tales ſumptos eſſe A B, vt duplum producti eorum E ſit quadratus, tales autem numeri qui facilè inueniantur infrà docebo. Tertiò ipſum D eſſe quadratum conſtat ex quarta ſecundi poriſmatum. Nam ex ſumma quadratorum C. auferendo E duplum producti, ſupereſt D quadratus interualli laterum. Denique E additum ipſi C facere quadratum concluditur per quartam ſecundi Euclidis, quam ideo aſſumpſit Diophantus. Nam ſumma quadratorum C & duplum producti E ſimul faciunt quadratum ſummæ laterum. Quamobrem patet ex omni parte propoſitum, & reſtat tantùm, vt C cubo æquetur quod facilè fit ſupponendo ipſos C D E nota Q. inſignitos eſſe, vt ſint 20 Q. 4 Q. 16 Q. Tunc enim 20 Q. æquabuntur cuilibet cuborum numero cubico, puta 1. c. 8 c. &c. Inueniuntur autem facilè duo numeri qui bis inuicem ducti quadratum faciant, ſi ſumpto ſemiſſe cuiuſlibet quadrati, quærantur duo numeri, quorum mutuo ductu is fiat. Ita Diophantus ſumpto 2. ſemiſſe quadrati 4. inuenit numeros 1 & 2. quorum mutuo ductu fit 2. Et nos in ſuperiore diagrammate ſumpto 8. ſemiſſe quadrati 16. inuenimus numeros 2. & 4. quorum mutuo ductu fit 8. Poteramus etiam ſumere 1. & 8. & alios infinitos mutuo ductu producentes 8.

QVÆSTIO VIII.

ΕΣΤΩ κύβος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τετράγωνος ὁ δεύτερος. ὁ δὲ προσπθέμενος τετράγωνος ὁ τρίτος. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸ προσπθέμενον τετράγωνον ἐφαρμοσθῆναι τῷ δευτέρῳ τουτέστι τετραγώνῳ ποιεῖν κύβον, ποιείτω τὸ πρῶτον. ἐπεὶ δὲ πάλιν θέλω τὸν πρῶτον συντεθῆναι τῷ τρίτῳ ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται μοι εἰς τὸ δεῖν δύο τετραγώνους ὧν ἡ συνθεσις μετ' ἑνὸς αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. διὰ τοῦτο δὲ καὶ οἱ δύο τετράγωνοι, ὅτι προσπθέμενος τῷ δευτέρῳ, καὶ ὁ δεύτερος ποιοῦσι κύβον, τουτέστι τὸ πρῶτον. τετάχθωσαν οἱ δύο τετράγωνοι, ὁ μὲν πρῶτος δ^υ α. ὁ δὲ δεύτερος μ^ο δ. καὶ ἡ συνθεσις αὐτῶν μετ' ἑνὸς αὐτῶν γίνεται δ^υ β μ^ο δ. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ἧς β γ μ^ο β. γίνεται ὁ τετράγωνος δ^υ δ μ^ο δ λείψει ἑνί. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ. ὅτι ταῖς ὑποστάσεσι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κε. ὁ δὲ ις. νῦν τάττω τὸν μὲν προσπθέμενον αὐτοῖς τετράγωνον δ^υ ις. τὸν δὲ δεύτερον δ^υ κε. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται δ^υ ρ. θέλομεν γὰρ συναμφοτέρῳ εἶναι αὐτὸν ἴσον. λοιπὸν δεῖ δ^υ ρ ἴσας εἶναι ι^ι ἑνὶ, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ^ο ρ. ὅτι ταῖς ὑποστάσεσι. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ηι. ὁ δὲ δεύτερος σχ. ὁ δὲ προσπθέμενος συ. τοῦτο δὲ ἀπειράκις δείκνυται.

ESTO cubus, primus: Quadratus, secundus: at adiiciendus quadratus, tertius. Quia igitur volo quadratum adiiciendum, additum secundo, hoc est quadrato facere cubum, faciat primum. Rursus itaque quia volo primum additum tertio, facere quadratum, id mihi oneris incumbit, vt inueniam duos quadratos, quorum summa cum altero ipsorum coniuncta quadratum exhibeat, & præterea duo quadrati addendus scilicet secundo, & ipse secundus simul faciant cubum, videlicet primum. Ponantur duo quadrati, primus quidem 1 Q. secundus 4. & summa ipsorum cum altero juncta facit 2 Q. + 4. æqualem quadrato à latere 2 N − 2. fitque quadratus 4 Q. + 4 − 8 N. & fit 1 N. 4. Ad positiones. Erit alter 4. alter 16. Nunc ergo statuo quadratum addendum 16 Q. secundum autem 4 Q. Primus ergo erit 20. Q. quia volumus eum ambobus æqualem esse. Supereſt vt 20 Q. æquentur 1 C. & fit 1 N. 20. Ad positiones. Erit primus 8000. secundus 1600. tertius addendus 6400. & infinitis modis soluitur quæstio.

IN QVAESTIONEM VIII.

EADEM est hæc quæstio cum præcedente. Sed operatio paulò diuersa lemma quod assumit Diophantus ad inueniendum duos quadratos, quorum summa adscito altero ipsorum quadratum faciat, poterat reduci ad vndecimam secundi, si propositum fuisset hoc modo. Inuenire duos quadratos, quorum interuallum sit duplum alicuius quadrati. Hoc enim idem esse manifestum est: Quia cùm summæ quadratorum addetur alter, hoc aggregatum continebit additum bis, & alterum semel. Porrò ex operatione formatur huiusmodi Canon.

Sume duos quadratos quorum summa cum altero ipsorum quadratum faciat. Horum summa cubus est primus quæsitorum. Eiusdem summa quadratus ductus in sumptos quadratos, dat reliquos numeros.

QVÆSTIO IX.

ΚΥΒΟΝ καὶ πλευρὰν προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ποιεῖν ἅ αὐτά. ἔστω ὁ προσπθέμενος ς^ὸ α. ἡ δὲ τοῦ κύβου πλευρὰ ἧς ὁσωνοῦν. ἔστω ἧς β. ὁ ἄρα κύβος ὁξι κ^ο η. ἐὰν ἄρα ς^ὸ α προστεθῇ κι^ις β. γίνεται ξ^ὸ γ. ἐὰν δὲ ταῖς κ^ο η. γίνεται κ^ο ιη. ς^ὸ α. ταῦτα ἴσα κ^ο κζ. ἀφῃρήσθωσαν οἱ κ^ο η. λοιπὸν ἄρα κ^ο ιθ. ἴσοι ς^ὸ ἑνὶ. πάντα δὲ ς^ὸ δ^ο ἄρα ιθ. ἴσαι μ^ο α. καὶ ἔστι ἡ μία μονὰς τετράγωνος. εἰ δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῆς ιθ δ^ο ἡ τε-

CVBO & lateri eius eundem addere numerum, & eadem facere. Sit addendus numerus 1 N. latus verò cubi Numerorum quotlibet. Esto 2 N. Ergo cubus est 8 C. Iam si 1 N. addatur ad 2 N. fiunt 3 N. si ad 8 C. fit 8. C. + 1 N. hæc æquantur 27 C. Auferantur vtrinque 8 C. relinquuntur 19 C. æquales 1 N. Omnia per numerum diuidantur 19 Q. æquantur 1. & est vnitas quadratus & si 19. nu-

merus quadratorum quadratus esset, explicari æquatio posset. Sed 19 Q. proueniunt ab excessu quo 27 C. superant 8 C. & 27 C. est cubus à latere 3 N. At 8 C. est cubus à latere 2 N. Proinde 19 Q. facti sunt ex excessu quo cubus à 3 N. superat cubum à 2 N. Atqui 2 N. habentur ex positione, & 3 N. fiunt vnitate addita ad ipsos positionis numeros. Eò ergo res rediit, vt inueniantur duo numeri vnitate differentes, vt interuallum cuborum ab ipsis, sit quadratus numerus. Esto alter 1 N. alter 1 N. + 1. & interuallum cuborum est 3 Q. + 3 N. + 1. Hæc æquantur quadrato à latere 1 — 2 N. & fit 1 N. 7. Ad positiones. Erit alter 7. alter 8. Iam redeo ad postulata ab initio, & pono adiiciendum numerum 1 N. latus autem cubi 7 N. Igitur cubus erit 343 C. & si 1 N. vtrique adiiciatur, facit hunc quidem 8 N. illum verò 343 C. + 1 N. Volumus ergo hunc esse cubum, cujus latus sit 8 N. Quare 512 C. æquantur 343 C. + 1 N. & 1 N. $\frac{1}{11}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{343}{1331}$. latus autem $\frac{7}{11}$. Adiiciendus $\frac{1}{11}$.

τράγωνος λέλυτο ἂν ἡ ἰσότης. ἀλλ' αἱ ιθ̄. ἐκ τῆς ὑπεροχῆς εἰσιν ἧς ὑπερέχουσι κ̄ʸ κζ̄. κ̄ʸ κ̄. κ̄ʸ δὲ κ̄ʸ ᾱ. ἀπὸ ς̄ς̄ γ̄. κύβος εἰσίν. αἱ δὲ κ̄ʸ ᾱ ἀπὸ ς̄ς̄ β̄. κ̄ʸ ὄσι. ὥστε τὰ ιθ̄ γίνεται ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἧς ὑπερέχει ὁ ἀπὸ ς̄ς̄ γ̄ κύβος, τοῦ ἀπὸ ς̄ς̄ β̄ κύβου. ἀλλ' αἱ μὲν ς̄ς̄ᵘ β̄. τῆς ὑποθέσεως εἰσίν, αἱ δὲ τρεῖς, ἀεὶ μοναδὶ μείζονες τοῦ τυχόντος πλήθους τοῦ τεθέντος ς̄ς̄. ἁπλῶς οὖν μοι εἰς τὸ δύρεῖν β̄ ἀριθμοὺς μοναδὶ ᾱ ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ἵνα ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ μὲν ς̄ᵒ ᾱ. ὁ δὲ ς̄ᵒ ᾱ. ἐὰν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων ὄσι δ̄ʸ γ̄. ς̄ς̄ Γ. μ̄ᵒ ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ᵒ ᾱ. λείψει ς̄ς̄ β̄. κ̄ʸ γίνεται ὁ ς̄ᵒ μ̄ᵒ ζ̄. ἐπὶ τὰς ὑποτάσεις. ἔστω ὁ μὲν ζ̄. ὁ δὲ η̄. ἔρχομαι οὖν ὅπου τὸ ἐξ ἀρχῆς. κ̄ʸ τάσσω τὸν μὲν προστιθέμενον ς̄ς̄ᵒ ᾱ. τὸν δὲ τοῦ κύβου πλευρὰν ς̄ς̄ᵒ ζ̄. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κ̄ᵒ τμγ̄. κ̄ʸ ὁ ς̄ᵒ ᾱ. προστιθεὶς ἑκατέρῳ αὐτῶν ποιεῖ, ὃν μὲν ς̄ς̄ η̄. ὃν δὲ κ̄ᵒ τμγ̄. ς̄ᵒ ᾱ. θέλομεν οὖν ταῦτα εἶναι κύβον πλευρὰν ἔχοντα ς̄ς̄ᵒ κ̄. κ̄ᵒ ἄρα φιβ̄. ἴσοι κ̄ᵒ τιϛ̄. ἀριθμῷ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵒ ᾱ ιϛ̄. ὅπου τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν κ̄ᵒ τιϛ̄. καὶ ιζ̄. ἡ δὲ πλευρὰ ζ̄. ιϛ̄. ὁ δὲ προστιθέμενος ᾱ ιϛ̄.

IN QVAESTIONEM IX.

VERBA Diophanti perspicua sunt, & ad erudiendum aptissima. Cùm enim in prima operatione positionibus ad libitum factis, ad æquationem inexplicabilem deueniatur, vbi 19 Q. æquantur 1. & solutio est irrationalis, repetitis analyseos vestigiis considerat vnde 19. prouenerit, sit quippe ex interuallo cuborum 8. & 27. vnde rectè infert quærendos esse duos cubos quadrato distantes, ita vt & cuborum latera vnitate distent. Quod tamen lemma poterat etiam vniuersalius proponi, nimirum sic.

Duos cubos inuenire quorum interuallum sit quadratus Numerus, & quorum latera distent etiam quadrato numero.

Sit vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 4. vt laterum interuallum sit quadratus numerus, erit cuborum interuallum 64 + 12 Q. + 48 N. quod æquatur quadrato. Fingatur eius latus 6 N — 8. fiet 1 N. 6. Erunt ergo cuborum latera 6. & 10. Ipsi cubi 216. & 1000. quorum interuallum 784. quadratus à latere 28. Huius autem lemmatis ope licebit etiam variare positionem numeri adiiciendi, nam poni poterit quilibet Numerorum numerus quadratus. Verbi gratia ponatur 4 N. Quærendi ergo erunt duo cubi, vt laterum interuallum sit 4. & cuborum interuallum sit quadratus numerus. Hi sunt per allatum lemma 6. & 10. Quare ponetur quæsiti cubi latus 6 N. ipse cubus 216 C. & vtrique adiiciendo 4 N. fient 10. N. & 216. C. + 4 N. quorum hic cubus esse debet, ille verò latus huius cubi. Igitur 216 C. + 4 N. æquantur 1000. C. & tandem 4 N. æquantur 784 C. & fit 1 N. $\frac{196}{25}$. Est igitur cubi quæsiti latus $\frac{7}{25}$ ipse cubus $\frac{343}{15625}$. Adiiciendus verò numerus $\frac{1}{11}$ quo vtrique addito fiunt $\frac{9}{25}$ & $\frac{1331}{15625}$ Cubus scilicet & latus eius.

Cæterùm licebit etiam soluere huiusmodi quæstiones ad hanc materiam pertinentes.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi quadrato distent numero.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera Cuborum 1 N. & 2 N. erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadrato. Esto is quilibet numerus Quadratorum quadratus, puta 49 Q.

fiet 1 N. 7. Sunt igitur latera cuborum 7. & 14. & satisfaciunt proposito.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi distent numero quadratoquadrato.

Sit data ratio dupla. Ponantur latera cuborum 1 N. & 2 N. Erunt cubi 1 C. & 8 C. quorum interuallum 7 C. æquatur quadratoquadrato. Esto is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus, puta 1 QQ. fit 1 N. 7. & sunt latera cuborum vt prius 7. & 14.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos cubos quadrato distantes, quorum latera distent cubo numero.

Sit vnius cubi latus 1 N. alterius verò 1 N. + quolibet cubocubo puta 1 N. + 64. erit cuborum interuallum 262144 + 12288 N. + 192 Q. æquale quadrato, fingatur eius latus 512. − 14 N. fiet quadratus 262144 − 14336 N. + 196 Q. & fiet 1 N. 6656. Sunt igitur cuborum latera 6656. & 6720. quorum interuallum est cubus 64. Sunt autem cubi 2948763484 16 & 30346444800 0. quorum interuallum 8588099584. quadratus est à latere 91672.

Eodem artificio inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent cubocubo, erunt enim iidem proximè inuenti. Similiter inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent quadratoquadrato, si ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + quolibet quadratoquadrato, puta 1 N. + 16. Ac demum inuenientur duo cubi quadrato distantes, quorum latera distent quadratocubo, si ponatur vnius latus 1 N. Alterius verò 1 N. + quolibet numero quadrato simul & quadratocubo, puta 1 N. + 1024.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Interuallum autem laterum sit datus numerus.

Esto interuallum laterum 3. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 1 N. + 3. erit cuborum interuallum 27. + 27 N. + 9 Q. quod cùm ad 3. debeat habere rationem quadrati ad quadratum, diuiso eo per 3. fiet 9 + 9 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Fingatur eius latus 3 − 2 N. fiet 1 N. 21. Sunt ergo cuborum latera 21 & 24. & satisfit proposito.

Huius vltimæ quæstionis auxilio vniuersalius adhuc quàm per lemmata suprà tradita soluetur Diophantæum problema. Licebit enim adiiciendum numerum ponere quemlibet Numerorum numerum, puta 3 N. sed tunc quærendi erunt duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum sit vt quadratus ad quadratum. Interuallum autem laterum sit 3. & reperientur qui suprà. Quare ponetur latus cubi 21 N. ipse cubus 9261 C. quibus si addas sigillatim 3 N. fient 24 N. & 9261 C. + 3 N. quorum ille istius latus cubicum esse debet. Quare 13824 C. æquantur 9261 C. + 3 N. & tandem 4563. C. æquantur 3 N. & fit 1 N. $\frac{1}{1521}$. Est igitur latus cubi $\frac{1}{1521}$ vt apud Diophantum, & adiiciendus numerus $\frac{1}{1521}$. Et hic aduertè inuentis semel duobus cubis, quorum interuallum ad laterum interuallum sit vt quadratus ad quadratum, si sumantur duo alij quicunque numeri in eadem cum lateribus ratione, interuallum quoque cuborum ab ipsis ortorum fore ad ipsorum numerorum interuallum vt quadratus ad quadratum. Ita quoniam 1000. & 216. interuallum 784. ad laterum 10. & 6. interuallum 4. est vt quadratus ad quadratum, si loco ipsorum 6. & 10. sumas 3. & 5. cuborum quoque 27. & 125. interuallum 98. ad laterum interuallum 2. est vt quadratus 49 ad quadratum 1. cuius rei demonstratio ex iis quæ ad sequentem ostendemus, liquidò constabit.

QVAESTIO X.

Κύβον καὶ πλευρὰν προσθεῖναι τὸν αὐτὸν κ᾽ πλευρὰν ποιεῖν τὸν ἀπὸ κύβου. ἔστω ὁ μὲν κύβος κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ ἡ κ᾽. ἡ δὲ πλευρὰ αὐτῆς ἴσαι ἐξ β. τετάχθω δὲ ὁ προστιθέμενος κύβος κυβικῶν ὅσων δήποτε λείψαν τῶν πρώτων κύβων πλευρὰν ἕνα. δεῖ κ᾽ κξ᾽ λείψει ἐξ β. καὶ ἐπεὶ μὲν τοῖς ἐξ β προστεθέντες ποιοῦσι κ᾽ κξ᾽. καὶ ἔστιν ὁ κύβος ἀπὸ

CVBO & lateri eundem addere numerum, & eadem facere ordine inuerso. Esto cubus cuborum cubicorum quotlibet verbi gratia 8 C. Igitur latus erit 2 N. Ponatur autem adiiciendus, alius cuborum numerus cubicus, minus latere prioris cubi, esto itaque 27 C. − 2 N. & si addatur ad 2 N. fiunt 27 C. qui est

bus à latere 3 N. si autem addatur ad 8 C. fiunt 35. C. — 2 N. volumus autem hæc esse latus cubicum factorum 27 C. hoc est 3 N. Proinde 35 C. — 2 N. æquantur 3 N. & fiunt 5 N. æquales 35 C. & si omnia per numerum diuidantur 35 Q. æquantur 5. & non contingit solutio rationalis, propterea quod species ad speciem non habet rationem quam quadratus ad quadratum. Sed 35 Q. est summa duorum cuborum, ipsius 27. & ipsius 8. vnitates verò 5. est summa laterum ipsorum. Res itaque eò deducta est, vt inueniendi sint duo cubi, quorum summa ad summam laterum ipsorum rationem habeat quam quadratus ad quadratum. Sunto latera illorum coniuncta vnitatum quotlibet, verbi gratia 2. & ponatur prioris cubi latus 1 N. Igitur alterius latus erit 2 — 1 N. & cubi illorum iuncti faciunt 6 Q. + 8 — 12 N. volumus ergo hæc ad laterum summam, hoc est ad 2. habere rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Atqui 2. duplum est quadrati. Quare & 6 Q. + 8 — 12 N. duplum oportet esse quadrati. Semissis igitur, nempe 3 Q. + 4 — 6 N. æquatur quadrato. Esto quadrato à latere 2 — 4 N. & fit 1 N. $\frac{12}{13}$. Ad positiones. Erit alterũ latus $\frac{12}{13}$ alterum $\frac{15}{13}$. Tollo decimas tertias, & semisses ipsorum capio, fiunt cuborum latera 5. & 8. Venio ad propositum ab initio, & pono cubi latus 5 N. cubus ergo est 125 C. Addendum verò statuo cubum à latere 8 N. minus latere prioris cubi, nimirum 512 C. — 5 N. & additus quidem ad 5. N. facit cubum, additus verò ad 125 C. facit 637 C. — 5 N. Volumus ergo hæc esse latus cubicum de 512 C. Quare 8 N. æquantur 637 C. — 5 N. & fit 1 N. $\frac{5}{8}$. Ad positiones. Erit cubus $\frac{125}{512}$. latus verò $\frac{5}{8}$. At numerus adiiciendus $\frac{637}{512}$.

πλάδρας ϛ̄ϛ̄ γ̄. ἐαν ᾖ τῆς χ̄ᵒ η̄. ποιῶσι χ̄ᵒ λϵ̄. λείψει ϛ̄ϛ̄ β̄. θέλομϵν δὴ ταῦτα πλάδρᾳ εἶναι κυβικῷ τῷ γινομϵνῳ κ̄ᵒ κζ̄. τουτέστι ϛ̄ϛ̄ᵅ γ̄. κ̄ᵒ ἄρα λϵ̄ λείψει ϛ̄ϛ̄ β̄. ἴσοι ϛ̄ϛ̄ᵅ γ̄. κ̣ὺ γίνονται ϛ̄ϛ̄ᵅ ῑ. ἴσοι κ̄ᵒ λϵ̄. ϗ πάντα πολλαπλάσια ϛ̄. δ̄ᵒ ἄρα λϵ̄. ἵνα μᵒ ῑ. κ̣ὺ γίνεται ὑ̄ς̄ᵒ οὐ ῥητὸς παρὰ μὴ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀλλ' αἱ μὲν δ̄ᵒ λϵ̄. συνθϵσίς εἰσι δύο κύβων τῶν κζ̄. κ̣ὺ τῶν η̄. αἱ ᾗ μᵒ ῑ. ὧν τῆς συνθέσϵως τὴν πλάδραν αὐτὴν. ἀπῆκται δὲ μοι εἰς τὸ δεῖν δύο κύβους ὁι συνθέντες πρὸς τὰς πλάδρας αὐτὴν συνθέντας λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἔστωσαν αἱ πλάδραι αὐτὴν συνθϵῖσαι μονάδες ὅσαι δήποτε, ἔστωσαν ᾗ β̄. ϗ τετάχθω ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλάδρα ϛ̄ᵅ ā. ἡ ἄρα τοῦ ἑτέρου ἔσται μᵅ β̄ λείψει ἀριθμῷ ā. κ̣ὺ αἱ αὐτὴν κύβοι συνθέντες ποιῶσι δυνάμεις ϛ̄ μᵅ η̄ λείψει ϛ̄ϛ̄ ιβ̄. θέλομϵν δὴ ταῦτα πρὸς τὰς πλάδρας αὐτὴν συνθϵῖσας, τουτέστι πρὸς μονάδας β̄ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. κ̣ὺ εἰσὶ δύο μονάδες διπλάσιαι τετραγώνου. ὥστε κ̣ὺ δ̄ᵒ ϛ̄ μᵅ η̄ λείψει ϛ̄ϛ̄ ιβ̄. διπλάσιαι εἰσὶ τετραγώνου. τὸ ἄρα ἥμισυ αὐτὴν ἴσον τετραγώνῳ. τουτέστι δ̄ᵒ γ̄ μᵅ δ̄ λείψει ϛ̄ϛ̄ ϛ̄. ἴσαι γίνονται τῇ ἀπὸ μᵅ β̄ ϛ̄ϛ̄ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ ῑᵛ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσϵις. ἔσται ἡ μὲν ῑᵛ̄. ἡ δὲ κ̄ᵛ̄. αἰεὶ γὰρ τὰ τελικὰ δύο λαβὼν, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῶν λαμβάνω, γίνονται τῶν κύβων αἱ πλάδραι, ἡ μὲν ῑ. ἡ δὲ η̄. ἐρχόμαι δὲ δεῖ τὸ ἐξ ἀρχῆς, ϗ τάσσω τὴν τοῦ κύβου πλάδρα ϛ̄ϛ̄ ῑ. ὁ ἄρα κύβος ἔσται κ̄ᵒ ρκ̄. ὁ δὲ προσπϵίμενος κύβος ἀπὸ ῥ̄ η̄ ϛ̄ϛ̄ λείψει τῆς πλάδρας τοῦ πρώτου κύβου. τουτέστι κ̄ᵒ φιβ̄ λείψει ϛ̄ϛ̄ ῑ. καὶ προσθὶς ἀριθμοῖς ῑ ποιεῖ κύβον. τοῖς δὲ κ̄ᵒ ρκ̄. ποιεῖ κ̄ᵒ χλζ̄ λείψει ϛ̄ϛ̄ ῑ. θέλομϵν δὴ ταῦτα εἶναι πλάδρᾳ κ̄ᵒ φιβ̄. ἀριθμοὶ ἄρα η̄ ἴσοί εἰσι κ̄ᵒ χλζ̄ ϛ̄ϛ̄ ῑ. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ā ϛ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσϵις. ἔσται ὁ μὲν κύβος ρκ̄ τμγ̄. ἡ δὲ πλάδρα ῑ ϛ̄. ὁ δὲ προσπϵίμενος ἀριθμὸς σξζ̄ τμγ̄.

IN QVAESTIONEM X.

IPSO initio Græca deprauatissima erant. Nam legebatur, κύβον ϗ πλευρὰν προσθεῖναι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, pro quo reposui, κύβῳ ϗ πλευρᾷ, &c. Deinde legebatur, ἔστω ὁ μὲν κύβος μονάδων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ η̄. pro quo reposui, κύβων κυβικῶν ὅσων δήποτε, ἔστω δὲ κ̄ᵒ η̄. Præterea deerant multa, quæ omnino flagitante sententia fuerunt adiicienda, quæ omnia more nostro virgulis inclusimus. Denique denominatores passim omissi erant quos restituimus.

Porrò manifestum est quæstionem pendere à lemmate quod assumit Diophantus, quo scilicet

quærit duos Cubos, quorum ſumma ad ſummam laterum ſit vt quadratus ad quadratum. Quod quia ſequenti quoque quæſtioni inſeruit, & multa ſunt notatu digna in eius enodatione, pluribus à nobis explicabitur.

Aduerte igitur primò laterum ſummam poni potuiſſe non ſolum 2. vt fecit Diophantus, ſed & quemlibet vnitatum numerum, puta 3. 4. 5. &c.

Aduerte ſecundo ſummam cuborum 6 Q. + 8 − 12 N. diuidi per laterum ſummam 2. & quotientem 3 Q. + 4 − 6 N. æquari quadrato. Quia ſumma cuborum & ſumma laterum debent eſſe plani ſimiles. At ex duorum planorum ſimilium mutua multiplicatione vel diuiſione quadratum fieri manifeſtum eſt.

Aduerte tertiò non potuiſſe fingi latus ipſius 3 Q. + 4 − 6 N. niſi vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus fuiſſet; vt in ſimili iam ſæpe docuimus. Quare videndum quomodo vnitatum numerus 4. inueniatur quadratus, ne caſu non arte certa id fieri putetur. Proueniunt autem vnitates 4. ex cubo 8. diuiſo per ſuum latus 2. Quamobrem cùm quolibet cubo per latus ſuum diuiſo, oriatur quadratus ab eodem latere, patet vtique propoſitum.

Aduerte quarto cautè admodum formandum eſſe latus ſupradicti numeri 3 Q. + 4 − 6 N. Etenim cùm alterum laterum poſitum ſit 2 − 1 N. patet valorem Numeri debere eſſe minorem quàm 2. ſit autem valor Numeri, à quodam quadrato ſubtrahendo ternarium, & per reſiduum diuidendo quadruplum lateris multatum ſenario. Quare ſi ponatur huiuſmodi quadratus 1 Q. patet $\frac{4}{1}$ debere eſſe minus quàm 2. At proinde 4 N. − 6. minus ſunt quàm 2. Q. − 6. & tandem 4 N. minore, eſſe debent quàm 2 Q. At ſi æquarentur fieret 1 N. 2. Igitur patet quæſiti quadrati latus maius eſſe debere quàm 2. Quare ipſius 3 Q. + 4 − 6 N. latus fingendum erit à 2 − quotlibet numeris, quorum multitudo ſit maior quàm 2. ſic Diophantus finxit hoc latus 2 − 4 N. & fingi poſſet 2 − 5 N. 2. − 6 N. &c.

Præterea cauendum eſt ne cuborum latera æqualia reperiantur, atque adeo ne ipſi cubi ſint æquales, quamuis enim ſi hoc accidat, lemma propoſitum nihilominus ſoluatur, quia quilibet cubus ad ſuum latus rationem habet quadrati ad quadratum, cùm inter eos cadat medius proportionalis quadratus ab eodem latere, ac proinde duplum cubi ad duplum lateris ſit in eadem ratione, attamen per huiuſmodi æquales cubos quæſtio propoſita nequit commodè explicari, quoniam reſoluendo hypoſtaſes numerus additius inuenitur nihilum. Quamobrem non temerè additum eſt in textu. *Ponatur adiiciendus alius cuborum numerus*, &c. Etenim ponatur verbi gratia cubus quæſitus 8 C. cuius latus 2 N. & ponatur addendus numerus 8 C. − 2 N. patet tandem æquationem procedere inter 16 C. & 4 N. ſeu inter 16 Q. & 4 vnde fit 1 N. $\frac{1}{4}$ per quem reſoluendo hypoſtaſes fit cubus quæſitus 1. latus 1. Addendus verò numerus ſit 1 − 1. id eſt nihil. Idemque ſemper eueniet, ſi in additio numero ponatur idem cuborum numerus qui ponitur pro cubo quæſito, vt facilè eſt demonſtrare, quia hypoſtaſis additij numeri eſt ſemper in hoc caſu numerus ille cuborum cubicus, minus ſuo latere. Quare cùm ita operando cubus ſemper inueniatur 1. ac proinde latus 1. neceſſe eſt additicium numerum eſſe 1 − 1. Ne igitur in hoc abſurdum deueniamus, cauendum eſt in lemmatis ſolutione ne quæſiti cubis æquales reperiantur, hoc eſt ne valor Numeri ſit æqualis ſemiſſi ſummæ laterum, vt in hypotheſi Diophanti vbi ſumma laterum ponitur 2. cauendum eſt ne valor Numeri ſit 1. ſit autem valor Numeri, vt iam oſtenſum eſt $\frac{4}{1+1}$ hoc ergo non debet æquari vnitati, ſed ſi ponatur æquari vnitati, fient 4 N. − 6. æquales 1 Q. − 3. & tandem 4 N. æquabuntur 1 Q. + 3. Qua æquatione reſoluta fit 1 N. 3. Quamobrem ad vtramque cautionem ſimul reſpiciendo fingendum eſt latus quadrati 3 Q. + 4 − 6 N. à 2. − tot Numeris qui excedant 2. dum non ſint 3.

Aduerte poſtremo cur Diophantus inuentis cuborum lateribus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}$ adiiciat denominatorem, & ſumat ſemiſſes Numeratorum, eam non eſſe cauſam quam affert Xilander, hæc enim ex parte nil aliud eſt quàm manifeſta petitio principij; ex parte vero neſcio quid ad rem prorſus impertinens. Nam quod loco ipſorum $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}$ ſumantur ſemiſſes eorum, nempe $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{8}$ eam dicit eſſe cauſam quod oporteat eorum cubos æquari quadrato, quod ſanè non facit ad rem, non enim quæruntur duo Numeri, quorum cubi ſimul æquentur quadrato, ſed quorum cubi ſimul ad ipſorum numerorum ſummam ſint in ratione quadrati ad quadratum. Deinde quòd adiecto communi denominatore, ſumantur numeratores 5. & 8. eam reddit rationem quod denominator communis eſt, vt ſi de cubis numeratorum conſtet eos ad ipſorum numeratorum ſummam habere rationem quadrati ad quadratum, abundè ſit rei ſatisfactum. Hoc verò eſt petere principium, cùm hoc vnum ſit quod controuertitur, non enim oſtendit cubos numeratorum ad laterum ſummam eſſe in ratione quadrati ad quadratum. Atqui certum eſt cubos ipſorum $\frac{5}{1}$ & $\frac{8}{1}$ ad vnitatem quæ eſt ſumma ipſorum, longè diuerſam rationem habere, ea quam habent cubi numerorum 5. & 8. ad ſummam ipſorum 13. quamuis ſit vtrobique ratio quadrati ad quadratum. Huius ergo rei cauſam adæquatam afferemus tale demonſtrantes Theorema.

Si fuerint duo numeri, quorum cubi ſimul ad ſummam numerorum rationem habeant

beant

beant quadrati ad quadratum, si sumantur alij duo numeri in eadem ratione, circa illos, ipsorumque cubos idem eueniet.

Sint duo numeri A B. quorum cubi C D. & ipsorum C D summa esto F. ipsorum A B. summa esto E sintque F E plani similes, sumanturque H K in ratione ipsorum A B. & sint eorum cubi L M. quorum summa P. ipsorum verò H K summa esto N. Dico ipsos quoque P N. esse planos similes, sumatur R denominator rationis ipsorum H K. ad ipsos A B. ita vt ducto R in ipsos A B. fiant H K. & sit S quadratus ipsius R. & T. eiusdem cubus. Patet ergo ex cubo T in cubos C D. fieri etiam cubos L M. At quia ex R in A B. fiunt H K. ex eodem R in E summam ipsorum A B. fiet vtique N. summa ipsorum H K. Eademque de causa ex T in F. fiet P. Itaque quoniam F E ponuntur plani similes, ' cadet inter eos vnus medius proportionalis, esto is G. quo ducto in S fiat Q. Igitur quia F G E sunt continuè proportionales, & ipsi quoque R S T. continuè proportionales sunt, & ex primo R. in primum F. fit P. At ex secundo S in secundum G fit Q. Ac demum ex tertio T in tertium E fit N, ' erunt & ipsi P Q N. continuè proportionales. Quare cùm inter ipsos P. N. cadat vnius medius proportionalis Q. ' sunt ipsi P N. plani similes. Quod demonstrandum erat.

C 125. A 5. D 512. B 8. R 2 F 637. G 91. E 13. S 4. L 1000. H 10. T 8. M 4096. K 16. P 5096. Q 364. N 16.

18. octaui.

14. 1. porism.

20. octaui.

Hinc patet cur loco ipsorum $\frac{5}{13}$ & $\frac{8}{13}$ sumantur 5. & 8. quia scilicet hi sunt in eadem ratione cum illis, quia fiunt ducendo vtrumque in 13. tum productos 10. & 16. diuidendo per 2. Hinc etiam constat demonstratio eius quod diximus ad quartam earum quas attulimus ad præcedentem, nimirum. *Si fuerint duo numeri quorum interuallum ad interuallum cuborum ab ipsis ortorum sit in ratione quadrati ad quadratum, idem eueniet aliis quibuscunque numeris in eadem ratione sumptis.* Nam eadem ratione ostendetur ex R in interuallum ipsorum A B fieri interuallum ipsorum H K. & ex T in interuallum cuborum C D. produci interuallum cuborum L M. & rursus ex S in medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum C D. & interuallum laterum A B procreari medium proportionalem qui cadit inter interuallum cuborum L M. & interuallum laterum H K. Quamobrem eodem argumento concludetur propositum.

Porro loco lemmatis à Diophanto assumpti, licebat assumere aliud lemma simile illi quo vsus est ad præcedentem, nimirum.

Inuenire duos cubos, quorum summa sit quadratus numerus, & laterum summa sit etiam quadratus numerus.

Ponatur laterum summa 4. vt sit quadratus, & sit alterum 1 N. alterum 4 − 1 N. Erit summa cuborum 64. + 12 Q. − 48 N. æqualis quadrato, cuius latus fingetur 8 − tot Numeris vt fiat valor Numeri minor quàm 4. dum is non sit 2. ob causas suprà explicatas aduertendo quarto. Quare simili artificio determinando numerum hunc Numerorum in latere fictitio ponendum inueniemus eum maiorem esse debere quàm 4. dum non sit 6. Ponatur ergo latus fictitium 8 − 12 N. fiet quadratus 64 + 144 Q. − 192 N. æqualis 64 + 12 Q. − 48 N. & fit 1 N. $\frac{4}{11}$. Sunt igitur cuborum latera $\frac{44}{11}$ $\frac{36}{11}$ quorum summa 4. Ipsi verò cubi $\frac{85184}{1331}$ & $\frac{46656}{1331}$ quorum summa $\frac{131840}{1331}$ quadratus à latere $\frac{464}{121}$. Itaque si libeat his vti cubis ad soluendum problema Diophantæum pones cubum quæsitum $\frac{131840}{1331}$ C. cuius latus $\frac{4}{11}$ N. additicius numerus erit $\frac{1331}{131840}$ C. − $\frac{4}{11}$ N. quem addendo lateri fit cubus $\frac{85184}{1331}$ C. & eum addendo cubo fit $\frac{85184}{1331}$ C − $\frac{4}{11}$ N. æqualis $\frac{36}{11}$ N. Quare tandem $\frac{85184}{1331}$ Q. æquantur 4. & fit 1 N. $\frac{44}{121}$. Est ergo latus cubi quæsiti $\frac{36}{11}$ ipse cubus $\frac{46656}{1331}$ Numerus additicius $\frac{44}{121}$ & constat.

Hic etiam possumus afferre nonnullas quæstiones ad instar earum quas ad præcedentem attulimus videlicet.

QVÆSTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadratum conficiant.

Esto data ratio tripla, sit vnus 1 N. alter 3 N. horum cubi simul conficiunt 28 C. quod æquatur quadrato. Sit is quilibet numerus quadratorum quadratus, puta 196 Q. fit 1 N. 7. Sunt ergo quæsiti numeri 7. & 21. quorum cubi 343. & 9261. quorum summa 9604. quadratus est à latere 98.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros in data ratione, quorum cubi simul quadrato quadratum conficiant.

Esto data ratio dupla, sit alter 1 N. alter 2 N. horum cubi simul conficiunt 9. C. æquales quadratoquadrato. Sit is quilibet quadratoquadratorum numerus quadratoquadratus puta 1 Q Q. fit 1

N. 9. Sunt ergo quæsiti numeri 9. & 18. quorum cubi 729. & 5832. quorum summa 6561. quadrato-quadratus est à latere 9.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros cubum simul conficientes, quorum cubi simul quadratum faciant.

Ponatur summa quæsitorum Numerorum numerus cubocubus, puta 64. & sit alter 1 N. alter 64 − 1 N. horum cubi faciunt 262144 + 192 Q. − 12288 N. quod æquatur quadrato, cuius latus debet fingi 512. − tot Numeris, vt valor Numeri reperiatur minor quàm 64. Quare per artificium traditum aduertendo quarto, inuenietur hanc Numerorum multitudinem quæ ponenda est in latere fictitio, maiorem esse debere quàm 16. fingatur ergo huiusmodi latus 512 − 18 N. fiet 1 N. $\frac{18}{512}$. Sunt igitur quæsiti numeri $\frac{18}{512}$ & $\frac{494}{512}$ quorum summa 64. At eorum cubi sunt $\frac{5832}{134217728}$ $\frac{119823304}{134217728}$ quorum summa $\frac{119829136}{134217728}$ seu in minimis $\frac{14978642}{16777216}$ quadratus est à latere $\frac{3749}{4096}$.

QVÆSTIO XI.

ΕΤΡΕΙΝ δύο κύβους ἴσους ταῖς ἰδίοις πλευραῖς. ἔστωσαν δὴ αἱ τῶν δυοῖν κύβων ἐν ἀριθμοῖς. ἡ μὲν ἀριθμὸν β̄. ἡ δὲ ς̄ γ̄. οἱ ἄρα κύβοι συντιθέντες ποιήσουσι κ̄ λ̄ ἴσους ταῖς πλευραῖς, τουτέστι ἀριθμοῖς ε̄. καὶ πάντα τῶν ἀριθμόν. δυνάμεις ἄρα λ̄ ἴσαι μ̄ ε̄. κὴ γίνεται ὁ ς̄ ῥητός. ἀλλ' αἱ δ̄ λ̄ σύνθεσίς εἰσι κύβων δύο, τῶν τε ᾱ καὶ τοῦ κζ̄. οἱ ἄρα ςς̄ ᾱ συντεθεισῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν. ἀπῆκται ἂν μοι εἰς τὸ δεῖν κύβους δύο δι' συντιθέντας καὶ μεριθέντας εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῶν ποιῆσαι τὸν τῶν τετράγωνον. τοῦτο δὴ προεδείχθη, καὶ εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ςς̄ ᾱ. ἡ δὲ ς̄ ε̄. ἔρχομαι νῦν ὅπερ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὰς πλευρὰς τῶν κύβων, ἴων μὲν ςς̄ ᾱ. ἴων δὲ ς̄ ε̄. κὴ οἱ κύβοι συντιθέντες γίνονται κ̄ χλζ̄. ταῦτα ἴσα ταῖς πλευραῖς τουτέστι ςς̄ ιγ̄. κὴ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ ζ̄. ὅπερ τὰς ὑποστάσης. ἔσται ἑκὰς τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ε̄ ζ̄. ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ᾱ ζ̄ αὐτοὶ δὲ οἱ κύβοι, ὃς μὲν ρκδ̄ ϡμγ̄. ὃς δὲ φιβ̄ ϡμγ̄.

INVENIRE duos cubos suis æquales lateribus. Statuantur cuborum latera in numeris, alterum 2 N. alterum 3 N. Ipsi ergo cubi coniuncti facient 35 C. æquales summæ laterum, hoc est 5. N. & omnia per numerum diuidantur. Igitur 35 Q. æquantur 5. Et non fit numerus rationalis. Atqui 35 Q. summa sunt duorum cuborum 8. & 27. & 5. N. est summa laterum ipsorum. Itaque res eò rediit, vt inueniendi sint duo cubi quorum summa per laterum summam diuisa, quotientem faciat quadratum. Hoc autem iam ostensum est, & sunt cuborum latera 8. & 5. Redeo igitur ad propositum ab initio, & pono latera cuborum 8 N. & 5 N. & fit summa cuborum 637 C. summæ laterum æqualis nimirum 13 N. & fit 1 N. $\frac{5}{7}$. Ad positiones. Erit prioris cubi latus $\frac{40}{7}$. alterius $\frac{25}{7}$. Ipsi vero cubi $\frac{64000}{343}$. & $\frac{15625}{343}$.

IN QVAESTIONEM XI.

OPERATIO Diophanti facilis est & perspicua, & tota innititur lemmati ad præcedentem explicato. Cæterum eodem ferè artificio soluemus huiusmodi quæstionem.

Inuenire duos cubos, quorum summa ad summam laterum sit in data ratione, dummodo denominator rationis sit quadratus, vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

EAdem addenda huic determinationi quæ in notis sequentis addidimus, & miror Bachetum non quod methodum generalem, quæ sanè est difficilis, non viderit, sed quod saltem non admonuerit lectores hanc quæ ab ipso traditur, non esse generalem.

Sit primùm data ratio quadrupla, cuius denominator quadratus est. Ponatur vnum latus 1 N. alterum 2 N. erit summa cuborum 9 C. æqualis quadruplo summæ laterum, puta 12 N. & est solutio irrationalis, quia 9. ad 12. non habet rationem quadrati ad quadratum. Quærendi ergo prius

ſunt duo cubi, quorum ſumma ad quadruplum ſummæ laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur ſumma laterum quilibet vnitatum Numerus, puta 6. & ſit vnum 1 N. alterum 6 − 1 N. erit ſumma cuborum 216 + 18 Q. − 108 N. quæ ad quadruplum ſummæ laterum, nimirum ad 24. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altera ſumma per alteram diuiſa, fiet 9 + ¼ Q. − ½ N. æqualis quadrato, & omnia ducendo in 4. fiet 36 + 3 Q. − 18. N. æquandus quadrato. Et per artificium ad præcedentem explicatum inuenies fingendum latus 6 − tot numeris qui ſuperent 2. fingatur 6 − 5 N. fiet 1 N. 4/11. Sunt ergo cuborum latera 1/11 & 5/11. & ſumendo minimos in eadem ratione, fient cuborum latera 7 & 15. Redeo igitur ad propoſitam initio quæſtionem, & pono quæſitorum latera cuborum 7 N. & 15 N. fit ſumma cuborum 3718 C. laterum 22 N. cuius quadruplum 88. N. æquatur 3718 C. & fit 1 N. 1/11. Sunt ergo latera cuborum 7/11 & 15/11. & ſatisfaciunt propoſito.

Deinde ſit data ratio tripla, cuius denominator 3. eſt triens quadrati 9. erunt vt prius quærendi duo cubi, quorum ſumma ad triplum ſummæ laterum ſit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur latus vnius vt ſupra 1 N. alterius 6 − 1 N. igitur ſumma cuborum 18 Q. + 216 − 108. N. ad triplum ſummæ laterum 18. debet habere rationem quadrati ad quadratum, vnde altera ſumma per alteram diuiſa fit 1 Q + 12 − 6 N. æqualis quadrato cuius latus fingendum eſt 1 N. − tot vnitatibus, vt ſuperet 3 ½ latus ipſius 12. ita tamen vt valor Numeri ſit minor quàm 6. Quare cùm per artificium ad præcedentem explicatum conſtet vnitates ponendas in latere fictitio debere eſſe minores quàm 4/11. Patet fingendum latus 1 N. tot vnitatibus, vt cadant inter 3 ½ & 9. ½. Fingatur 1 N. − 6. fiet quadratus 1 Q. + 36 − 12 N. æqualis 1 Q. + 12 − 6 N. & fit 1 N. 4. Sunt ergo latera cuborum 4. & 2. vel in minimis 2. & 1. Venio itaque ad initio propoſitam quæſtionem. Et pono latera cuborum 1 N. & 2 N. fiuntque 9 C. æquales 9 N. vnde fit 1 N. 1. & patet cubos 1. & 8. ſoluere quæſtionem. Quod ſi quadrati 1 Q + 12. − 6 N. fingas latus 1 N. − 8. fiet 1 N. 5/7 & latera cuborum quorum ſumma ad triplum ſummæ laterum habet rationem quadrati ad quadratum, erunt in minimis 2 & 13. Quibus vtendo pones quæſitorum cuborum latera 2 N. & 13 N. vnde fient tandem 2205 C. æquales 45 N. & fiet 1 N. 1/49 erunt ergo latera cuborum 1/49 & 13/49 quæ ſoluent quæſtionem.

QVÆSTIO XII.

INVENIRE duos cubos quorum interuallum æquale ſit interuallo laterum ipſorum. Sunto latera 2 N. & 3. N. & erit interuallum cuborum 19 C. Interuallum autem laterum 1 N. Igitur 1 N. æquatur 19 C. Et non eſt numerus rationalis, quia ſpecies ad ſpeciem non habet rationem quæ eſt quadrati ad quadratum. Eò itaque ſum redactus, vt inueniam duos cubos, vt ipſorum interuallum ad interuallum laterum rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Sunto latera cuborum 1 N. & 1 N. + 1. vt & ipſorum interuallum ſit quadratus, nimirum 1. & quoniam vnum latus eſt 1 N. alterum 1 N. + 1. erit quidem laterum internallum 1. cuborum vero 3 Q. + 3 N. + 1. Volumus ergo 3 Q. + 3 N. + 1. ad vnitatem, interuallum ſcilicet laterum, rationem habere quam habet quadratus ad quadratum. Igitur productum eorum multiplicatione oportet eſſe quadratum. Eſt autem hoc productum 3 Q. + 3 N. + 1. Hoc æquatur quadrato à latere 1 − 2 N. & fit 1 N. 7. Ad poſitiones. Sunt cubi 343. & 512. quorum latera 7. &

ΕΤΡΕΙΝ δύο κύβους ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχῇ. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ αὐτῶν. ἡ μὲν ις̄ β ἡ δὲ ις̄ γ. ἡ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ τῶν ἀπ' αὐτῶν κύβων κ̄ῑϛ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν ς̄ ᾱ. ς̄ ἐφ' ἑαυτὸν ᾱ. ἴσος κύβος ιθ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ἀ ῥητὸς παρὰ μὴ ἔχειν τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἀπῆκται δὴ μοι εἰς τὸ δύρειν β κύβους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστωσαν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων, ἡ μὲν ς̄ ᾱ. ἡ δὲ ς̄ ᾱ μ̄ᵒ ᾱ. ἵνα καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ᾖ τετράγωνος τουτέστι μ̄ᵒ ᾱ. καὶ ἐστὶ δεῖ τὰς μὲν πλευρὰς ς̄ ᾱ. τὰς δὲ ς̄ ᾱ μ̄ᵒ ᾱ. ἴσας εἶναι ἡ ὑπεροχὴ τῶν πλευρῶν μ̄ᵒ ᾱ. τῶν δὲ κύβων δ̄ᵒ γ̄. ς̄ᵒ γ̄. μ̄ᵒ ᾱ. Σύνταξον δὴ δ̄ᵒ γ̄. ς̄ᵒ γ̄. μ̄ᵒ ᾱ. πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν πλευρῶν λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τὸν ἄρα ὑπ' αὐτῶν δεῖ εἶναι τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ ὑπ' αὐτῶν δ̄ᵒ γ̄ ς̄ᵒ γ̄ μ̄ᵒ ᾱ. παῦται ἴσα τετραγώνῳ παρ' ὅσο πλευρὰς μ̄ᵒ ᾱ λείπει ς̄ᵒ β̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ᵒ ζ̄. ὅπερ τοιοῦτόν ἐστιν. ἴσοι εἰσὶ κύβοι, ὃς μὲν τις̄. ὃς δὲ φιβ̄ ὧν αἱ πλευραὶ ἡ μὲν ζ̄. ἡ δὲ η̄. ἔρχομαι δὴ τὸ ὃς ἀρχῆς, καὶ τάσσω τοὺς

πλαγιας τ κύβων, ἵνα μὲν ᾱ ς ζ. ἵνα δὲ ᾱ ς η. καὶ ἡ μὲν τούτων ὑπεροχή ἐστιν ς ᾱ. ἡ δὲ τ ἀπ' αὐτῆς κύβων ὑπεροχὴ χ ρξϛ. κύβοι δὲ ρξϛ ἴσοι ς ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς ᾱ ιγ. ὅθεν πάλιν ὑποστάσεις. ἔσονται αἱ πλαγιαι τ κύβων ἡ μὲν ζ ιγ. ἡ δὲ η ιγ.

8. Venio ad id quod initio propositũ erat, & pono latera cuborum 7 N. & 8 N. & est horum interuallum 1 N. At interuallum cuborum ab ipsis ortorum est 169 C. igitur 169. C. æquantur 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Ad positiones. Erunt latera cuborum $\frac{7}{13}$ & $\frac{8}{13}$.

OBSERVATIO D. P. F.

VTrum verò inuenire liceat duo quadratoquadrata quorum interuallum æquale sit interuallo laterum ipsorum, de hoc inquiratur & tentetur artificium nostræ methodi, quod haud dubiè succedet.

Quærantur enim duo quadratoquadrata ita vt differentia laterum sit 1. & differentia quadratoquadratorum sit cubus. Erunt latera per primam operationem $-\frac{2}{11}$ & $\frac{11}{11}$. Sed quia primus numerus notatur signo — iteretur operatio iuxta nostram methodum & ponatur primum latus 1 N $-\frac{2}{11}$ secundum erit 1 N $+\frac{11}{11}$ & incidetur in nouam æquationem quæ in veris numeris quæstioni satisfaciet.

IN QVAESTIONEM XII.

LEMMA Diophanti est idem penitus cum quarta quæstione earum, quas ad nonam huius attulimus, quamuis vniuersalius operati simus ibi, quàm hìc faciat Diophantus, vult enim interuallum cuborum poni quadratum, cùm nos interuallum cuborum poni posse quemlibet numerum docuerimus. Itaque vide quæ ibi adnotauimus. Cæterùm, sicut ad præcedentem factum est, proponetur etiam hæc quæstio vniuersalius, nimirum sic.

Inuenire duos cubos, quorum interuallum ad interuallum laterum datam habeat rationem, dummodo denominator rationis sit quadratus vel triens quadrati.

OBSERVATIO D. P. F.

DEterminatio est illegitima, quia non generalis, addendum igitur, vel multiplus per numeros primos qui superant vnitate ternarij multiplices, aut ab ipsis compositos vt 7. 13. 19. 37. &c. vel 21. 91. &c. demonstratio & constructio ex nostra methodo petenda.

Primùm sit data ratio quadrupla, cuius denominator 4. quadratus est. Hìc etiam eò redigimur, vt inueniamus duos cubos, quorum interuallum ad quadruplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N + 2. Erit cuborum interuallum 8. + 12 N. + 6 Q. laterum 2. cuius quadruplum 8. ad cuborum interuallum debet habere rationem quadrati ad quadratum. Proinde illo per hunc diuiso fiet 1 + $\frac{3}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$ Q. æquandus quadrato, & omnia per 4. multiplicando, fit 4 + 6 N. + 3 Q. æquandus quadrato. Esto latus eius 2 − 3 N. fiet 1 N. 3. Sunt ergo cuborum latera 3. & 5. Venio ad propositam quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 3 N. & 5 N. fit cuborum interuallum 98 C. æquale quadruplo interualli laterum 8 N. vnde fit 1 N. $\frac{4}{7}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{4}{7}$ & $\frac{5}{7}$. quæ soluunt quæstionem.

Deinde sit data ratio tripla, cuius denominator 3. est triens quadrati 9. Sunt vt prius quærendi duo cubi, quorum interuallum ad triplum interualli laterum sit in ratione quadrati ad quadratum. Ponatur vnius latus 1 N. alterius 1 N. + 2. erit cuborum interuallum 6 Q. + 12 N. + 8. ad triplum interualli laterum, nimirum ad 6. in ratione quadrati ad quadratum, quare illo per hunc diuiso fiet 1 Q. + 2 N. + $\frac{4}{3}$ æquandus quadrato, & omnia per 9. multiplicando fiet 9 Q. + 18 N. + 12. æquandus quadrato, fingatur eius latus 3 N. − 4. fiet 1 N. $\frac{22}{17}$ Sunt ergo cuborum latera $\frac{7}{17}$ & $\frac{15}{17}$ seu in minimis 1. & 22. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & pono quæsitorum cuborum latera 1 N. 22 N. cuborum interuallum est 10647 C. quod æquatur triplo interualli laterum, puta 63 N. & fit N. $\frac{21}{113}$ sunt latera cuborum $\frac{1}{113}$ & $\frac{22}{113}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE duos numeros, vt maioris cubus adscito minore numero, sit æqualis cubo minoris adsciscenti maiorem numerum. Esto alter 2 N. alter 3 N. maioris cubus adscito minore numero fit 27 C. + 2 N. At minoris cubus adscito maiore numero facit 8 C. + 3 N. Igitur 8 C. + 1. N. æquantur 27 C. + 2 N. Omnia per numerum diuidantur, fiunt 19 Q. æquales 1 N. & non provenit 1 N. rationalis. At 19 Q. sunt interuallum duorum cuborum. Vnitas verò est laterum differentia. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo cubi, quorum interuallum ad interuallum laterum ipsorum sit in ratione quadrati ad quadratum. Hoc autem supra demonstratum est, & sunt cuborum latera 7. & 8. Venio ergo ad id quod primò quærebatur, & pono alterum 7 N. alterum 8 N. fiunt 343. C. + 8 N. æquales 512. C. + 7 N. & fit 1. N. $\frac{1}{19}$. Ad positiones. Erit alter $\frac{7}{19}$. alter $\frac{8}{19}$. & demonstratio euidens.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβῳ προσλαβόντι τὸν μείζονα ἀριθμόν. ἔστω ὁ μὲν ις̄ β̄. ὁ δὲ ις̄ γ̄. καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ μείζονος κύβος προσλαβὼν τὸν ἐλάσσονα ποιεῖ κ̄ο̄ κζ̄ ις̄ᵛ̄ ϛ̄. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος κύβος προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ κ̄ο̄ η̄ ἀριθμοὺς γ̄. κύβοι ἄρα η̄ ις̄ᵛ̄ γ̄ ἴσοι εἰσὶ κ̄ο̄ κζ̄. ις̄ᵛ̄ β̄. καὶ πάντα ἀφῃρήσθω ς̄. καὶ γίνονται ιθ̄ κ̄ο̄ ἴσοι μ̄ᵃ ᾱ. καὶ ὁ ς̄ οὐ ῥητός. ἀλλ' ἀὶ μὲν ιθ̄ κ̄ο̄ εἰσὶ δύο κύβων ὑπεροχή. ἡ δὲ μ̄ᵃ ᾱ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχή. ἁπλῶται ἄρ μοι εἰς τὸ δίρειν δύο κύβους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ὑπεροχὴν λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τοῦτο δὲ προεδείχθη. ἔστι καὶ πλευραὶ τῶν κύβων ἡ μὲν ζ̄. ἡ δὲ η̄. ἤρξαμαι ἂν ὅθεν τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ πάντων τῶν ις̄ η̄. ζ̄. ὧν δὲ ις̄ η̄. καὶ γίνεται κ̄ο̄ τμγ̄ ις̄ᵛ̄ η̄. ἴσοι κ̄ο̄ φιϐ̄ ις̄ᵛ̄ ζ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ᾱ ῑᵛ̄. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ἔσται ὁ μὲν ζ̄ ῑᵛ̄. ὁ δὲ η̄ ῑᵛ̄. καὶ ἡ ἀποδείξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XIII.

OPERATIO Diophanti nil habet difficultatis. Verùm moneo absque noua operatione posse solui quæstionem hanc auxilio præcedentis, nam numeri quicunque præcedenti satisfacientes, hanc quoque soluunt, quod sic demonstro.

A $\frac{125}{343}$. B $\frac{27}{343}$ C $\frac{1}{7}$. D $\frac{1}{7}$

Sint Numeri satisfacientes præcedenti, nimirum cubi A B. & eorum latera C D. ita vt cuborum A B interuallum sit æquale interuallo laterum C D. Dico per eosdem numeros huic quæstioni satisfieri, nimirum maiorem cubum A adsciscentem minus latus D, æquari minori cubo B. adsciscenti maius latus C. Etenim ob æqualitatem interuallorum est 4. 1. *perism.* in medietate Arithmetica A ad B. vt C ad D. ' Quare extremorum A D summa æqualis est summæ mediorum B C. Quod erat propositum.

Similiter per præcedentem soluetur adhuc huiusmodi quæstio.

Inuenire duos cubos, vt interuallum maioris cubi & maioris lateris, interuallo minoris cubi, & minoris lateris æquale sit.

Sint enim iidem qui suprà numeri satisfacientes præcedenti, dico interuallum maioris cubi A & maioris lateris C. æquale esse interuallo minoris cubi B. & minoris lateris D. Quia enim est in medietate Arithmetica A ad B vt C ad D. ' Erit & permutando A ad C vt B ad D. Quod demon- 7. 1. *perism.* strandum erat.

Non aliter per vndecimam huius soluetur quæstio sequens.

Inuenire duos cubos, vt maior eodem interuallo superet latus minoris, quo latus maioris superat minorem cubum.

A $\frac{125}{169}$. B $\frac{8}{13}$. C $\frac{343}{169}$. D $\frac{7}{13}$

Sit maior cubus A. & eius latus B. sitque minor cubus C. & eius latus D. sitque summa cuborum A C. æqualis summæ laterum B D. vt requirit vndecima. Dico eodem interuallo A superare D. quo B superat C. Quia enim extremorum A C summa summæ mediorum D B æqualis est, ' est in medietate Arithmetica A ad D vt B ad C. Quod erat ostendendum. 4. 1. *perism.*

QVAESTIO XIV.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν, καὶ συναμφότερος, καὶ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν μῦ μ^ο ᾱ. ποιῆ τετράγωνον. ἐαν ἀφέλω ἀπὸ τινὸς τετραγώνου ἀρίθμου μ^ο ᾱ. ἔχω ὁρισθέν. πλάσω πρὸ τετράγωνον ἀπὸ ὅσων δήποτε καὶ μ^ο ᾱ. καὶ ἔστω ἀπὸ ἀριθμοῦ γ̄ μ^ο ᾱ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ^ο ϟ ς̄ ε̄ μ^ο ᾱ. καὶ ἐαν ἀφέλω τὸν μ^ο ᾱ πάλιν ἃ πλάσω ἐ ὁρισθέν δ^ο θ̄ ς̄ ε̄. πάλιν ἐπεὶ δεῖ διελεῖν τὸν ὁρισθέντα καὶ τὸν δεύτερον μῦ μ^ο ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. * ἀλλὰ συναμφότερος ὁ ὁρισθεὶς καὶ ὁ δεύτερος μῦ μ^ο ᾱ καὶ δ^ο θ̄. ιμ ε̄ ε̄. * ὁ δὲ δεύτερος μῦ μ^ο ᾱ δεῖ τετράγωνος. ζητοῦμεν οὖν ζητῆσαι τὶς τετράγωνος μῦ δ^ο ϟ ς̄ ε̄. ποιεῖ τετράγωνον. ἐκτίθεμαι δύο ἀριθμοὺς ὧν τὸ ὑπὸ ἢ δυνάμεις θ̄ ς^ις ε̄. καὶ εἰσὶ ς^ις ϟ μ^ο ε̄ καὶ ς^ι ᾱ. ὧν ὑπεροχὴ ς^ις ἡ μ^ο ε̄. καὶ αὐτῆς τὸ ἥμισυ ς^ι δ μ^ο γ̄. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ γίνεται δυνάμεις ις̄ ἀριθμοὶ κδ̄ μ^ο θ̄. ἀφαιρῶ μ^ο ᾱ. καὶ πάλιν τὸν δεύτερον δ^ο ις̄ ς^ις κδ̄. μ^ο ἡ. ὅτι ἡ ἐ ὁ ὁρισθεὶς δ^ο θ̄ ς^ις ε̄. καὶ ἑκάτερος ἐ συναμφότερος μῦ μ^ο ᾱ ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ πάλιν ὑπεροχὴν αὐτῶν μῦ μ^ο ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. ἔστι ἄρα δ^ο ζ ς^ις ιβ̄ μονάδες θ̄ ἴσος τετραγώνῳ πρὸ ἀπὸ πλευρᾶς μονάδων γ̄ λείψει ἀριθμῷ γ καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιβ̄. δεῖ γὰρ ὑποστάσεις. ὁ μὲν ὁρισθεὶς γκδ̄. ὁ δὲ δεύτερος ιχκδ̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

INVENIRE duos numeros, vt alteruter, & amborum summa, sed & ipsorum interuallum addita vnitate quadratum faciat. Si vnitatem auferam ab aliquo quadrato, habebo primum. Formo quadratum aliquem à numeris quotlibet & vnitate, esto a 3 N. + 1. ipse erit 9 Q. + 6 N. + 1. & si inde auferam vnitatem, ponam primum 9 Q. + 6 N. Rursus quia volumus primum & secundum simul, addita vnitate facere quadratum; sed & secundum adscita vnitate esse quadratum, quærendum mihi obtigit quis quadratus coniunctus cum 9 Q. + 6 N. faciat quadratum. Expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 6 N. & sunt 9. N. + 6. & 1 N. horum interuallum 8 N. + 6. cuius semissis 4 N. + 3. quo in se ducto fit 16 Q. + 24 N. + 9. Hinc aufero vnitatem, & pono secundum 16 Q. + 24 N. + 8. Est autem primus 9 Q. + 6 N. & alteruter, & vterque simul addita vnitate facit quadratum. Superest vt & interuallum ipsorum adscita vnitate faciat quadratum. Igitur 7 Q. + 18 N. + 9. æquantur quadrato à latere 3 − 3 N. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit primus 3024. secundus 5624. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa asteriscis inclusa, ἀλλὰ συναμφότερος ὁ ὁρισθεὶς καὶ ὁ δεύτερος μῦ μ^ο ᾱ καὶ δ^ο θ̄ ιμ ε̄. subreptitia sunt, & omnino reiicienda. Vt contrà fuerunt adiicienda illa quæ virgulis inclusa vides. Sic emendato textu nulla est hic difficultas. Ad inueniendum quadratum qui additus ad 9 Q. + 6 N. faciat quadratum, non recurrit ad duplicatam æqualitatem Diophantus, vt malè arbitratur Xilander, non enim sunt hic duo numeri quadrato æquandi. Sed vtitur Canone vltimo vndecimæ secundi, cuius etiam vsus est in duplicata æqualitate ad reperiendum duos quadratos dato interuallo differentes. Diuersitas autem operationis, & solutionis à triplici capite oritur. Primò enim primus diuersimodè poni potest, nimirum quilibet quadratorum numerus quadratus + duplo lateri illius. Vt 9 Q. + 6 N. vel 4 Q + 4 N. vel 16 Q. + 8 N. &c. Secundò eodem manente primo, secundus variari potest in infinitum, quia verbi gratia in hypothesi Diophanti per vndecimam secundi, reperiri possunt infiniti quadrati diuersi, qui cum 9 Q. + 6 N. quadratum faciant, quorum singuli multati vnitate statui poterunt pro secundo. Denique in fingendo latere quadrati qui numerorum interuallo æquetur, mira contingere potest varietas. Nam verbi gratia in hypothesi Diophanti quadrati 7 Q. + 18 N. + 9. latus fingi potest à 3 − quolibet Numerorum numero, cuius quadratus superet 7.

Non est etiam dissimulandum quæstionem hanc ad quemlibet quadratum extendi, ac proinde vniuersalius proponi posse hoc pacto.

Quærantur duo numeri, quorum summa, ipsorum vterque, sed & interuallum

ipsorum addito dato quadrato, quadratum faciant.

Esto datus quadratus 4.

Si auferam 4. ab aliquo quadrato habebo primum. Formo quadratum à Numeris quotlibet + 2. latere dati quadrati. Esto à 3 N. + 2. ipsi erit 9 Q. + 12 N. + 4. hinc auferendo 4. statuo primum 9 Q. + 12 N. Iam vt habeam secundum, quæram quis quadratus adsumpto 9 Q. + 12 N. faciat quadratum. Expono duos numeros quorum mutuo ductu fiat 9 Q. + 12 N. hi sunt 9 N. + 12. & 1 N. horum interualli semissis est 4 N. + 6. cuius quadratus 16 Q. + 48 N. + 36. vnde si auferam 4. restabit pro secundo numero 16 Q. + 48 N. + 32. Primus autem est 9. Q. + 12 N. Et hi tribus postulati partibus satisfaciunt, nam & alteruter, & vtriusque summa adsumpto 4. quadratum facit. Restat vt & eorum interuallum adiecto 4. quadratum faciat, facit autem 7 Q. + 36 N. + 36 Hoc ergo æquatur quadrato, cuius latus fingo 6 − 3 N. & fit 1 N. 36. sunt igitur quæsiti numeri 12096. & 22496. qui soluunt quæstionem, nam vtrique sigillatim addendo 4. fiunt quadrati 12100, & 22500. quorum latera 110. & 150. At si summæ amborum, & interuallo eorundem addatur rursus 4. fiunt quadrati 34596. & 10404. quorum latera 186 & 102.

QVÆSTIO XV.

INVENIRE tres numeros quadratos, qui coniuncti æquales sint interuallis ipsorum coniunctis. Quoniam differentia maximi & medij, & differentia medij & minimi, & differentia maximi & minimi, simul iunctæ tribus numeris æquantur, at tres differentiæ sunt duplum differentiæ maximi & minimi. Ergo duplũ differentiæ maximi & minimi æquatur tribus numeris. Ponatur minimus quadratus 1. maximus 1 Q. + 2 N. + 1. iam duplum interualli maximi & minimi est 2 Q. + 4 N. Ergo tres quadrati simul sunt 2 Q. + 4 N. quorum duo cùm sint 1 Q. + 2 N. + 2. relinquitur vtique medius 1 Q. + 2 N. − 2 Oportet igitur hæc æquari quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit maximus $\frac{169}{4}$. medius $\frac{121}{4}$. minimus 1. & omnia per 25. erit maximus 196. medius 121. minimus 25.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς τετραγώνους τὶ συντιθέντες ἴσοι ἔσονται ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντεθείσαις. ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ μέσου, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἴση ἐστὶ τοῖς ξεισὶν, ἀλλ' αἱ τρεῖς ὑπεροχαὶ διπλῆ ἐστὶ μιᾶς τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχῆς, διπλῆ ἄρα ἡ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τοῖς τρισί. πεπάχθω ὁ ἐλάσσων τετράγωνος μ^{ος} ᾱ. ὁ δὲ μέγιστος δ^{ος} ᾱ ϛ̃ β̄ μ^{ος} ᾱ. καὶ διπλῆ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δ^{ος} β ϛ̃ δ̄. εἰσὶ ἄρα οἱ τρεῖς τετράγωνοι δ^{ος} β̄ ϛ̃ δ̄. ὧν οἱ δύο εἰσὶ δ^{ος} ᾱ ϛ̃ β̄ μ^{ος} β̄. λοιπὸς ἄρα ὁ μέσος ἔσται δ^{ος} ᾱ ϛ̃ β̄ ⌐ μ^{ος} β̄. διὰ ἄρα ταῦτα ἴσα ἔσῃ τετραγώνῳ. ἴσων τῶν ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̃ ᾱ ⌐ μ^{ος} δ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̃ μ^{ος} ϟ^{ος} ᾱ. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρ^{ος} ϛ̃ ᾱ, ὁ δὲ μέσος ρ^{ος} ϛ̃. ὁ δὲ ἐλάχιστος μ^{ος} ᾱ. καὶ πάντα κε̄. ἔσται ὁ μὲν μέγιστος ρ^{ος} ϛ̃. ὁ δὲ μέσος ρκᾱ. ὁ δὲ ἐλάχιστος κε̄.

IN QVAESTIONEM XV.

TEXTV restituto, vt nos fecimus, non magna est hic difficultas. Aduertendum tamen quod nec attigit Diophantus, nec vidit Xilander in fingendo latere quadrati 1 Q. + 2 N. − 2 aliquam adhibendam esse cautionem. Cùm enim tres inæquales numeri quærantur, oportet vtique medium maiorem esse minimo. At minimus positus est 1. medius 1 Q. + 2 N. − 2. Oportet igitur talem inueniri valorem Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 Q. + 2 N. − 2. fit plus quàm 1. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. + 2 N. excedere ternarium, & hoc etiam vt contingat, oportet valorem Numeri excedere vnitatem, vt manifestum est. Porrò fit valor Numeri à quodam quadrato binario aucto, & diuiso per duplum sui lateris binario auctum. Quare si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet valor Numeri $\frac{1+2}{2+2}$. Hoc ergo cum maius esse oporteat vnitate, erit & 1 Q. + 2. maior quàm 2 N. + 2. & tandem 1 Q. maior erit quàm 2. N. vnde constat vnitates in latere fictitio ponendas plures esse debere quàm 2. Ita Diophantus finxit huiusmodi latus 1 N. − 4. Poterat etiam poni 1 N. − 3. vel 1 N. − 5. &c. Sed si ponas 1 N. − 1. vel 1 N. − 2. incides vtique in aliquod absurdum.

Aduertendum præterea minimum quæsitorum, non solùm poni posse 1. sed & alium quemlibet quadratum, puta 8. 9. 25. &c. Sed tunc maximi latus ponetur certus Numerorum numerus +

latere eiusdem quadrati, qui pro minimo positus erit. Et tandem in fingendo latere quadrati qui pro medio statuetur, adhibenda erit eadem cautio, de qua supra est actum, erit enim necesse vt per valorem Numeri resoluendo hypostases, medius inueniatur maior minimo.

Denique communi denominatore abiecto, solos numeratores retinet Diophantus, quia hi æquè bene soluunt quæstionem. Cuius rei ratio est, quod in fractionibus eiusdem denominationis, tam summa quàm interuallum penes solos Numeratores consideratur, vnde ad hoc vt trium fractionum eiusdem denominationis summa æqualis sit ipsarum interuallis, necesse est prius Numeratorum summam, ipsorum interuallis æquari. Sed & vniuersaliter verissimum est. Quamcunque rationem trium Numerorum summa habeat ad ipsorum interualla, eandem habere, summam trium aliorum in eadem ratione sumptorum, ad ipsorum interualla, vt facile est demonstrare. Sed hoc tyronibus exercitationis gratia relinquatur.

QVÆSTIO XVI.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως; δύο ὁποιωνοῦν συντιθέντες καὶ ὅτι τὸν λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες; ποιῶσι τοὺς δοθέντας ἀριθμούς. ὑπιτάχθω δὴ συναμφότερος τὸν πρῶτον, καὶ τὸν δεύτερον ὅτι τὸν τρίτον πολλαπλασιαζόμενα ποιεῖ μ̄ λ̄ε̄. συναμφότερος δὲ τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ὅτι τὸν πρῶτον πολλαπλασιαζόμενα ποιεῖ μ̄ κ̄ζ̄. καὶ ἔτι συναμφότερος τὸν πρῶτον, καὶ ὁ τρίτον πολλαπλασιαζόμενα ὅτι τὸν δεύτερον ποιεῖ μ̄ λ̄β̄. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ α. λοιπὸν ἄρα ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος λ̄ε̄ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ἴσων ὁ πρῶτος ῑ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ὁ δεύτερος ἄρα ἴσαι κ̄ε̄ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. καὶ λοιπὸν ὅτι δύο ὑπιτάγματα τὸ συναμφότερον τὸν δεύτερον, καὶ τὸν τρίτον ὅτι ὁ πρῶτον ποιεῖ μ̄ κ̄ζ̄. τό τε συναμφότερον τὸν τρίτον, καὶ τὸν πρῶτον ὅτι τὸν δεύτερον ποιεῖ μ̄ λ̄β̄ ἀλλ' ὁ δεύτερος, καὶ ὁ τρίτος ὅτι τὸν πρῶτον ποιεῖ μ̄ ῑ. καὶ σν $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. μονάδις ἄρα ῑ μ̄ | σν $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$ ἴσαι μ̄ κ̄ζ̄. ὁ δὲ τρίτος καὶ ὁ πρῶτος ὅτι τὸν δεύτερον ποιεῖ μ̄ κ̄ε̄ καὶ σν $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. μονάδις ἄρα κε μ̄ σν $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ἴσαι μ̄ λ̄β̄. καὶ μ̄ καὶ σν $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ἴσαι μ̄ κ̄ζ̄. καὶ ὑπερέχουσιν αἱ μονάδες τὰς μονάδας μ̄ ε̄. ὡς εἰ καὶ αἱ μ̄ κ̄ε̄. καὶ σν $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ὑπερέχον μ̄ ε̄. ἴσων ἂν ἴση ἡ ὑπεροχὴ. ἀλλὰ μ̄ κ̄ε̄ ἐν τῷ δευτέρῳ εἰσὶν, αἱ δὲ μ̄ ῑ ἐν τῷ πρώτου εἰσί. θέλομεν οὖν ἡ ὑπεροχὴ αὐτῷ ᾖ μ̄ ε̄. αὐτοὶ δὴ ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ συναμφότερος μ̄ λ̄ε̄. γίγνου οὖν μοι τὸ λ̄ε̄ διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, ἵνα ὁ ἕτερος τῷ ἑτέρῳ ὑπερέχῃ μ̄ ε̄. καὶ ὅτι ὁ μὲν ῑ. ὁ δὲ κ̄. τάσσω δὴ μὲν πρῶτον ῑ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. τὸν δὲ δεύτερον κ̄ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. καὶ συναμφότερος ὁ δεύτερος καὶ ὁ τρίτος ὅτι ὁ πρῶτον ποιεῖ μ̄ ῑ καὶ τ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ἴσας μ̄ κ̄ζ̄. συναμφότερος ἡ ὁ πρῶτος καὶ ὁ ἕτερος ἐπὶ δεύτερον ποιεῖ μ̄ κ̄ καὶ τ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ἴσας μ̄ λ̄β̄. καὶ ἐπὶ μ̄ ις καὶ τ $^{\bar{\upsilon}\,\bar{\alpha}}$. ἰσώσω μ̄ κ̄ζ̄. γίνονται ὁ ἀριθμὸς μ̄ ῑ. ὅτι τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄ γ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ δ̄. ὁ δὲ τρίτος μ̄ ῑ.

INVENIRE tres numeros, quorum bini quilibet coniuncti, & in reliquum ducti, faciant datos numeros. Imperetur vt summa primi & secundi in tertium ducta faciat 35. summa secundi & tertij in primum ducta faciat 27. At summa primi & tertij in secundum faciat 32. Ponatur tertius 1 N. Ergo primus & secundus simul erunt $\frac{1}{1}$. Esto primus $\frac{1}{1}$. secundus igitur erit $\frac{1}{1}$. duo adhuc postulata restant implenda, nimirum vt secundus & tertius simul in primum ducti faciant 27. & vt tertius & primus simul in secundum faciant 32. sed secundus & tertius in primum faciunt 10 + $\frac{1}{1}$. Proinde 10 + $\frac{1}{1}$. æquantur 27. At tertius & primus in secundum faciunt 25. + $\frac{1}{1}$. Proinde 25 + $\frac{1}{1}$. æquantur 32. sed vt ostensum est, etiam 10 + $\frac{1}{1}$. æquantur 27. & excessus vnitatum super vnitates est 5. vt si etiam 25. + $\frac{1}{1}$. vltra 10 + $\frac{1}{1}$. habuissent 5. æqualia vtique fuissent interualla. Sed 25. vnitates à secundo sunt, & vnitate 10. à primo. Volumus ergo harum interuallum esse 5. Ipsi autem primus & secundus non sunt quiuis, sed coniuncti faciunt 35. vsu venit ergo mihi vt 35. diuidam in duos numeros, quorum differentia sit 5. & est alter 15. alter 20. Pono ergo primum $\frac{1}{15}$. secundum $\frac{1}{20}$. & summa secundi & tertij in primum ducta facit 15 + $\frac{1}{1}$. æqualia 27. At summa primi & tertij in secundum facit 20 + $\frac{1}{1}$. æqualia 32. & si 15 + $\frac{1}{1}$ æquem 27. fit 1 N. 5. Ad positiones, erit primus 3. secundus 4. tertius 5.

IN QVAESTIONEM XVI.

TEXTVS alio morbo non laborat, nisi quod fractiones Numericæ & Quadraticæ ambiguè exprimuntur, vt iam semel atque iterum monuimus passim in hoc codice contingere. Sed ex nostra versione omnis tollitur ambiguitas. Operatio artificiosa est, quam etsi totam ita tradat Xilander, veram tamen eius causam, & æquationis resoluendæ rationem non intellexit, ait enim abiici debere vtrimque 300. & comparandos inuicem antecedentes 15. & 20. itemque consequentes 27. & 32. quorum idem interuallum 5. valor Numeri. In quo turpiter errat, si existimat id circo 5. esse valorem Numeri. Quod fiet manifestum si statuas secundum vel tertium 1 N. quod fieri posse docebimus infrà. Tunc enim simili prorsus logismo inuenies valorem Numeri longè diuersum ab interuallo similium antecedentium & consequentium. Itaque resoluitur æquatio via ordinaria. Comparando verò gratia 15 Q. + 300. cum 27 Q. auferendo scilicet vtrimque 15 Q. vnde tandem 12 Q. manent æquales 300. & fit 1 Q. 25. ac proinde 1 N. 5. similiter æquando 20 Q. + 300. & 32 Q. auferendo scilicet vtrimque 20 Q manent vt prius 12 Q. æquales 300. vnde fit rursus idem valor Numeri 5. Cum autem vtraque æqualitas necessariò inferatur, necesse est vtique eundem vtrobique reperiri valorem Numeri, in quo totum artificium Diophanti consistit. Si enim auferendo 15 Q. à 27 Q. idem superfit quod superest auferendo 20 Q. à 32 Q. sumus in vado, nam illud residuum vtrobique æquabitur eidem numero 300. Id autem continget si inter 15. & 20. idem sit interuallum quod inter 27. & 32. Nam datis quatuor Numeris 15. 20. 27. 32. ita vt inter 15. & 20. primum & secundum idem sit interuallum, quod inter 27. & 32. tertium & quartum, erit & permutando idem interuallum, inter 15. & 27. primum & tertium, quod inter 20. & 32. secundum & quartum. Quod est intentum. Hinc patet vera & germana causa totius operationis Diophanti, & cur cogatur diuidere 35. in partes 15. & 20. eodem distantes interuallo, quo distant 27. & 32. 7. 1. potiſ.

Cæterùm, vt iam monui, tripliciter variari potest operatio, quia 1 N. pro quolibet trium quæsitorum numerorum statui potest, quod in tyronum gratiam non pigebit vno exemplo confirmare. Ponatur secundus 1 N. erunt igitur primus & tertius simul $\frac{35}{1}$ N. Iam vt inueniantur primus & tertius separati, & duplicata æqualitas ritè procedat, oportet diuidere $\frac{35}{1}$ N. in duas partes, seruantes idem interuallum quod est inter 35. & 27. nimirum 8. id fiet per primam primi. Erit ergo primus $\frac{31}{2}$ N. tertius $\frac{39}{2}$ N. Itaque ducendo primum & secundum simul in tertium fit 20 + $\frac{1209}{4}$ N. æqualis 35. Et rursus ducendo secundum & tertium simul in primum, fit 12 + $\frac{1209}{4}$ N. æqualis 27. & omnia ducendo in 1 Q. fit hinc quidem 20 Q. + 240. æqualis 35 Q. Inde verò 12 Q. + 240. æqualis 27 Q. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 Q. 16. ac proinde 1 N. 4. sunt igitur quæsiti numeri qui prius 3. 4. 5. Hinc error Xilandri manifestè deprehenditur. Nam si vt ipse argumentatur abiicias vtrimque 240. & comparando antecedentes 20. & 12. itemque consequentes 35. & 27. quorum interuallum idem 8. Inde colligas valorem Numeri esse 8. vides quantum aberres à veritate.

Porrò vt solutio sit rationalis, oportet, vt vno datorum numerorum diuiso in duas partes, quarum idem sit interuallum, quod est inter duos reliquos numeros, planus sub dictis partibus comprehensus habeat rationem quadrati ad quadratum, ad interuallum quo maior dictarum partium superat minorem ex duobus reliquis numeris, vel quo minor pars superatur à maiore duorum reliquorum numerorum.

QVÆSTIO XVII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, ita vt quadratus cujuslibet ipsorum adscito sequente numero faciat quadratum. Ponatur medius, Numerorum quotlibet, ac sit 4 N. & quia volo quadratum primi adscito secundo facere quadratum, eò res redit vt inueniam quis quadratus adiectis 4 N. faciat quadratum. Quæro duos numeros quorum mutuo, ductu fiat 4 N. hi sunt qui eum metiuntur, nimirum 2 N. & 2. & si interualli horum semissem statuo pro primo, erit is 1 N — 1. Iam ergo hoc confectum est vt primi quadratus cum secundo numero fa-

ΕΤΡΕΙΝ ξεὶς ἀριθμὺς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος προσλαβὼν τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ μέσος ς̄ ὅσων ἀριθμῶν, ἔστω ς̄ δ̄. βούλομαι δὲ τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται εἰς τὸ δύνασθαι τὸν τετράγωνον προσλαβὼν ς̄ δ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ζητοῦσιν ἀριθμοὺς δύο ὧν τὸ ὑπὸ ὅλοι ς̄ δ̄. μετὰ ἕνων ς̄ β̄ χ̄ μ̄ β̄. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑποθέσεως αὐτῶν τὸ ἥμισυς τάττω τὸν πρῶτον. ἔστω ς̄ ᾱ λείψει μ̄ ᾱ. βούλομαι δὲ τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν ὅλος τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετράγωνος. τουτέστι δ̄ ῑ̄

μῆ τὸ τρίτου ποιῆν τετράγωνον. ἐαν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τας δ̄ ις̄ ἕξω τὸν τρίτον. τάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ τῆς πλευρας τῆ δ̄ ις̄. τουτέστι ϛ̄ δ̄ μ̄ ᾱ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ̄ ις̄ ἀριθμῶν ν̄ μ̄ ᾱ. ἐαν ἀφέλω τας δ̄ ις̄. λοιπὸς ἄρα ἐσται ὁ τρίτος ϛ̄ ν̄ μ̄ ᾱ. πάλιν ἐπὶ θέλω τὰς ξεῖς ἴσους εἶν τετραγώνῳ. εἰσὶ δὲ αἱ ξεῖς ϛ̄ ιη̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τετράγωνον δ̄ ρξθ̄. ϰ̓ γίνεται ὁ ϛ̄ δ̄ ιη̄. ἐπὶ τας ὑποτάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος δ̄ ιη̄ λείψει μ̄ ᾱ. ὁ δεύτερος δ̄ ιβ̄. ὁ τρίτος δ̄ ρδ̄ μ̄ ᾱ. ϰ̓ λήψεται μεν ἐν τῇ διορισμῷ τρία τὰ δοθέντα μόνα. λοιπὸν δεῖ ἕ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον, τουτέστι δ̄ δ̄ ᾱ, αις̄. δ̄ σν̄ μ̄ α. μῆ τὸ πρώτου, τουτέστι δ̄ ιη̄ ⌈ μ̄ ᾱ. ποιεῖ τετράγωνον. ποιεῖ δὲ δ̄ δ̄ ᾱ, αις̄ δ̄ σκᾱ. ἴσα τετραγώνῳ παντὶ ὧν ἀπὸ δυνάμεις. γίνεται ἄρα δ̄ α̣, αις̄ μ̄ σκα ἴσα τετραγώνῳ τῆ ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̄ ρδ̄ μ̄ ᾱ. ϰ̓ γίνεται ὁ ϛ̄ ιδ̄ ιε̄. δεῖ τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ̄. γ, ϛχτα ᶜψ̄ ὁ δὲ δεύτερος ιδ̄, ζτ̄ ᶜψ̄ ὁ δὲ τρίτος μ̄ λᾱ, ζτδ̄ ᶜψ̄.

ciat quadratum. Restat vt secundi quadratus, hoc est 16 Q. adscito tertio faciat quadratum. Si ergo ab aliquo quadrato auferam 16 Q. habebo tertium. Formo quadratum a latere ipsius 16 Q. nempe abs 4 N. + 1. is erit 16 Q. + 8. N. + 1. hinc ablatis 16 Q. reliquus est tertius 8 N + 1. Rursus quia volo trium summam æquari quadrato, est autem trium summa 13 N. hoc æquabitur quadrato, esto itaque quadratis numero quadrato, puta 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones erit primus 13 Q. — 1. secundus 52 Q. tertius 104 Q. + 1. Ita indefinitè impleta sunt tria postulata. Restat vt quadratus tertij, nimirum 10816 QQ. + 208 Q. + 1. adscito primo numero, hoc est 13 Q. — 1. faciat quadratum. Facit autem 10816 QQ. + 221 Q. hoc ergo æquatur quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fit 10816 Q. + 221. æquale quadrato a latere 104 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{11}{13}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{144}{169}$. secundus $\frac{1573}{169}$. tertius $\frac{1573}{1764}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Elegantius fortassè ita soluetur hæc quæstio, ponatur primus numerus 1. N. secundus 2 N + 1 vt cum quadrato primi conficiat quadratum, ponatur tertius quilibet vnitatum & numerorum numerus, eâ conditione vt additus quadrato secundi conficiat quadratum, V. G. sit 4. N. + 3. ita igitur duabus propositi partibus fit satis, superest vt summa trium, sed & quadratus tertij vnà cum primo conficiat quadratum, summa trium est 4 + 7 N. summa verò quadrati tertij & primi est. 9 + 25 N + 16 Q. oriturque duplicata æqualitas cuius solutio in promptu si vnitates quadratas ad eundem numerum quadratum in vtrouis numero quadrato adæquando renoces.

Eademque viâ facillimè extendetur quæstio ad 4. numeros & infinitos cauendum enim solummodo erit vt summa vnitatum quæ in singulis numeris ponuntur conficiat quadratum quod quidem facillimum est.

IN QVAESTIONEM XVII.

ARTIFICIOSISSIMÈ Diophantus per duas operationes propositum absoluit problema. Hîc itaque multa sunt obseruanda, quæ vel non vidit Xilander, vel parum feliciter adnotauit.

Primo enim medius quæsitorum numerorum poni poterat non solum 4 N. sed & alius quilibet Numerorum Numerus, vt non obscurè indicat Diophantus.

Secundò sumi possunt etiam diuersi numeri, quorum mutuo ductu fiant 4 N. & sic primi Numeri positio variari, cùm inueniri possint infiniti quadrati qui adsumptis 4 N. quadratum faciant. Sed hîc aliqua cautio adhibenda est. Curandum enim vt ex duobus huiusmodi Numeris, quorum mutuo ductu fient 4 N. ille qui constat ex solis vnitatibus absolutis habeat pro semisse quadratum numerum. Sic Diophantus selegit 2 N. & 2. vbi vides semissem ipsius 2. esse 1 quadratum numerum. Sic etiam sumi possent $\frac{1}{2}$ N. & 8. quia semissis ipsius 8. est quadratus 4. & sic alij infiniti cum eadem cautione deligi possunt. Huius verò rei causa subtili indiget indagatione. Equidem certum est semis-

sem huiusmodi vnitatum absolutarum semper reperiri in hypostasi primi numeri cum signo vt — in hypothesi Diophanti ponitur primus Numerus 1 N. — 1. Etsi sumpsisses ½ & 8. ad conficiendum 4 N. mutuo ductu, statueretur primus Numerus ½ N. — 4. hoc autem accidit, quia primus Numerus habetur sumendo semissem intervalli duorum numerorum quorum mutuo ductu fiunt 4 N. Cæterum vnitates quæ ponuntur in primo Numero cum signo defectus debere conflare quadratum ex eo colligitur, quod hæ debent æquari illis quæ ponuntur in tertio numero cum signo +. vt sic vnitatibus se mutuo elidentibus cum tres numeri simul adduntur, eorum summa constet ex solis Numeris, vt in Diophanto fit huiusmodi summa 13 N. Atqui vnitates quæ ponuntur in tertio numero semper quadratas esse manifestum est. Etenim tertius Numerus est pars cuiusdam quadrati, cujus latus constat ex Numeris qui ponuntur pro secundo + quotlibet vnitatibus, sic Diophantus posito secundo 4 N. vt inueniat tertium, fingit quadratum à latere 4 N + 1. qui est 16 Q. + 8 N. + 1. vnde ablatis 16 Q. statuit tertium 8 N. + 1. Quare manifestum est vnitates tertij Numeri semper esse quadratum vnitatum in latere dicti quadrati positarum. Vt ergo illis æquentur vnitates primi numeri, illas oportet conficere quadratum eundem.

Tertio in prima operatione Diophantus æquare potuit 13 N. cuilibet numero quadratorum quadrato, puta 16 Q. 25 Q. 36 Q. &c. Sumpsit author 169. Q. ad vitandas fractiones. Voluit autem in hac operatione valorem Numeri exhiberi in Quadratis, quia per eam non inquiritur vltimus valor Numeri per quem proposita quæstio soluatur, sed tantum id agitur vt per eam hypostases trium quæsitorum numerorum ita constituantur, vt per eas tribus propositi partibus indefinitè satisfiat, vt differtis verbis indicat Diophantus. Rectè itaque concludit si 13 N. æquentur 169. Q. sequi 1 N. æquari 13 Q. Quod ex sola proportionum regula perspicuum est. Deinde ad hanc Numeri æstimationem reducendo ante factas positiones, infert primum qui erat 1 N. — 1. fore iam 13 Q — 1. secundum qui erat 4 N. fore iam 52 Q. Ac demum tertium qui erat 8 N. + 1. fore iam 104 Q. + 1. Quare patet allucinari Xilandrum cum putat 13 N. æquari 169 QQ. qua æquatione quid ad rem conducens consequi possit non video. Siue enim per regulam trium colligat 1 N. æquari 169 QQ. siue depressis characteribus 13. æquari 169 QC. vnde fit solutio irrationalis, in manifestum absurdum eum incidere necesse est. Adde in Græco rectè reperiri ad 109. adiectam notam Q. non autem QQ. vt verè dici possit corruptum hoc loco Diophantum à Xilandro.

Quartò in vltima æquatione vbi fingitur latus numeri 10816 Q. + 221. qui fit addendo primum numerum ad quadratum tertij, magna etiam cautio est adhibenda. Quia enim primus positus est 13. Q. — 1 oportet talem inueniri valorem Numeri, vt 13 Q. excedant vnitatem. Hoc autem vt fiat, oportet 1 Q. maiorem esse quàm $\frac{1}{13}$. quare cum latus vero maius ipsius $\frac{1}{13}$ sit $\frac{1}{13}$. Oportet valorem Numeri excedere $\frac{1}{13}$. Porro fit valor Numeri auferendo quadratum aliquem à 221. & residuum diuidendo per latus eiusdem quadrati ductum in 208. Quare posito illo quadrato 1 Q. fit valor Numeri $\frac{221 - 1 Q.}{208 - 26 N.}$ qui debet excedere $\frac{1}{13}$. quare 221 — 1 Q. debet excedere $\frac{208 - 26 N.}{13}$ N. & tandem 1 Q debet esse maior quàm $\frac{2 N.}{13} + 221$. Qua æquatione per approximationem resoluta fit 1 N. $\frac{1}{13}$. Quamobrem manifestum est fingendum latus quadrati 104 N. + tot vnitatibus quæ non excedant $\frac{1}{13}$. Vnde si ponas latus illud 104 N. + 4 incides in absurdum, nam fiet 1 N. $\frac{15}{13}$ per quem resoluendo hypostases, primus numerus inuenitur minor nihilo, & sic de aliis.

Denique ne nos ignauiæ arguat Xilander, examen quæstionis subiicere libet. Summa trium numerorum est $\frac{1 Q. + 221 - 26 N.}{13}$ quadratus à latere $\frac{1 N. - 13}{13}$. Quadratus autem primi nempe $\frac{1 Q. + 221 - 26 N.}{13}$ adscito secundo quadratum facit $\frac{14 Q. + 221 - 78 N.}{13}$ à latere $\frac{4 N. - 13}{13}$. Quadratus porrò secundi, nempe $\frac{16 Q. + 221 - 104 N.}{13}$ adscito tertio quadratum facit $\frac{29 Q. + 221 - 182 N.}{13}$ à latere $\frac{8 N. - 13}{13}$. Denique quadratus tertij, nempe $\frac{13 Q. + 221 - 208 N.}{13}$ adsumpto primo quadratum conficit $\frac{42 Q. + 442 - 286 N.}{13}$ à latere $\frac{13 N. - 26}{13}$.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE tres numeros æquales quadrato, vt cuiusuis ipsorum quadratus dempto qui eum ordine sequitur, faciat quadratum. Ponatur rursus medius 4. N. & quia volo primi quadratum dempto secundo facere quadratum, oportet inuenire quadratum, qui demptis 4 N. faciat quadratum. Quæro primùm duos numeros, quorum mutuo ductu fiant 4 N. hi sunt qui eum metiuntur 2 N. & 2. Nunc ergo summæ illorum semissem capiens,

ΕΤΡΕΙΝ ξεὶς ἀριθμὰς ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος τὸν ἑξῆς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ μέσος ἀριθμὸς δ. καὶ ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, λείψει τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἀπῆκται ὡσὶ εἰς τὸ διρεῖν τὶς τετράγωνος λείψας ςς^{ος} δ ποιεῖ τετράγωνον, καὶ ζητῶ πρότερον ἀριθμὸς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ ὄζι ςς^{ις} δ. μετρᾶ δὲ ἀριθμὸς β μ^{ις} β· νῦν τῆς συνθέσεως αὐτῶν λαβὼν τὸ ἥμισυ, τάσσω τὸν πρῶτον ἀριθμὸν α μ^{ις} α. καὶ λείπεται

μοι ὁ τῷ ὑπαχθέντων. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἀπὸ τῆ δευτέρα τετράγωνον, τουτέστι δυνάμεις ις̄ λειψάντα τ̀ τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἐαν ἀφ᾽ ἁ ἀπὸ τῆ δυνάμεων ις̄ ἀφέλω τινα τετράγωνον, ἕξω μοι τὸν τρίτον. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ἀριθμοῦ δ̄ λείψει μονάδος ᾱ. γίνονται δυνάμεις ις̄ μ̄ ᾱ λείψει ἀριθμοῖς η̄. ταῦτα ἀφαιρῶ ἀπὸ δ̄ ις̄. λοιπὸς ὅζι ὁ τρίτος ςς̄ η̄ λείψει μ̄ ᾱ. καὶ λέλυται ἑτέρου ὑπαγμα. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὰς ξεῖς, τουτέστι ἀριθμὰς ιβ̄ ἵνους ἐφ᾽ ἑαυτῶν. ἔσω δ̄ ρξ̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δυνάμεις ιβ̄. δεῖ τὰς ὑπερβάσης. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος δ̄ ιβ̄ μ̄ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος δυνάμεις νβ̄. ὁ δὲ τρίτος δῑ ρδ̄ λείψει μ̄ α. καὶ πάλιν λέλυται μοι ἐν τῷ ἀορίστῳ τρία τῶν ὑπαχθέντων. λειπὲν ὅζι καὶ τὸν ἀπὸ τῆ τρίτου τετράγωνον ϒ τὸν πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ἀπὸ τῆ τρίτου τετράγωνος λήψας τὸν πρῶτον ποιεῖ δῑ δ̄ α, ὡς ϒ δ̄ σκᾱ. ἵνας τετραγώνῳ, καὶ πάντα ἁπλᾶ δύναμιν, γίνονται δ̄ α, ὡς ϒ μ̄ σκᾱ ἵνα τετραγώνῳ παρ᾽ ἀπὸ πλευρᾶς ςς̄ ρδ̄ ϒ μ̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μᾱ ιδ̄. δεῖ τὰς ὑπερβάσης. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ιζ̄. μ̄ ωπϛ̄ ᵉ, ωᵉ. ὁ δὲ δεύτερος ξδ̄. μ̄ χιϛβ ᵉ, ωᵉ. ὁ δὲ τρίτος ρκζ̄. φξη ᵉ ωᵉ.

pono primum 1 N. + 1. sic vni postulatorum satisfit. Rursus quoniam volo secundi quadratum, hoc est 16 Q. dempto tertio facere quadratum, si abs 16. Q. auferamus aliquem quadratum, habebimus tertium. Formo quadratum à 4 N. — 1. fit 16 Q. + 1 — 8 N. hunc aufero de 16. Q. relinquitur tertius 8 N. — 1. & alteri postulato satisfactum est. Rursus quia volo trium summam, hoc est 13 N. æquari, quadrato esto 169 Q. & fit 1 N. 13 Q. Ad positiones. Erit primus quidem 13 Q. + 1. secundus 52 Q. tertius autem 104 Q. — 1. & rursus indefinitè tribus postulatis est satisfactum. Superest vt & tertij quadratus dempto primo faciat quadratum. Sed tertij quadratus dempto primo facit 10816 QQ. — 221 Q. æquale quadrato. Omnia per quadratum diuidantur, fiunt 10816 Q. — 221. æqualia quadrato à latere 104 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{}{}$. Erit primus $\frac{}{}$ secundus $\frac{}{}$ tertius $\frac{}{}$.

OBSERVATIO D. P. F.

EOdem quo in superiori quæstione vsi sumus ratiocinio hanc quoque soluemus & ad quotlibet numeros extendemus.

IN QVAESTIONEM XVIII.

OMNIA quæ ad præcedentem dicta sunt, hîc etiam locum habent, vt non opus sit ea repetere. Eodem errore lapsus est Xilander, cùm notam QQ. temerè inserit loco notæ Q. sed & falsos exhibet numeros solutionis, vt videre est ex comparatione verorum quos in Diophanti contextu reposuimus. Examen quæstionis tale est. Summa trium numerorum fit $\frac{}{}$ quadratus à latere $\frac{}{}$. A quadrato primi qui est $\frac{}{}$ si auferas secundum, supereſt quadratus $\frac{}{}$ à latere $\frac{}{}$. A quadrato secundi qui est $\frac{}{}$ si auferas tertium, supereſt quadratus $\frac{}{}$ à latere $\frac{}{}$. Denique à quadrato tertij qui est $\frac{}{}$ si auferas primum, supereſt quadratus $\frac{}{}$ à latere $\frac{}{}$. Hîc etiam vides in Græco ita exprimi solutionis numeros, vt Myriades à reliquis vnitatibus distinguantur, quod familiare esse Diophanto iam monuimus ad vigesimam secundam tertij.

QVÆSTIO XIX.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμὸς ὅπως ὁ ἀπὸ τ̀ πρώτου κύβος συναμφοτέρων τ̀ δευτέρου ποιῇ κύβον, ὁ δὲ ἀπὸ τῆ δευτέρα τετράγωνος συναμφοτέρων τ̀ πρῶτος ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσαι μονάδος κυβικαὶ η̄ λείψει κ̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀπὸ τῆ πρώτου κύβος συναμφοτέρων τ̀ δευτέρου,

INVENIRE duos numeros, vt primi cubus adscito secundo faciat cubum, at secundi quadratus adscito primo faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. secundus ergo erit 8 — 1 C. & cubus prioris adsumens secundum fit cubus. Restat vt & quadratus secundi adsumpto primo fa-

ciat quadratum, sed secundi quadratus adsumpto primo facit 1 CC. + 1 N. + 64 − 16 C. hæc æquantur quadrato à latere 1 C. + 8. hoc est 1 CC. + 16 C. + 64. & additis vtrimque communibus defectibus, & auferendo similia à similibus relinquuntur 32 C. æquales 1 N. & omnibus per numerum diuisis 32 Q. æquantur 1. & est 1. quadratus. Quare si 32 Q. esset quadratus, explicari posset æquatio. Sed 32. Q. proueniunt ex duplo 16. C. Ipsi autem 16 C. orti sunt ex duplo producti 8. in 1. C. hoc est ex duplo ipsius 8. Proinde 32 Q. gignuntur ex quadruplo eiusdem 8. Id ergo mihi incumbit, vt inueniam cubum qui quater sumptus faciat quadratum. Esto quæsitus $\frac{1}{8}$ C. hic quater fit $\frac{4}{8}$ C. æquandus quadrato. Esto 16 Q. fit 1 N. 4. Ad positiones erit cubus 64. Pono itaque secundum 64. − 1 C. & superest vt quadratus secundi adsumpto primo faciat quadratum. Sed quadratus secundi adsumpto primo facit 1 CC. + 4096. + 1 N. − 128 C. hoc ergo æquatur quadrato à latere 1 C. + 64. hoc est 1 CC. + 4096 + 128 C. & relinquuntur 256 C. æquales 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{16}$. secundus $\frac{16^3+1}{4\cdot 16^2}$.

κύβος. λοιπὸν ὅτι ϗ̀ ἀπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνον προσλαβόντα τὸν πρῶτον ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνος προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ κυβοστὸν $\overline{\alpha}$ $\overline{\varsigma}$ $\overline{\alpha}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\xi\delta}$ λείψει $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\iota\varsigma}$. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\pi}$. τουτέστι $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\iota\varsigma}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\xi\delta}$. ϗ̀ κοπὰν ποιησάμενον τ̄ λειπόντων, ϗ̀ ἀφαιρουμένων τ̄ ὁμοίων ἀπὸ τῶν ὁμοίων, λοιποὶ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\lambda\beta}$ ἴσοι $\overline{\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$. καὶ πάντα σχοίνῳ $\overline{\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\delta^{\alpha}}$ $\overline{\lambda\beta}$ ἴσαι $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$. καὶ ὅτι ἡ $\overline{\mu^{\alpha}}$ τετράγωνος, ϗ̀ $\overline{\delta^{\alpha}}$ $\overline{\lambda\beta}$ εἰ ἦσαν τετράγωνοι λελυμένῃ αἱ μοι ἰω̄ ἡ ἴσωσις. ἀλλ' αἱ $\overline{\delta^{\alpha}}$ $\overline{\lambda\beta}$ εἰσὶ δὶς $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\iota\varsigma}$. αἱ δὲ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\iota\varsigma}$ εἰσὶν ἀπὸ τ̄ δὶς $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\pi}$. ϗ̀ τῆ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$. τουτέστι δὶς τ̄ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\pi}$. ὥστε αἱ $\overline{\lambda\beta}$ δυνάμεις ἐκ τετράκις τ̄ $\overline{\pi}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ γίγονται ἑνὸς μοι δεῖν κύβου ἑξ τετράκις γνώμονος πεμπ̄ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$. ὅστις τετράκις γνώμονος ποιεῖ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\delta^{\alpha}}$ ἴσους τετραγώνῳ. ἔστω $\overline{\delta^{\alpha}}$ $\overline{\iota\varsigma}$. ϗ̀ γίνεται ὁ $\overline{\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\delta^{\alpha}}$. ὅτι τὰς ὑποστάσεις. ἔστι ὁ κύβος $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\xi\delta}$. τάσσω ἄρα τ̄ δευτέρου $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\xi\delta}$ λείψει $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$. καὶ λοιπὸν ὅτι τὸν ἀπὸ τῆ δευτέρᾳ τετράγωνον προσλαβόντα τ̄ πρῶτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἀπὸ τῆ δευτέρου προσλαβὼν τὸν πρῶτον ποιεῖ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\delta\varsigma}$ $\overline{\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$ ⏋ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\rho\kappa\eta}$. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\xi\delta}$. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\alpha}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$ $\overline{\delta\varsigma}$ $\overline{\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\chi^{\alpha}}$ $\overline{\rho\kappa\eta}$. καὶ γίνονται λοιποὶ $\overline{\chi^{\alpha}}$ σνς ἴσοι ἀριθμῷ $\overline{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς $\overline{\alpha}$ $\overline{\iota\varsigma}$. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἴσαι ὁ πρῶτος $\overline{\alpha}$ $\overline{\iota\varsigma}$ ὁ δὲ δεύτερος $\overline{\chi\varsigma}$. βρμγ $\overline{\delta\iota\varsigma}$.

IN QVAESTIONEM XIX.

TEXTVS lacunas repleuimus, vt vides; quo præstito parum, aut nihil superest difficultatis in huius quæstionis tractatione. Vnum est quod moneam numeri quadrato æquandi 1 CC. + 4096 + 1 N. − 128 C. latus ingeniosè fingi 1 C. + 64. vt quadrato vtriusque partis fiant 1 CC. + 4096. ac proinde cubocubis & vnitatibus vtrimque sublatis, maneat æquatio inter Cubos & Numeros, vnde fit solutio rationalis, quia prouisum est, vt vtraque Cuborum & Numerorum multitudo sit quadratus Numerus, lemmatis scilicet auxilio, quo reperitur cubus, cuius quadruplum, faciat quadratum. Possumus etiam ex ipsa operatione satis expeditum formare Canonem, hac arte.

Sume $\frac{1}{\square}$ cuiuslibet cubocubi, & per illius latus quadratum, diuide vnitatem, quotiens erit primus quæsitorum. Huius cubum aufer ab $\frac{1}{\square}$ sumpti cubocubi, relinquetur secundus.

Vt sumpto cubocubo 64. erit illius $\frac{1}{\square}$. 4. cujus latus 2. per quod si diuidas 1. fit $\frac{1}{2}$ primus quæsitorum, cuius cubum $\frac{1}{8}$ si auferas ab $\frac{1}{64}$ ipsius 64. videlicet ab 1. relinquetur secundus $\frac{7}{8}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{7}{8}$. Nam primi cubus adsumpto secundo facit cubum 1. At secundi quadratus adsumpto primo, facit quadratum $\frac{81}{64}$.

Quod spectat ad verbum διχαρίνειν, quo in hac & in sequenti quæstione, & alibi etiam vsum esse Diophantum existimat Xilander, pro eo quod est quadruplicare, moneo adulterinam vocem librarij inscitia, vel oscitantia in textum Diophanti irrepsisse pro vera & germana τετράκις, quam vbique reposui. Porrò erroris ansam præbuit quod hæc vox vt plurimum expressa erat nota quaternarij $\overline{\delta^{\alpha}}$ cum χ superscripto, hoc modò $\overline{\delta\chi^{\alpha}}$, vnde διχαρίνειν sciolus nescio quis efformauit. Sic propositione ista post illa verba, ὥστε αἱ $\overline{\lambda\beta^{\alpha}}$ δυνάμεις ἐκ τετράκις τῷ $\overline{\pi}$ $\overline{\mu^{\alpha}}$, statim sequitur in codice manu exarato, γίγνη οιω̄ μοι εὑρεῖν κύβον, ὃς $\overline{\delta\chi^{\alpha}}$ γινόμενος ποιεῖ τετράγωνον.

Tum paulò post. ἔστι δίκις τετράκις γινόμενος, &c. Vbi patet idem esse prorsus quod primo positum est τετράκις , deinde δὶς demum δίκις τετράκις. Vigesima etiam propositione sequente eadem dictio ter repetitur, vbi euidens est eam loco τετράκις esse positam. Primo enim legitur, ἀλλὰ δὶς οἱ ϛϛοὶ ὅτι δὶς τοὺς ϛϛους. ὁ δίκις τετράκις ἴσος τῷ ϛϛ ὄϛι. Deinde θέλω ὧν τὸν δίκις τετράκις ὑπ' αὐτῷ, &c. Ac demum, ἀλλὰ μὴν & πάντων δύο ἀεὶ μίαν ὁ δίκις τετράκις ὑπ' αὐτῷ, &c. Vbi etiam, ὁ δίκις τετράκις ὑπ' αὐτῷ. mutatur statim in τετράκις ὑπ' αὐτῷ. Sequitur enim ἐὰν ὧν τὸν ἀπὸ τῆς παραχῆς αὐτῷ μονάδα μίαν καταπαύσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτῷ, &c. Facessat igitur subreptitia vox, & eius insolentiam cum Xilandro miretur nemo. Equidem me non latet verbum δίκις τετράναι inter ea quibus vtuntur Arithmetici cõnumerari à Polluce lib. 4. cap. 22. sed quo sensu soleat vsurpari non docet Pollux. Ergo sanè nunquam adducar, vt credam sumi pro eo quod est quadruplicare. Quid autem significet doceant eruditi.

QVÆSTIO XX.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῷ ἀορίϛῳ, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μῦ μ̄ ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, & δευτέρου μῦ μ̄ ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω τὼ μ̄. ἕξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. πλάϛω τετράγωνον ἀπὸ ϛς ὅπου δ' ἤποτε, & μ̄ ᾱ. ἴϛο ϛ̄ ᾱ. μ̄ ᾱ. αὐτὸς ἄρα ἔϛαι ὁ τετράγωνος δ̄ ᾱ. ϛς̄ β̄. μ̄. ᾱ. ἐὰν ἀφέλω τὼ μ̄ ᾱ. λοιπὸν δ̄ ᾱ. ϛς̄ β̄. ἔϛαι τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔϛω ὁ δευτερος ϛ̄ ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔϛαι ϛ̄ ᾱ μ̄ β̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸ ὑπὸ δευτέρου, & τρίτου ποιεῖν τετράγωνον μῦ μ̄ ᾱ. ἐὰν ὁμοίως ἀπό τινος τετραγώνου ἀφέλω μ̄ ᾱ. ἕξω τὸν ἀπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου. πλάϛω ὁ τετράγωνος ἀπὸ ϛς γ̄ μ̄ ᾱ. ἔϛαι ὁ τετράγωνος δ̄ δ ϛς̄ ϛ̄. μ̄ ᾱ. ἐὰν ἄρα ἀφέλω μ̄ ᾱ γίνονται δ̄ ϗ ϛς̄ ϛ̄. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου ἴϗ δ̄ ϗ ϛς̄ ϛ̄. ὧν ὁ δευτερος ὄϛι ϛ̄ ᾱ. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔϛαι ϛς̄ ϗ. μ̄ ϛ̄. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μῦ μ̄ ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἔϛι δ̄. ϗ. ϛς̄ κδ̄ μ̄ ιϛ̄. ἴσος τετραγώνῳ. & ἔχω τὰς δυνάμεις τετραγωνικάς, εἰ ἦ καὶ αἱ μονάδες ἦσαν τετραγωνικαὶ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τὴν πλευρὰν τῆϛ δυνάμεως καὶ τῆϛ μονάδων ἴσον ἦν τοῖς ἀριθμοῖς, ἦν ἂν ἀορίϛως τὰ τρία ἐπιτάγματα λελυμένα. ἀλλ' αἱ μονάδες ιϛ̄. εἰϛὶν ἐν τῷ ὑπὸ τῆϛ μ̄ β̄ καὶ μ̄ ϛ̄. μῦ μ̄ ᾱ. ἀλλ' αἱ μὲν μ̄. β̄. ἐν τῷ δὶς ὑπὸ ϛ̄ ᾱ καὶ μ̄ ᾱ. αἱ ἦ μ̄ ϛ̄ πάλιν ἐν τῷ δὶς ὑπὸ ϛς̄ γ̄. καὶ μ̄ ᾱ. θέλω οὖν δὶς τὰς ϛς̄ ὅπου δὶς τὰς ϛς̄ μῦ μ̄ ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ δὶς οἱ ϛς̄ ὅπου δὶς τὰς ϛς̄. ὁ τετράκις ὑπὸ τῆϛ ϛς̄ ἐϛί. θέλω οὖν τὸν τετράκις ὑπ' αὐτῷ μῦ μ̄ ᾱ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ μὴν & πάντων δύο

INVENIRE tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, adscita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, si ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex primo in secundum. Formo quadratum à numeris quotcunque & vnitate. Esto ab 1 N. + 1. erit is 1 Q. + 2 N. + 1. hinc ablata vnitate, quod supereſt 1 Q. + 2 N. est productum ex primo in secundum. Esto secundus 1 N. Primus ergo erit 1 N. + 2. Rursus quia volo productum ex secundo in tertium facere quadratum adscita vnitate, si eodem modo ab aliquo quadrato abstulero vnitatem, habebo productum ex secundo in tertium. Formetur quadratus a 3 N. + 1. erit is 9 Q. + 6 N. + 1. vnde ablata vnitate, relinquuntur 9 Q. + 6 N. Oportet ergo productum ex secundo in tertium esse 9 Q. + 6 N. At secundus est 1 N. erit igitur tertius 9 N. + 6. Rursus quia volo productum ex primo in tertium addita vnitate facere quadratum, erit vtique 9 Q. + 24 N. + 13. æqualis quadrato. Et numerus quadratorum est quadratus. Quod si etiam vnitates quadratæ essent, & duplum producti ex latere quadratorum in latus vnitatum æquale esset Numeris, indefinitè iam satisfactum esset tribus postulatis. At vnitates 13. fiunt ducto 2. in 6. & addita vnitate. Porro 2. fit ex 1 N. in 1. bis. At 6. fiunt ex 3 N. in 1. etiam bis. Volo itaque vt bis numeri in bis numeros ducti faciant quadratum adscita vnitate. Sed bis nume-

ri in bis numeros est quadruplum producti ex numeris in numeros. Volo igitur quadruplum hoc addita vnitate facere quadratum. Enimuero quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti, quadruplum cum quadrato interualli ipsorum facit quadratum. Proinde si quadratum interualli constituamus vnitatem, quadruplum producti adscita vnitate faciet quadratum. Atqui si quadratorum interuallum sit 1. erit & laterum interuallum 1. Oportet ergo formare quadratos a numeris deinceps, puta ab 1 N. + 1. & a 2 N. + 1. Quadratus ab 1 N. + 1. fit 1 Q. + 2. N. + 1. Vnde ablata vnitate relinquitur 1 Q. + 2 N. Quare oportet productum ex primo in secundum esse 1. Q. + 2 N. Ponatur secundus 1 N. ergo primus erit 1 N. + 2. Rursus quia quadratus abs 2 N + 1. est 4 Q. + 4 N. + 1. Vnde sublata vnitate relinquitur 4 Q. + 4 N. oportet productum ex secundo in tertium esse 4 Q. + 4 N. Sed secundus est 1. N. Ergo tertius erit 4 N. + 4. Atque ità soluta est quæstio indefinitè, vt bini quique mutua multiplicatione producant numerum qui addita vnitate fiat, quadratus. Et fit 1 N. quot quis voluerit vnitatum. Hoc enim est indefinitè quærere, cùm ita positiones instituuntur, vt quamcunque numeri æstimationem iis accommodes, semper postulatis satisfiat.

ἀριθμῷ ὁ τετράκις ὑπ' αὐτὸν μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ὑποχῆς αὐτῷ τετράγωνόν ποιεῖ τετράγωνον. ἐὰν οὖν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποχῆς αὐτῷ μονάδα μίαν κατασκευάσωμεν, ὁ τετράκις ὑπ' αὐτὸν μετὰ μονάδος ποιεῖ τετράγωνον. εἰ οὖν ὁ ἀπὸ τῆς ὑποχῆς αὐτῷ μονάς. ἡ δὲ ὑποχὴ αὐτῷ ὁσῶν μονάς μία. ὁλεῖ οὖν ἀπὸ τῆς κυ τὸ ἑξῆς τοῦ πλάσεως τετράγωνους. ἔστω ἀπὸ α. ὁ ἀπὸ βμονάς α. ἡ ἔστιν ὁ ὑπὸ α μονάς α. τετράγωνον δυ α. ἐστὶ β. μονάς α. ἐὰν ἀφέλω τὴν μονάδα, λειπὸς γίνεται δύναμις μία, ἐστὶν β. δεῖ ἄρα τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου εἶναι δ α ἐστὶν β. τετάχω ὁ δευτέρου ἐστὶν α. λειπὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔσται β α μονάς β. πάλιν ἐπεὶ ὁ ἀπὸ ἐστὶ β μονάς α τετράγωνός ἐστι δ δ. μονάς α. ἐὰν ὁμοίως ἀφέλω τὴν μονάδα μίαν λειπὸς γίνεται δ δ ἐστὶ δ. δεῖ δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου εἶναι δ δ ἐστὶ δ. ὧν ὁ δεύτερός ἐστιν α. λειπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ἐστὶ δ. καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀπορίᾳ, ὥστε τὸν ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν μετὰ μονάδος ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ὅσου τις θέλει. τὸ δὲ ἀπορίστως ζητεῖν ἐστὶν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ. ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ἀριθμὸν εἶναι, ὅτι ταῖς ὑποστάσεις ποιήσας σώσῃ τὸ ἐπίταγμα.

OBSERVATIO D. P. F.

PRoponatur inuenire tres numeros vt quem bini producunt mutuâ multiplicatione adscitâ vnitate faciat quadratum & praterea vnusquisque trium adscitâ vnitate faciat quadratum.

Hujus quæstionis solutionem subiungemus & jam confecta est. Ita fiat solutio indefinita præsentis quæstionis vt vnitates primi & tertij numeri additâ vnitate conficiant quadratos v. g. sint tres numeri indefinitè primus $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$ Secundus 1 N. Tertius $\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{2}$ Patet solutionem hanc indefinitam satisfacere conditionibus huius quæstionis secundæ.

Superest vt singuli ex illis numeris adscitâ vnitate conficiant quadratos & orietur triplicata æqualitas cuius solutio erit in promptu ex nostrâ methodo cum numerus vnitatum in quolibet ex istis numeris vnitate auctis sit quadratus.

IN QVAESTIONEM XX.

LEMMA quod assumit Diophantus, nimirum. Quorumcunque duorum numerorum vnius in alterum producti quadruplum cum quadrato interualli ipsorum, facit quadratum, idem est prorsus cum quinta secundi porismatum, per quam constat etiam fieri inde quadratum summæ ipsorum numerorum. Vnde optimè concludit Diophantus, si Numeri vnitate distent, quadruplum producti eorum adscita vnitate facere quadratum. Sed & hinc colligo vniuersalius.

Si quadruplum producti duorum numerorum vnitate distantium ducatur in quemlibet quadratum, & producto addatur idem quadratus, fit quadratus.

Hoc enim nil aliud est quàm quadratum summæ duorum numerorum vnitate distantium ducere in alium quadratum. Quamobrem inde produci quadratum necesse est. Ita si sedecuplo producti addas 4. fiet quadratus, hoc enim idem est ac ducere quadratum summæ numerorum in 4. At si trigecuplo sesquplo producti addas 9. fiet etiam quadratus, hoc enim idem est ac ducere quadratum summæ numerorum in 9. & sic de aliis.

Cæterum si quid obscuritatis est in huius quæstionis tractatione, hoc vnum esse videtur, quòd non statim apparet quomodo positionibus trium numerorum sumptis à quadratis continenter proximis constet productum ex primo in tertium adscita vnitate facere quadratum. Hoc ergo vt perfectè demonstretur, sit primus A + B. tertius C. + D. (nam secundus semper ponitur 1 N.) & methodo à Diophanto tradita sint A & C. Numerorum numeri quadrati continenter proximi. Ipsi verò B D sint vnitatum numeri dupli laterum ipsorum A C. Ductoque A in C. fiat E quadratorum numerus, ductisque A in D. & B in C. fiat summa productorum F Numerorum numerus. Denique ducto B. in D. & producto addendo vnitatem fiant G. vnitates, dico ipsum E + F + G. esse quadratum. Hoc vt probetur, oportet ostendere ipsos E. G. quadratos esse, & ex latere vnius in latus alterius bis produci F. sic enim per quartam secundi totum E F G quadratum esse constabit. Itaque cùm numeri Numerorum A C quadrati sint continenter proximi, sumantur eorum latera H K quæ vnitate distent. Primùm igitur patet ex quadrato A in quadratum C. productum E esse quadratum, cuius latus est productus ex H in K. Secundo, quia B duplus est ad H, & D ad K productus ex B in D. adscita vnitate, puta G. æquatur quadruplo producti ex H. in K. adscita vnitate. Igitur G. quadratus est per lemma supra explicatum, cuius latus est summa ipsorum H K. Denique quia F constat productis ex A in D & ex C in B. seu ex A in K bis, & ex C. in H. bis. At producti ex A in K. & ex C in H. semel æquantur productis ex summa ipsorum H K in planum sub ipsis contentum, ac proinde summa productorum ex A in D. & ex C in B. seu F æquatur duplo producti ex summa ipsorum H K in planum sub ipsis, latus autem ipsius G est summa ipsorum H K & latus ipsius E est planus sub H K continens, vt ostensum est, patet F produci ex latere ipsius E in latus ipsius G. bis Quamobrem totus E F G quadratus est, cuius latus constat ex lateribus ipsorum E G. Quod erat demonstrandum.

A 4 N. + B 4. H 2.
C 9 N. + D 6. K 3.
E 36 Q. + F 60 N. + G 25.

18. 2. *poris.*

Hinc apparet posito secundo semper 1 N. positiones primi & tertij infinitis modis posse variari, dum sumantur duo numeri Numerorum quadrati, quorum latera vnitate distent, & his addantur, vnitates quæ sint duplum lateris cujuslibet. Sic posuit eos Diophantus 1 N. + 2. & 4 N. + 4. Poni etiam poterant 4 N. + 4. & 9 N. + 6. vel adhuc 9 N. + 6. & 16 N. + 8. & sic in infinitum.

Hanc autem quæstionem si libet non soli vnitati applicabis, sed ad quemlibet quadratum extendes eodem prorsus artificio, ampliando lemma Diophanti, vt suprà docuimus. Verbi gratia, quærantur indefinitè tres numeri, vt bini quem producent mutuo ductu is adscito 9. faciat quadratum. Vt habeas productum ex primo in secundum, auser 9. ab aliquo quadrato, cuius latus sit quotcunque Numerorum + 3, sit latus 1 N. + 3. erit quadratus 1 Q. + 6 N. + 9. Ergo productus ex primo in secundum erit 1 Q. + 6 N. sit secundus 1 N. erit igitur primus 1 N. + 6. Rursus vt habeas tertium, finge quadratum à latere 2 N. + 3. (vt scilicet numerus Numerorum superet vnitate numerum Numerorum lateris prioris quadrati) erit quadratus 4 Q. + 12 N. + 9. vnde auferendo 9. manet productus ex secundo in tertium 4 Q. + 12 N. Quare cum secundus sit 1 N. erit tertius 4 N. + 12. Igitur tres numeri quæstionem infinitè soluentes sunt 1 N. + 6. 1 N. 4 N. + 12. Porro lemma Diophanti hîc ampliari intelligitur modo supra tradito, nam patet 6. vnitates primi Numeri esse sesquplum numerorum lateris prioris quadrati, & 12. vnitates tertij Numeri esse sesquplum Numerorum posterioris quadrati. Quare cùm productus ex sesquplo vnius numeri in sesquplum alterius sit æquale trigecuplo sesquplo producti eorundem numerorum, patet hic supponi, trigecuplum sesquplum producti duorum numerorum vnitate distantium, adscito 9. facere quadratum, quod sanè concluditur per supradictum lemma.

Hæc quidem Diophanti vestigiis insistendo facilè fuit excogitare. Verùm si propositum sit inuenire tres numeros indefinitè, vt bini quem producunt mutuo ductu, is adscito quocunque numero quadratum faciat; iam non licebit Diophantæam analysim imitari. Nec fortè temerarium fuerit asserare huius problematis enodationem ipsum ignorasse Diophantum, quod mirum non est, quandoquidem, vt verissimè cecinit poëta, Non omnia possumus omnes. Nobis tamen ope Canonum ad duodecimam tertij traditorum, rem absoluere pronum erit. Etenim sit propositum quærere indefinitè tres numeros, vt bini quem producunt adscito 6. faciat quadratum. Fingantur duo quadrati à quotlibet numeris Numerorum diuersis + eodem numero vnitatum, cuius quadratus superet 6. puta fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 3. & 2 N. + 3. erunt hi 1 Q. + 6 N. + 9. & 4 Q. + 12 N. + 9. auferatur 6. ab vtroque, & residua diuidantur per interuallum laterum quod est 1 N. fiet ergo primus quæsitorum 1 N. + 6 + $\frac{1}{N}$. secundus 4 N. + 12 + $\frac{1}{N}$. tertius 1 N. qui satisfaciunt postulatis ex Canone primo duodecimæ tertij. vel iisdem manentibus primo & secundo,

erit

erit tertius duplum ſummæ illorum multatum laterum interuallo 1 N. puta 9 N. + 36 + $\frac{1}{4}$. vt conſtat ex ſecundo Canone. Eadem arte per Canones ad decimam tertiam tertij traditos licebit & hanc ſoluere quæſtionem.

Inuenire tres numeros indefinitè, vt quem bini producunt mutuo ductu, detracto quouis dato numero quadratum relinquat.

Datus eſto 10.

Fingantur duo quadrati, alter à quotlibet vnitatibus, alter ab 1 N. + latere prioris. Sint igitur latera 1. & 1 N. + 1. erunt quadrati 1. & 1 Q. + 2 N. + 1. Vtrique addatur 10. & ſummæ diuidantur ſigillatim per laterum interuallum 1 N. Eritque primus quæſitorum $\frac{1}{4}$. ſecundus 1 N. + 2 + $\frac{1}{4}$. tertius horum ſummæ duplum multatum 1 N. puta 1 N. + 4 + 44 − 1 N. vel iiſdem manentibus primo & ſecundo, erit tertius ipſum interuallum laterum, nimirum 1 N.

QVÆSTIO XXI.

INVENIRE quatuor numeros, vt qui fit ex binorum mutua multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum. Quia volo productum ex primo in ſecundum cum vnitate facere quadratum, ſi ab aliquo quadrato detraxero vnitatem, habebo productum ex primo in ſecundum. Formo quadratum ab 1 N. + 1. & fit 1 Q. + 2 N. + 1. hinc aufero vnitatem, reſtant 1 Q. + 2 N. pro producto ex primo in ſecundum eſto primus 1 N. ergo ſecundus erit 1 N. + 2. Rurſus quia volo productum ex primo in tertium cum vnitate facere quadratum, formo quadratum abs 2 N. + 1. nimirum à numeris continenter proximis, ob ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, & ab illius quadrato, aufero vnitatem, & ſtatuo productum ex primo in tertium 4 Q. + 4 N. Quare cùm primus ſit 1 N. erit vtique tertius 4 N. + 4. Rurſus quia volo productum ex primo in quartum cum vnitate facere quadratum, formo quadratum à numeris continenter proximis, nimirum à 3 N. + 1. & à quadrato ſublata vnitate ſtatuo productum ex primo in quartum 9 Q. + 6 N. Proinde cùm primus ſit 1 N. erit quartus 9 N. + 6. & contingit præterea productum ex tertio in quartum cum vnitate facere quadratum. Cæterùm ex ſecundo in quartum productus addita vnitate facit 9 Q. + 24 N. + 13. Hoc ergo æquandum quadrato, eſto latus 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{7}{6}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{7}{6}$. ſecundus $\frac{19}{6}$. tertius $\frac{61}{6}$. quartus $\frac{111}{6}$.

Ἐτρειν τέτταρας ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μονάδα μίαν, ποιῇ τετράγωνον. ἐπὶ τοίνυν τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν ἀφέλω ἀπό τινος τετραγώνου μονάδα μ̊ α̅. ἔξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου, παντὸς τετραγώνου ἀπὸ ς̊ α̂ μ̊ α̅. καὶ γίνεται αὐτὸς ὁ τετράγωνος δ̊ α̅ ς̅ β̅ μ̊ α̅. ἐὰν ἀφέλω τὴν μ̊ α̅. λοιπὸς γίνεται δ̊ μία ς̅ β̅ ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου. ἔστω ὁ πρῶτος ς̊ α̂. ὁ ἄρα δεύτερος ἴσται ς̊ α̂ μ̊ β̅. πάλιν ἐπὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσω τετράγωνον ἀπὸ ς̅ β̅ μ̊ α̂ τὴν κ̅ τὸ ἐξῆς διὰ τὸ προσδιχθὲν, καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ ἄρα τῶν μονάδα α̅. καὶ πάντα τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου δυνάμεις δ̅ ς̅ δ̅. ὧν ὁ πρῶτος ὄντι ς̊ α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος ἔσται ς̅ δ̅ μ̊ δ̅. πάλιν ἐπὶ θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς, ποιεῖν τετράγωνον. πλάσω τετράγωνον ὑπὸ τὴν κ̅ τὸ ἐξῆς ς̅ γ̅ μ̊ α̅. καὶ λαβὼν τὸν ἀπὸ, καὶ ἀφελὼν μ̊ α̅. ἔξω τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ τετάρτου δ̊ ϟ̅ ς̅ ϟ̅. ὧν ὁ πρῶτος ὄντι ἀριθμὸς α̅. λοιπὸς ἄρα ὁ τέταρτος ἔσται ς̅ θ̅ μ̊ ϟ̅. καὶ ἔτι συμβαίνει τὸν ὑπὸ τὸ τρίτου καὶ τετάρτου μετὰ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ δευτέρου καὶ τετάρτου μετὰ μ̊ α̅. ποιεῖ δυνάμεις ϟ̅ ς̅ κδ̅. μ̊ ιη̅ ἴσας τετραγώνῳ παντὸς πλευρᾶς ς̅ γ̅ λείψει μ̊ δ̅. καὶ γίνεται ὁ ς̊ α̅ ϟ̅. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος α̅ ϟ̅. ὁ δὲ δεύτερος λγ̅ ϟ̅. ὁ δὲ τρίτος ξη̅ ϟ̅. ὁ δὲ τέταρτος ρε̅ ϟ̅.

OBSERVATIO D. P. F.

INueniantur tres numeri quilibet vt qui fit binorum mutuâ multiplicatione adſcita vnitate faciat quadratum, v. g. ſint illi numeri 3. 1. 8. quaratur iam quartus eâ

conditione vt qui fit sub tribus inuentis sigillatim in quartum adscita vnitate sit quadratus, ponatur inueniendus esse 1 N. ergo 3 N + 1. item 1 N + 1. item 8 N + 1. æquantur quadrato & oritur triplicata æqualitas cuius solutio inuentioni nostræ debetur. Vide quæ adnotauimus ad quæstionem 24. libri 6.

IN QVAESTIONEM XXI.

NON apparet ex verbis Diophanti quomodo producti ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adscita vnitate quadratum faciant. Id autem omisit quasi euidens ex lemmate præcedentis quia secundus, tertius & quartus finguntur à quadratis continenter proximis, vnde sequitur ex supra demonstratis productos ex duobus proximis, videlicet ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum addita vnitate facere quadratos. Quamobrem cùm etiam ex constructione manifestum sit productos ex primo in singulos ex aliis addita vnitate facere quadratos, vnum sanè restat curandum, vt scilicet productus ex secundo in quartum adscita vnitate fiat quadratus. Fit autem 9 Q. + 24 N. + 13. hoc ego æquabimus quadrato à latere 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 13. vt à 3 N. − 4. cum Diophanto.

Hæc etiam quæstio ad quemlibet quadratum extendi potest, eodem artificio quo præcedens. verbi gratia. Quærantur quatuor numeri, vt bini quem producunt adsumpto 4. quadratus fiat. Posito primo 1 N. fingantur quadrati à lateribus 1 N. + 2. 2 N. + 2. 3 N. + 2 erunt hi 1 Q. + 4 N. + 4. 4 Q. + 8 N. + 4. 9 Q. + 12 N. + 4. A singulis auferatur 4. & erit productus ex primo in secundũ 1 Q. + 4 N. ex primo in tertium 4 Q. + 8 N. ex primo in quartum 9 Q. + 12 N. Quare cùm primus sit 1 N. erit secundus 1 N. + 4 tertius 4 N. + 8. quartus 9 N. + 12 & quidem tam ex constructione, quàm ex demonstratis ad precedentem, constat productos ex primo in singulos ex aliis, itemque productos ex secundo in tertium, & ex tertio in quartum adsumpto 4. facere quadratos. Superest igitur vt productus ex secundo in quartum adscito 4. faciat quadratum. Sed facit 9. Q + 48 N + 52. hoc ergo æquatur quadrato sit eius latus 3 N. − 8 fit 1 N. $\frac{5}{6}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{5}{6}$. $\frac{17}{6}$. $\frac{29}{6}$. $\frac{41}{6}$. Producti ex primo in reliquos, adscito 4. faciunt quadratos $\frac{289}{36}$. $\frac{529}{36}$. $\frac{841}{36}$ quorum latera $\frac{17}{6}$. $\frac{23}{6}$. $\frac{29}{6}$. Producti ex secundo in tertium & quartum adsumpto 4. faciunt quadratos $\frac{697}{36}$. $\frac{1073}{36}$. quorum latera $\frac{17}{6}$. $\frac{23}{6}$. Denique productus ex tertio in quartum adscito 4. quadratum facit $\frac{1517}{36}$. cuius latus $\frac{29}{6}$.

Cæterùm quomodo in vniuersum solui possit huiusmodi quæstio, vt scilicet productus ex binorum mutuo ductu adscito quocumque dato numero faciat quadratum colligi non potest ex Diophanto, & id eum latuisse audacter asserere ausim, alioquin non in sola vnitate vel in solis quadratis perfecisset, quod in omnibus numeris absoluere poterat. Nos pulcherrimum hoc problema explicauimus ad duodecimam tertij. Et rursus idem perfecimus additione in detractionem mutata ad decimam tertiam eiusdem.

QVÆSTIO XXII.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ἀνάλογον, ὅπως δύο ὁποιωνῶν ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. τετάχθω. ὁ μὲν ἐλάσσων ς̄ ᾱ. ὁ δὲ μέσος ς̄ ᾱ. μ̄ δ̄. ἵνα ἡ ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ὁ δὲ τρίτος ς̄ ᾱ. μ̄ ιγ̄. ἵνα καὶ ἡ τούτου πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ καὶ τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ὑπεροχὴ ᾖ τετράγωνος, ἰω̄ ἀναλελυμένου ἐν τῇ διορίσῳ, δύο ὁποιωνοῦν, ἡ ὑπεροχὴ τετράγωνος. ὁ δὲ μέγιστος τοῦ ἐλαχίστου ὑπερέχει μ̄ ιθ̄. αἱ δὲ μονάδες ηγ̄. συνθημα ἐστὶ τετραγώνων τοῦ δ̄. καὶ τοῦ θ̄. γέγονεν ἂν μοι δύο δύο τετράγωνοι. ἴσους ἐπὶ τριγώνῳ τῷ ὑπὸ πλευρὰν ὑπὸ τριγώνιον ὀρθογωνίου. ἔστι δὲ ὁ θ̄. καὶ ὁ ις̄. καὶ πάλιν ὁ μὲν ἐλάχιστος ς̄ᵒ ᾱ̄. τὸν δὲ μέσον ς̄ᵒ ᾱ̄ μ̄ θ̄. τὸν δὲ τρίτον ς̄ᵒ ᾱ̄. μ̄ κε̄. καὶ δύο ὁποιωνοῦν ἡ ὑπεροχὴ ἔσται τετράγωνος. λοιπὸν ὅτι αὐτοὺς ἀνάλογον ποιῆ. ἐπεὶ δὲ ξεῖς ἀριθ-

INVENIRE tres numeros proportionales, vt duorum quorumlibet interuallum sit quadratus numerus. Ponatur minor 1 N. Medius 1 N. + 4. vt interuallum sit quadratus. Tertius autem sit 1 N. + 13. vt & huius excessus supra medium sit quadratus. Porrò si maximi & minimi differentia esset quadratus, iam indefinitè satisfactum esset parti quæstionis qua postulatur, vt differentia duorum quorumlibet sit quadratus. At maximus minimum superat vnitatibus 13. & 13. est summa quadratorum 4. & 9. Quærendi igitur sunt duo quadrati æquales quadrato. Quod facilè fit trianguli rectanguli sumptis lateribus, suntque 9. & 16. statuo minimum 1 N. Medium 1 N. + 9 tertium 1. N. + 25. & sic duorum quorumlibet

interuallum quadratus est. Superest vt ipsi sint proportionales. At cùm tres numeri proportionales sunt, qui sub extremis continetur æqualis est quadrato medij, sed contentus sub maximo & minimo, hoc est sub extremis est 1 Q. + 25 N. Quadratus autem medij est 1 Q. + 18 N. + 81. Hæc ergo æquantur inter se, & fit 1 N. $\frac{11}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{144}{7}$. secundus $\frac{225}{7}$. tertius $\frac{81}{7}$.

μὴ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ὀφείλει τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστιν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ὀφείλει δυ α̅ ς̅ κε̅. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ μέσου δυ α̅ ς̅ ιη̅ μ̅α̅. ἴσαι δυ α̅. ς̅ν̅ κε̅. καὶ γίνεται ὁ ς̅ πα̅ ς̅ ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος πα̅ ς̅ ὁ δὲ δεύτερος ρμδ̅ ς̅. ὁ δὲ τρίτος σιε̅ ς̅.

IN QVAESTIONEM XXII.

TOTA diuersitas solutionum pendet hîc à duobus quadratis qui simul iuncti quadratum efficiant, nam si vtaris iisdem, eadem semper continget solutio, quamuis pro primo quæsitorum numerorum statuas quemlibet Numerorum numerum, sic quamuis statuas quæsitos numeros 3 N. 3 N. + 9. & 3 N. + 25. eandem solutionem inuenies quam reperit Diophantus positis iisdem numeris 1 N. 1 N. + 9. & 1 N. + 25. & sic quantumuis varietur primus, dum in secundo & tertio ponantur iidem quadrati 9. & 25. eadem continget solutio, quod patet experientia, & facile est demonstrare.

Cæterùm est quod moneam ex duobus quadratis qui simul quadratum conficiunt, minorem statuendum in medio numero, non autem maiorem, sic Diophantus medium posuit 1 N. + 9. non 1 N. + 16. Quamuis posito eo 1 N. + 16. tribus quoque postulati partibus satisfiat, cùm binorum interuallum sit quadratus. Sed in æquatione qua medij quadratus æquatur plano sub extremis, inueniuntur tandem 32 N. + 256. æquales 25 N. Quod est impossibile, quia 32 N. sunt plus quàm 25 N. fiunt autem 32 N. ex duplo quadrati 16. qui positus est in medio, at 25 N. est summa quadratorum 16. & 9. Oportet igitur duplum quadrati qui ponitur in medio minus esse summa quadratorum, quare oportet minorem quadratum collocari in medio. Quandoquidem duplum maioris duorum numerorum excedit summam ipsorum, sicut duplum minoris deficit ab eadem summa. Porrò ex ipsa operatione elicitur Canon facillimus.

Sume duos quadratos quadratum conficientes, per horum interuallum diuide quadratum minoris quadrati, orietur primus quæsitorum. Cui si addas minorem quadratum, fiet secundus. Et huic si addas maiorem quadratum, fiet tertius.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus adscito quolibet ipsorum faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. + 2 N. & & primus 1. vt solidus ascito primo faciat quadratum. Rursus quia volo solidum sub tribus contentum cum secundo facere quadratum, si ab aliquo quadrato detraxero 1. Q. + 2 N. habebo secundum. Formo quadratum ab 1 N. + 3. huius quadratis detractis 1 Q. + 2 N. facit 4 N. + 9. Pono ergo secundum 4 N. + 9. Iam cùm solidus sub tribus contentus sit 1 Q. + 2 N. & ex primo in secundum producatur 4 N. + 9. si diuidamus 1 Q. + 2 N. per 4 N. + 9. habebimus tertium. Verùm hæc diuisio non est possibilis. Vt autem fieri possit curandum est vt se habeat 1 Q. ad 4 N. sicut 2 N. ad 9. & permutatim 1 Q. ad 2 N. sicut 4 N. ad 9.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑφ' αὐτῶν στερεὸς περισταθεὶς ἑκάστῳ αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ἐκ ξιῶν στερεὸς δυ α̅ ς̅ β̅. ὁ δὴ πρῶτος μ̅α̅. ἵνα ὁ ἐκ τ̅ τριῶν στερεὸς μετὰ τοῦ πρώτου ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐπεὶ θέλω τὸν ἐκ τ̅ ξιῶν στερεὸν μετὰ τοῦ δευτέρου ποιεῖν τετράγωνον. ἐπεὶ ἄρα ἀπὸ πνος τετραγώνου ἄρα δύναμιν α̅ ς̅ν̅ β̅. ὑφ' ὧν δεύτερον πλάσω τετράγωνον ἀπὸ ς̅ α̅ μ̅ γ̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος γ̅ δ̅ α̅ ς̅ β̅. ποιεῖ ς̅ν̅ δ̅ μ̅ θ̅. τάττω ὧν τὸν δεύτερον ς̅ δ̅ μ̅ ϑ̅. ἀλλ' ἐπεὶ ὁ ἐκ τ̅ τριῶν στερεὸς δ̅ α̅ ς̅ β̅. ὁ δὴ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ς̅ δ̅ μ̅ θ̅. ἐπεὶ ἄρα δυ α̅ ς̅ β̅. ὑφ' ἁβάλλω ἁβ ς̅ δ̅ μ̅ θ̅. ἔξω τὸν τρίτον. ἐ δυνατὸν δὲ ἡ ὑφ' ἁβολή, ἵνα δὲ λύηται ἡ ὑφ' ἁβολή, δεῖ εἶδός τι ὡς δυ μία πρὸς ς̅ν̅ δ̅. ὑπὸς ς̅ β̅ πρὸς μοναδας θ̅. καὶ ἐναλλάξ. ὡς δυ μία πρὸς ς̅ν̅ β̅. οὕτως ς̅ δ̅ πρὸς μ̅ θ̅. καὶ ἡ

δύναμις μία τ ἐξ β ἡμισύ ἐστιν ὑπὸ πλήθει. ὡς εἰ οὖν καὶ ϛ^ι δ τῷ μ^ο ι ἡμισυς ἰω^ν. ἰω^ν αὖ δυνατὴ ἡ ὑποβολή. ἀλλὰ εἰ ϛ^ι δ ἐν τῇς ὑποσχῇς εἰσὶν, ἃς ὑπέσχηνται ϛ^ι ε δυσὶν ἀριθμοῖς, ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ ε ἐν τῷ δ εἰσι, ὑπὸ μ^ο τριῶν ☾ ϛ^ι α. τουτέστι δ τ μ^ο τρ. ὧν αἱ ἄ μ^ο Θ. ὁ ἀπὸ μ^ο τριῶν ἐστι τετράγωνος. ἀπῆκται δή μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὡς τὰς μονάδας τρεῖς, ὅστις δ τ ηὐξημένος, καὶ λείψας δυάδα τὸ ἥμισυ ᾖ τ ἀπ' αὐτῷ τετραγώνῳ. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ^ι εἷς. ὅθεν δ τ ηὐξημένος καὶ λείψας δυάδα, γίνεται ϛ^ι β. ὁ λείψει μ^ο β. ὁ δὲ ἀπ' αὐτῷ τετράγωνος ἐστι δ^ις α. Θέλομεν δὴ ἀριθμοῦ β λείψει μ^ο β. τὸ ἥμισυ ἔσῃ δ^ις α. δύναμις ἄρα α ἴση ϛ^ις δ λείψει μ^ο δ. καὶ γίνεται ὁ ϛ^ι β. νῦν ἔρχομαι ὅπῃ τὸ ὅλῃ ἀρχῇς ☾ εἶχον τ μὲν πρῶτον ἀριθμὸν μ^ο α. τ ᾖ ἐν τῷ τελῶν στερεὸν δ^ις α ϛ^ισ β. δεῖ ᾖ καὶ τ ἐν τ τελῶν στερεὸν προσλαβόντα τ δ δευτέρου πλευρᾶν τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ἀπό τινος τετραγώνου ἀφῶ τ δ^ις α ϛ^ι β. ἕξω τ δευτερ. πλάσω τ τετράγωνον ἀπὸ ϛ^ι α. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δ τ ηὐξημέναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τ ἀπ' αὐτῷ τετραγώνου, καὶ προδέδειχται, ☾ ἔστι μ^ο β. πλάσω τ τετράγωνον ἀπὸ ϛ^ι α μ^ο β. καὶ μονάδων τοσούτων, ἵνα αἱ μονάδες δ τ ηὐξημέναι καὶ λείψασαι δυάδα, ἥμισυ ᾖ τ ἀπ' αὐτῷ τετραγώνου, καὶ προδέδειχται, ☾ ἔστι μ^ο β. πλάσω τ τετράγωνον ἀπὸ ϛ^ι α μ^ο β ἴσην ἄρα δ^ις α ϛ^ις δ μ^ο δ. ἐὰν ἄρα τ ἐν τῷ τελῶν στερεὸν, τουτέστι δ^ις α ϛ^ισ β λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ δ δεύτερος ϛ^ις β μ^ο δ. εἰ ᾖ καὶ τὸν ἴσον τελῶν στερεὸν μερίσω εἰς τὸν ἴσον πρώτου καὶ δευτέρου, τουτέστι εἰς ἀριθμὸν β μ^ο δ. ἔξω τὸν ζητούμενον, καὶ ἔστιν ὁ μερισμὸς ϛ^ις τὸ ἥμισυ. καὶ λοιπόν ἐστι τὸν ἐν τελῶν στερεὸν μὴ τὸ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ἐν τῷ τελῶν στερεὸς μὴ τὸ τρίτου ἐστὶ δυνάμεις α ἀριθμοὶ β καὶ ἥμισυ. ἴσος τετραπλεύρῳ δυνάμεων δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ι^ν. ὅπου τὰς ἴσους αὐτῶν. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ϛ^ν ὁ δὲ δεύτερος λδ^ν. ὁ δὲ τρίτος β^ν καὶ ἥμισυ.

at 1 Q. semissis est (quantum ad vnitates attinet) de 2 N. vt si 4 N. quoque eodem modo fuissent semissis ex 9. institui posset diuisio. Atqui 4 N. oriuntur ex eo quo 6 N. superant 2 N. Sed 6 N. orti sunt ex duplo eius quod fit ex 3. in 1 N. hoc est ex duplo ternarij. Vnitates autem 9. est quadratus de 3. Cogor igitur inuenire numerum loco ipsius 3. cuius duplum multatum binario sit semissis quadrati ipsius numeri. Esto quæsitus 1 N. Huius duplum binario multatum est 2 N. — 2. quadratus autem eiusdem est 1 Q. Volumus igitur 2 N. —2. esse dimidium de 1 Q. Proinde 1 Q. æquatur 4 N. — 4. & fit 1 N. 2. Reuertor nunc ad primò propositum. Posueram primum 1. solidum autem sub tribus contentum 1 Q. + 2 N. Oportet autem solidum adsumpto secundo facere quadratum. Ergo si ab aliquo quadrato subduxero 1 Q. + 2 N. habebo secundum. Formo quadratum ab 1 N. & tot vnitatibus, vt duplum vnitatum dempto binario sit dimidium quadrati earum, eas autem iam ostensum est esse 2. Formo ergo quadratum ab 1 N. + 2. is est 1 Q. + 4 N. + 4. Aufero hinc solidum sub tribus contentum, nimirum 1 Q. + 2 N. relinquitur secundus 2 N. + 4. Itaque si solidum sub tribus contentum diuido per productum ex primo in secundum, nempe per 2 N. + 4. habeo tertium, nimirum $\frac{1}{2}$ N. Restat vt solidus sub tribus contentus adscito tertio faciat quadratum, sed solidus ille adscito tertio facit 1 Q. + 2 $\frac{1}{2}$ N. Hoc ergo æquatur quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$ Ad positiones. Erit primus $\frac{5}{4}$. secundus $\frac{35}{4}$. tertius $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$.

IN QVAESTIONEM XXIII.

OPERATIO Diophanti subtilis est, sed tamen perspicua. Lemma quo quærit numerum, cuius duplum binario multatum sit semissis quadrati eiusdem numeri, soluitur per tertiam regulam compositarum, nam manent 4 N. æquales 1 Q. + 4. & quia quadratus semissis Numerorum æquatur vnitatibus, sequitur ipsum semissem Numerorum esse valorem Numeri, vt liquet ex ipsius regulæ demonstratione. Verùm alicui non immeritò videri possit casu quodam fieri vt lemmatis huius solutio contingat rationalis, cùm regulæ compositæ si nulla cautio adhibeatur solutionem vt plurimum exhibeant irrationalem. Quamobrem vt hoc scrupulo careamus, aliam placet tradere operationem similem prorsus illi qua in sequenti quæstione vtitur Diophantus. Ponatur primus numerus 1 N. solidus autem sub tribus contentus esto 1 Q. — 1 N. sic enim primo adsumpto fiet quadratus.

Iam si solidus sub tribus contentus per primum diuidatur, quotiens 1 N. − 1 erit productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 N. − 1. Supereſt vt solidus 1 Q. − 1 N. tam secundo quam tertio adscito faciat quadratum. At secundo adscito facit 1 Q. + 1 − 1 N. adscito tertio facit 1 Q. − 1. vterque igitur æquatur quadrato. Hic iam duplicata occurrit æqualitas, quæ resoluenda est modo quem ad decimam quintam tertij explicauimus, quoque rursus vsus est Diophantus vigesima & vigesima prima eiusdem. Horum videlicet interuallum est 2 − 1 N. proinde quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat ita vt tam in semisse summæ ipsorum, quam interualli, inueniatur 1 N. sunt hi $\frac{1}{2}$ & 4 − 2 N. horum summæ semissis quadratus æquatur 1 Q. + 1 − 1 N. & fit 1 N. $\frac{5}{16}$. tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{5}{16}$. qui soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{125}{256}$. qui adsumens sigillatim ipsos tres numeros, facit quadratos $\frac{25}{256}$. $\frac{225}{256}$. $\frac{225}{256}$. quorum latera sunt $\frac{5}{16}$. $\frac{15}{16}$. $\frac{15}{16}$.

Quoniam verò siue ita opereris, siue secundum Diophantum, semper vnus quæsitorum ponitur vnitas, placet explicare modum quo perficiatur operatio Diophanti, & reddatur vniuersalior, ita vt primus statuatur quilibet quadratus numerus, & absque lemmate illo quo ad regulas compositas deuenitur, instituantur commodè positiones secundi & tertij. Ponatur ergo primus, quilibet quadratus puta 9. & fingatur quadratus ab 1 N. + 3. is erit 1 Q. + 6 N. + 9. vnde auferendo 9. statuatur 1 Q. + 6 N. pro solido sub tribus numeris contento. Itaque quoniam primus est 9. oportet talem fieri secundum, vt eo ducto in 9. per productum diuidi possit solidus 1 Q. + 6 N. vt oriatur ex hac diuisione tertius. Fingatur igitur quadratus ab 1 N. + 6. (tot scilicet vnitatibus quot sunt Numeri in solido, sicut fecit Diophantus, estque hæc regula generalis) erit is 1 Q + 12 N. + 36. vnde auferendo solidum, restat secundus 6 N. + 36. quo ducto in primum 9. fit 54 N. + 324. per quem si diuidas solidum 1 Q. + 6 N. oritur tertius $\frac{1}{9}$ N. Supereſt igitur vt solidus adsumpto tertio faciat quadratum, facit autem 1 Q. + 6 $\frac{1}{9}$ N. hoc ergo æquatur quadrato. Esto quadrato 2 + Q. fiet 1 N. N. $\frac{24}{37}$. Ad positiones. Erit primus 9. secundus $\frac{24}{37}$ tertius $\frac{24}{37}$. qui soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{13824}{50653}$ qui ad adsumens sigillatim ipsos tres numeros, facit quadratos $\frac{576}{1369}$ $\frac{1296}{1369}$. $\frac{1296}{1369}$. quorum latera $\frac{24}{37}$. $\frac{36}{37}$. $\frac{36}{37}$.

Porrò ne quis superſit dubitandi locus, positionibus ita institutis, diuisionem solidi per productum ex primo in secundum semper commodè fieri (in quo totum negotium consistit) sic demonstrabitur.

1 Q. + A 6 N. D 9.
1 Q. + B 12 N. + C. 36.
E 6 N. + C. 36.
F 54 N. + G 324.

Sit solidus 1 Q. + A certo Numerorum numero & semissis numeri A quadratus esto D. primus quæsitorum numerorum. Tum fingatur quadratus ab 1 N. + A. qui sit 1 Q. + B + C. patet ergo numerorum Numerum B. esse duplum ipsius A. & vnitates C. esse quadratum numeri A. Quare cùm auferetur solidus 1 Q. + A. à quadrato 1 Q. + B + C. relinquetur E + C. eritque E. æqualis ipsi A. cùm superſit E. auferendo A. ex B. duplo sui. Cæterùm constat ex modo operandi tradito E. + C. fore hypostasim secundi Numeri. Ducatur ergo primus D. in secundum E + C. & fiat F + G. dico per hoc productum commodè diuidi solidum 1 Q. + A hoc est eandem esse rationem 1 Q. ad F. quæ est A ad G. Nam quoad specierum denominationes spectat patet quadratos ad Numeros se habere vt Numeri ad vnitates. Quare restat vt probetur ipsos numeros à speciebus denominatos eandem quoque seruare rationem, hoc est esse 1 ad F. sicut A ad G. Quia igitur ducto eodem D. in ipsos E C. fiunt F G. erit F. ad G. vt E. ad C. hoc est vt A. ad C. (cùm A E. ostensi sint æquales) sed vt A. ad suum quadratum C. ita & vnitas ad A. Igitur vt 1. ad A. sic & F. ad G. & permutando vt 1. ad F. sic A ad G. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

NOn solum absque lemmate Diophanti, sed etiam absque duplicata æqualitate soluetur quæstio. Ponatur solidum sub tribus 1, q. − 2. N. primus numerorum sit vnitas secundus 2. N. Ita namque duabus partibus propositionis satisfit, pro tertio diuidatur solidum sub tribus 1. Q. − 2 N. per rectangulum sub primo & secundo quod est 2 N. oritetur ex hac diuisione tertius $\frac{1}{2}$ N − 1 quo addito ad solidum sub tribus fit 1 Q − $\frac{1}{2}$ N. − 1 quod æquari debet quadrato. Oportet autem valorem numeri maiorem esse binario propter positiones iam factas. Æquetur igitur quadrato cuius latus 1 N − aliquo vnitatum numero binario maiori. Omnia constabunt.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus dempto quolibet

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν στερεὸς λείψας ἑκάστον, ποιῇ τετράγωνον.

τεταχθω ὁ πρῶτος ς̄ ᾱ. ὁ δὲ ἐκτεινῶν τριὸς δ̄ ᾱ ς̄ ᾱ. ⁊ λείψας τ̀ πρῶτον ποιεῖ τετράγωνον. ⁊ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν τειῶν τριὸς δ̄ α ἀριθμὸς ᾱ. ὁ δὲ πρῶτός ὅστι ς̄ ᾱ. ὁ ἄρα ὑπὸ δευτέρου ⁊ τρίτου ἐστὶ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. ἔστω ὁ δεύτερος μ̄ α. λοιπὸς ἄρα ἔσται ὁ τρίτος ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. λοιπὸν ὅστι τὸν ἐκ τῶν τειῶν τριὸν λείποντα τ̀ δεύτερον ⁊ τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. λιπὸν δὲ ὁ μὲν ποιεῖ δ̄ ᾱ ς̄ ᾱ μ̄ α ἴσον τετραγώνῳ. ὁπ ⁊ δ̄ ᾱ μ̄ ᾱ ἴσον τετραγώνῳ, ⁊ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης, ⁊ λαμβάνω τ̀ ὑποχλὼ ὅστι δὲ ς̄ ᾱ. ἐπιτάττεται ἀριθμὸς δύο, ὧν τὸ ὑπὸ πλινθίτος ὅστι. πύπων ς̄ ᾱ. μετρείτω μ̄ τὸ ἥμισυ ⁊ ἔστω β̄. ἵστησι ⁊ πλευρὰς δύο τ̀ δυνάμεως. ⁊ ἔστιν αὐτ̀ ὡς οἱδας ἡ ἴσωσις. ⁊ γίνε ὁ ς̄ μ̄ ιζ̄ ᾱ. ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ̄ ᾱ. ὁ ⁊ δεύτερος μ̄ α. ὁ ⁊ τρίτος μ̄ κᾱ ᾱ.

ipsorum faciat quadratum. Ponatur primus 1 N. solidus autem 1 Q. + 1 N. & dempto primo facit quadratum. Et quia solidus sub tribus est 1 Q. + 1 N. at primus 1 N. erit productus ex secundo in tertium 1 N. + 1. esto secundus 1. ergo tertius erit 1 N. + 1. Superest vt solidus sub tribus dempto tam secundo quam tertio faciat quadratum. Dempto vero secundo fiet 1 Q. + 1 N. − 1 æqualem quadrato, at dempto tertio facit 1 Q. − 1. æqualem quadrato. Et exsilit duplicata æqualitas. Capio interuallum quod est 1 N. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat, ij sunt qui metiuntur 1 N. nimirum $\frac{1}{2}$. & 2 N. quod est duplum lateris quadrati. Est ergo quam nostri æquatio, & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{4}$. secundus 1. tertius $\frac{5}{4}$.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti facilis est, & vtitur duplicata æqualitate modo quem explicauimus ad decimam quintam tertij. Cæterum moneo secundum poni posse non tantum 1. sed & quemlibet vnitatum numerum. Ponatur verbi gratia 2. cum igitur productus ex secundo in tertium sit 1 N. + 1. erit tertius $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. Solidus autem 1 Q. + 1 N. detracto tam secundo quàm tertio fiet, hinc 1 Q. + 1 N. − 2. inde 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N. − $\frac{1}{4}$. quorum vterque quadrato æquandus est eorum interuallum est $\frac{1}{2}$ N. − 1 $\frac{1}{4}$. quod producunt mutuo ductu 2 N. − 6: & $\frac{1}{16}$. horum summæ semissis quadratus 1 Q. − $\frac{3}{2}$ N. + $\frac{289}{256}$. æqualis est 1 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{17}{16}$. tantus est primus, secundus 2. tertius $\frac{33}{16}$. qui soluunt quæstionem, nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{4913}{4096}$. qui detractis sigillatim ipsis tribus numeris, facit quadratos $\frac{1089}{256}$. $\frac{225}{256}$. $\frac{1}{256}$. quorum latera $\frac{33}{16}$. $\frac{15}{16}$. $\frac{1}{16}$.

Sed & quadratorum numerus qui ponitur in solido, pro arbitrio variari potest, dum ponatur quadratus. Etenim sit primus 1 N. solidus 4 Q. + 1 N. erit ergo productus ex secundo in tertium 4 N. + 1. Ponatur secundus quotlibet vnitatum, puta 2. erit igitur tertius 2 N. + $\frac{1}{2}$. superest vt solidus 4 Q. + 1 N. adficito, tum secundo, tum tertio faciat quadratum, proinde 4 Q. + 1 N. − 2 & 4 Q. − 1. N. − $\frac{1}{2}$ æquantur quadratis. Horum interuallum est 2 N. − 1 $\frac{1}{2}$ quod producatur ex $\frac{1}{2}$ in 4 N. − 2. Quare horum summæ semissis quadratus 4 Q. − 5 N. + $\frac{25}{16}$. æquatur 4 Q. + 1 N. − 2. & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. tantus est primus. secundus 2. tertius $\frac{33}{8}$ qui soluunt quæstionem. nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{4913}{512}$ qui singulis detractis quadratos facit $\frac{1089}{64}$. $\frac{225}{64}$. $\frac{1}{64}$. quorum latera $\frac{33}{8}$. $\frac{15}{8}$. $\frac{1}{8}$.

Eodem prorsus artificio soluetur quæstio sequens, quæ & hic desiderari videtur.

Inuenire tres numeros, vt qui sub iis continetur solidus detractus à quolibet ipsorum quadratum relinquat.

Esto primus 1 N. solidus autem 1 N. − 1 Q. vt detractus à primo quadratum relinquat. Iam solido per primum diuiso, fiet 1 − 1 N. productus ex secundo in tertium. Ponatur secundus 1. erit tertius 1 − 1 N. superest vt ab vtroque detrahendo solidum 1 N. − 1 Q. superlint quadrati, & remanent 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. + 1 − 2 N. vterque igitur horum æquatur quadrato. Eorum interuallum est 1 N. quod fit ex 2 N. in $\frac{1}{2}$. Quare horum summæ semissis quadratus, puta 1 Q. + $\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{16}$. æquatur 1. Q. + 1 − 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{15}{8}$. tantus est primus, secundus 1. tertius $\frac{3}{8}$. & soluunt quæstionem. Nam solidus sub ipsis contentus est $\frac{225}{64}$ qui à quolibet sigillatim detractus relinquit quadratus $\frac{169}{64}$. $\frac{49}{64}$. $\frac{9}{64}$.

QVAESTIO XXV.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ⁊ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον πρὸς πλευράν. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ ς̄.

DATVM numerum diuidere in duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione sit cubus suo multatus

latere. Esto datus 6. Ponatur primus 1 N. relinquitur ergo secundus 6 — 1 N. Superest vt productus eorũ multiplicatione sit cubus suo multatus latere. Est autem hic productus 6 N. — 1 Q. Hunc ergo æquari oportet cubo cui suum desit latus. Formo cubum à numeris quotlibet cum defectu vnitatis, esto à 2 N. — 1. huius cubus latere detracto fit 8 C. + 4 N. — 12 Q. Hæc æquantur 6 N. — 1 Q. & si numeri vtrimque multitudine æquales essent, restarent cubi æquales quadratis, & rationali numero exprimeretur solutio. At 4 N. proficiscuntur ab excessu ex ter 2 N. supra 2 N. & si ter 2 N. amittãt 2 N. fiunt vtique bis 2 N. At verò 6. dantur ex hypothesi. Eò itaque redactus sum vt inueniam loco 2 N. aliquem numerum cuius duplum faciat 6. Est autem 3. huiusmodi numerus. Quærens ergo 6 N. — 1 Q. æquales cubo cui suum latus deest, statuo cubi latus 3 N. — 1. & huius cubus latere ipso multatus facit 27 C. + 6 N. — 27 Q. quod æquatur 6 N. — 1 Q. & fit 1 N. $\frac{7}{26}$. Ad positiones, erit primus $\frac{27}{26}$. At secundus $\frac{216}{676}$.

τιτάχθω ὁ πρῶτος ἀριθμοῦ α̅ λεῖπος ἄρα ὁ δεύτερος ἔσται μ̅ ϛ̅ λείψει ς̅ α̅. λοιπὸν δὴ ἵνα τὸν ὑπ' αὐτῶν, κύβον φησὶ πλευράν. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν ἐστιν ἀριθμῶν ϛ̅ λείψει δ̅ α̅ γραμμαῖς ἴσοις κύβῳ φησὶ πλευρᾶν. πλάσσω κύβον ἀπὸ ἑξῆς ὅσων δὴ ποτε λείψει μ̅ ὦσι ἔστω δὴ ἀπὸ ϛ̅ β̅ τ μ̅ α̅. ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κ̅ ἢ ἀριθμὸς δ̅ τ δ̅ ιβ̅. ταῦτα ἴσα ϛ̅ λείψει δ̅ α̅. καὶ εἰ ἦσαν οἱ ϛ̅ ἐν ἑκατέρᾳ τῇ ἰσώσει ἴσοι, λοιπὸν ἐγίνετο ἰσῶσαι κύβους δυσὶ ἀμοίροις, ὃ ὁ ἐμὸς φησὶ βιβλίος. ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ δ̅. ἐν τῇ ὑποχῇ εἰσιν ὑπὲρ ϛ̅ δύο τουτέστιν ἐν τῷ τρὶς τοῦ β̅ ϛ̅. ἐὰν τρὶς οἱ δύο ἀριθμοὶ λείψωσι ϛ̅ β̅. πεῖσαι δὲ τοὺς ἀριθμοὺς β̅. οἱ δὲ ϛ̅. τυχόντες εἰσὶ καὶ τῶν ὑποκειμένων. ἁπτέται οὖν μοι δίρεσις πρὸς ἃ, ὡς τοὺς ἀριθμοὺς β̅. δεῖ δὲ γράφοντας ποιεῖ ϛ̅. δεῖ δὲ ὁ γ̅. ζητῶ οὖν ϛ̅ τ δ̅ α̅. ἴσους κύβῳ φησὶ πλευράν. τοῦτον τὸν κύβον πλευρὰν ἀπὸ ϛ̅ γ̅ τ μ̅ α̅. καὶ ὁ ἀπὸ τούτου κύβος λείψας αὐτὸν ποιεῖ κ̅ ϛ̅ ϛ̅ τ δ̅ κ̅ζ̅ ἴσους ϛ̅ τ δ̅ α̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ̅ ιϛ̅. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κϛ̅ ιϛ̅. ὁ δὲ δεύτερος ρλϛ̅ ιϛ̅.

IN QVAESTIONEM XXV.

ARTIFICIOSE Diophantus vt æquet 6 N. — 1 Q. cubo multato suo latere, fingit cubum à 3 N. — 1. vt in cubo illius contineatur — 1. quod aboleatur detractatione lateris, in quo etiam — 1. positum est. At Numeri aboleantur per Numeros qui sunt ex altera æquationis parte, & sic remaneat æqualitas inter cubos & quadratos. Vt autem in cubo multato suo latere reperiantur 6 N. cùm ex formatione cubi tradita ad primam huius constet numerum Numerorum in cubo contentorum triplum fore numeri Numerorum positorum in latere, quia in latere cum Numeris ponitur vnitas; oportet vtique talem poni in latere numerum Numerorum, à cuius triplo auferendo ipsum numerum, supersit 6. sed à triplo alicuius numeri auferendo ipsum numerum, supereſt duplum eiusdem numeri. Igitur rectè concludit Diophantus ponendum in latere cubi, numerum Numerorum, cuius duplum sit 6. hoc est 3. Itaque nulla hic solutionum varietas accidit, cùm per hujusmodi operationem vnica duntaxat reperiri possit solutio. Verùm inde formatur Canon satis expeditus.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate multatum diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Quare huius subtractione à dato numero, habebis secundum. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

Eodem quoque artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire duos numeros dato interuallo differentes, vt productus eorum multiplicatione sit cubus suo multatus latere.

Sit datum interuallum 6.

Ponatur primus 1 N. secundus 6 + 1 N. erit productus 6 N. + 1 Q. qui æquandus est cubo multato suo latere, qui ob causam supra traditam fingi debet à latere 3 N. — 1. fietque cubus suo latere multatus 27 C. + 6 N. — 27 Q. æqualis 6 N. + 1 Q. & fit 1 N. $\frac{7}{26}$. tantus est primus. Secundus autem $\frac{217}{26}$. & soluunt quæstionem, nam productus eorum multiplicatione $\frac{1519}{676}$. est cubus $\frac{1331}{4096}$. multatus suo latere $\frac{91}{64}$. Hinc fit Canon.

Dodrantem quadrati dati numeri vnitate auctum, diuide per octantem cubi eiusdem, orietur primus quæsitorum. Cui addendo datum interuallum, fiet secundus. Porrò productus ex primo in semissem dati numeri vnitate multatus, est latus cubi quæsiti.

QVÆSTIO XXVI.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ποιῇ κύβον, καὶ ἡ πλευρὰ ἡ ἴση ταῖς ὑπεροχαῖς αὐτῶν συντιθέσας. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ δι. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς κύβος ἔστω κ̄ η̄. καὶ πλευρά ἐστι ς̄ β̄. ἀλλὰ ἡ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ, καὶ ἡ τοῦ τρίτου καὶ δευτέρου ὑπεροχὴ, καὶ ἔτι τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου δίς ἐστι ὑπεροχὴ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ πρώτου. τουτέστι ἐὰν ὦσι ἀριθμοὶ τρεῖς ἄνισοι, ἡ τῶν τριῶν ὑπεροχὴ διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς τῶν ἄκρων. ἔχομεν δ' ἐν τῇ ὑποστάσει καὶ πλευρᾶς τοῦ κύβου ς̄ β̄. δεῖ ἄρα τοὺς ς̄ β̄ τῶν τριῶν ὑπεροχὴν εἶναι, ὁ τρίτος ἄρα τοῦ πρώτου ὑπερέχει ς̄ ᾱ. ἔστω ὁ πρῶτος ς̄ β. ἢ ὅσων δήποτε, ὁ τρίτος ἔσται ἄρα ς̄ γ̄. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τριῶν στερεὸς ἔστω κ̄ η̄. ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δ̄ ς̄. λοιπὸς ἄρα ὁ δευτερος ἴσται ς̄ ᾱ. ᾱ γ̄. καὶ εἰ μὲν ἴσων ὁ δευτερος τοῦ πρώτου μείζων ἐλάσσων ἢ τοῦ τρίτου, λελιωμένοι ἂν ἴσων τὸ ζητούμενον. ἀλλ' ὁ δεύτερος ἠγένετο ἐκ τοῦ ἐπὶ μειωθῆναι εἰς τὸ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου. ἀλλ' ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος οὐκ εἰσὶ τυχόντες, ἀλλὰ μονάδι διαφέροντες. ἀπῄρηται οὖν μοι εἰς τὸ δοθὲν δύο ἀριθμοὺς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας, ὅπως ὁ ἐπὶ μειζόμενος εἰς τὸ ὑπ' αὐτῶν ποιῇ πνα, ὃς τοῦ μὴ ἐλάσσονος μείζων ᾖ, τοῦ δὲ μείζονος ἐλάσσων τετάχθω ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς ᾱ. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς̄ α μ̄ ᾱ. καὶ τὸν ᾱ ἐὰν μερίσω εἰς τὸ ὑπ' αὐτῶν, τουτέστιν εἰς δ̄ ᾱ ς̄ ᾱ. δοθήσεται ὁ μέσος μ̄ η̄ μορίῳ δ̄ ᾱ ς̄ ᾱ. θέλομεν δὲ τὸν μείζονα μὴ εἶναι ς̄ ᾱ. ἐλάσσονα δὲ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. ὥστε ὁ δεύτερος μιᾶς μονάδος μείζων ἐστὶ τοῦ πρώτου. ἀλλ' ὁ δεύτερος προσλαβὼν τὴν μονάδα ἐξαλυθεὶς εἰς τὴν δύναμιν ᾱ. γίνεται δ̄ ᾱ ς̄ ᾱ μ̄ η̄. μορίου δ̄ ᾱ. ς̄ ᾱ ὥστε ταῦτα μείζονά ἐστι ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. καὶ πάντα δεῖ τὸ μόριον δ̄ ᾱ ς̄ ᾱ μ̄ η̄. μείζονά εἶναι κ̄ ᾱ. δ̄ β ς̄ ᾱ καὶ ὅπου ὁμοίων ὅμοια, γίνονται μ̄ η̄ μείζονες κ̄ ᾱ δ̄ ᾱ. πλάσω κύβον ὃς ἔχει κύβου ᾱ. δύναμιν ᾱ ἴσην ἄρα ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ ᾱ. ἀλλ' ἐπεὶ μ̄ η̄ μείζων εἰσὶ κύβῳ ᾱ δ̄ ᾱ. ἐστὶ δὲ ὁ ὑπὸ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ ᾱ. κύβος μείζων κ̄ ἑνὸς δ̄ ᾱ. ἐστὶ ἰσώσαι τὰς πλευράς, τουτέστι μ̄ β̄. ἴσας ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ ᾱ. γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ᾱ ᾱ. ἐστὶ τοῦ ὑποστάσεως.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, è quibus ortus solidus sit cubus latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant. Esto datus 4. & quia solidus sub tribus contentus est cubus, esto 8 C. cuius latus 2 N. Iam interuallum primi & secundi, & interuallum secundi & tertij, itemque interuallum primi & tertij, duplum faciunt interualli primi & tertij. Hoc est. Si fuerint numeri tres inæquales, trium interualla sunt duplum interualli extremorum. Habemus autem in positione lateris cubi 2 N. Quare oportet 2 N. æquari summæ interuallorum. Proinde interuallum tertij supra primum est 1 N. Esto primus numerorum quotlibet, puta 2 N. erit ergo tertius 3 N. Et quia solidus ex tribus ortus, est 8 C. at productus ex primo in tertium est 6 Q. erit vtique secundus 1 $\frac{1}{6}$ N. Hoc loco si secundus tertio minor, maior primo extitisset soluta erat quæstio. Sed secundus prodiit diuiso 8 per productum ex primo in tertium. Primus autem & tertius non sunt temerè sumpti, sed vnitate differentes. Eò itaque deuenimus, vt quærendi sint duo numeri vnitate differentes, vt diuiso 8. per productum multiplicationis eorum, fiat quotiens minore illorum maior, & maiore minor. Ponatur minor 1 N. maior erit 1 N. + 1 & si diuidam 8. per productum multiplicationis eorum quod est 1 Q. + 1 N. fiet medius $\frac{8}{1\text{ Q.} + 1\text{ N.}}$. Volumus autem hunc maiorem quidem esse quàm 1 N. minorem verò quam 1 N. + 1. Cùm igitur horum interuallum sit 1. erit interuallum primi & secundi vnitate minus, ideoque secundus addita vnitate maior erit primo. Atqui secundus adscita vnitate, & resolutus in minutiam, cuius denominator 1 Q. + 1 N. fit $\frac{8}{1\text{ Q.} + 1\text{ N.}} + 1$. Hoc ergo maius est quam 1 N. + 1. & omnibus per denominatorem multiplicatis fit 1 Q. + 1 N. + 8. maior quam 1 C. + 2 Q. + 1 N. Auferantur similia à similibus, relinquitur 8. maior quàm 1 C. + 1 Q. Formo cu-

bum

bum in quo ſit 1 C. + 1 Q. erit vtique latus eius 1 N. + ½. & quoniam 8. maius ſunt quàm 1 C. + 1 Q. Cubus quoque à latere 1 N. + ½ maior eſt quàm 1 C. + 1 Q. ſi æquemus latera, nempe 2. & 1 N. + ½. fiet 1 N. ½. Ad poſitiones. Erit primus ⅝. ſecundus ⅜. tertius ⅝. & omnibus per 15. multiplicatis. Erit primus 40. ſecundus 27. tertius 25. Communis enim denominator hic abiicitur, & inuenti ſunt tres numeri, quorum ex multiplicatione ortus ſolidus, eſt cubus latus habens ſummam interuallorum ipſorum. Pono ergo primum 40 N. ſecundum 27 N. tertium 25 N. & eſt ſolidus ſub ipſis contentus cubus cuius latus æquatur interuallis ipſorum ſimul junctis. Volo autem trium ſummam æquari dato numero 4. Igitur 92 N. æquantur 4. & ſit 1 N. 4/92. Ad poſitiones. Erit primus 40/92. ſecundus 27/92. tertius 25/92.

ος. ἔσαι ὁ πρῶτος μ̄ γ̄. ὁ δεύτερος κ̄ζ̄. ὁ τρίτος κ̄ε̄. καὶ ἡ πέντε εἰς πεντεκαίδεκα. ἔσαι ὁ πρῶτος μ̄. ὁ δεύτερος κ̄ζ̄. ὁ τρίτος κ̄ε̄. καιὸν γὰρ ἦλθε τὸ ιε̄ μέσον, καὶ ὑπεμφύσι εἰσὶν ἓξ ἐξῆς ες''. ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς ἢ κύβος πλευρὰν ἔχων τὰς ὑποτεινούσας αὐτὴν συντιθείσας. τέσσαρσι τοίνυν τοῖς μὲν πρώτοις ἐξ μ̄. τὸν δὲ δεύτερον ἐξ κ̄ζ̄. τὸν δὲ τρίτον ἐξ κ̄ε̄. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τεσσάρων στερεὸς κύβος, ἧς πλευρὰ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑποτεινούσαις αὐτὴν συντιθείσαις. θέλω δὲ τὰς ἐξῆς ἴσας εἶναι δοθείσῃ μονάσι. ἐτέθησαν γ̄ μ̄ δ̄. ἀριθμοὶ ἄρα ἁπ̄ ἴσοι μ̄ δ̄. ἕ γίνεται ὁ ς̄ ᾱ ''. δεῖ τὰς ὑποτεινούσας. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος μ̄ ''. ὁ δὲ δεύτερος κ̄ζ̄ ''. ὁ δὲ τρίτος κ̄ε̄ ''.

IN QVAESTIONEM XXVI.

QVÆRENS Diophantus tres numeros quorum ſumma ſit 4. Ita vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus latus habens ſummam interuallorum quibus bini inter ſe diſtant, ſeu quod idem eſt, latus habens duplum interualli maximi & minimi, primùm quærit in vniuerſum tres numeros reliquis propoſiti partibus ſatisfacientes nulla habita ratione ſummæ quàm conficiunt, his enim inuentis, puta 40 27. 25. Iam ſtatuit quæſitos numeros 40 N. 27 N. 25 N. quorum ſummam 92 N. æqualem faciendo ipſi 4. ſoluit quæſtionem propoſitam. Itaque totum negotium in eo conſiſtit vt inueniantur tres numeri, vt ſolidus ſub ipſis contentus ſit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi. Ponatur ſolidus ille quilibet cuborum numerus cubicus, puta 8 C. Cùm ergo illius latus ſit 2 N. patet hoc eſſe duplum interualli maximi & minimi, quare ipſum interuallum maximi & minimi erit 1 N. Ponendi ergo ſunt maximus & minimus certi numerorum numeri vnitate diſtantes, ſed quia per eorum productum diuidendo 8 C. ſolidum, debet oriri medius qui minimo maior eſſe debet, & minor maximo, apparet neceſſitas aſſumpti lemmatis, quo quæruntur duo numeri vnitate diſtantes per quorum productum diuidendo 8. fiat quotiens minore maior, & minor maiore. In huius autem lemmatis enodatione quantum à ſcopo aberrarit Xilander, qui eius commentarios legerit, facilè intelliget. Nobis non vacat in refellendis inanibus illius coniecturis diutius immorari, quibus propoſitum eſt Diophantum explicare, non aliorum errata omnia perſequi. Ponuntur ergo quæſiti numeri 1 N. & 1 N. + 1. fitque productus eorum multiplicatione 1 Q. + 1 N. per quem diuidendo 8. fit quotiens $\frac{8}{1Q+1N}$ qui debet eſſe maior quàm 1 N. minor quàm 1 N. + 1. Hic ſi quis aſſerat Diophantum non ſatis accuratè rem perſequi (niſi quid ex illius verbis exciderit) non falletur, vt puto. Nam vt vtrumque quod inſtat, ritè procuretur, omnia reducendo ad eandem denominationem patet 8. maiorem eſſe debere quàm 1 C. + 1 Q. minorem autem quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. & primum quidem ſollicitè cauet Diophantus, poſtremum verò negligit omnino. Atqui ſi hoc neglecto ad illud tantùm reſpiciamus, ſæpè in abſurdum deueniemus. Nam verbi gratia vt 8. ſit maior quàm 1 C. + 1 Q. ſufficit ſi æquemus 8. alicui cubo maiori quàm 1 C. + 1 Q. dum is non ſit maior quàm 8. At talis eſt 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1 Huic ergo æquemus 8. & latus lateri comparantes fient 2. æquales 1 N. + 1. & erit 1 N. 1. Quare quæſiti numeri erunt 1. & 2. quod eſt abſurdum, nam per eorum productum 2. ſi diuidas 8. fiet 4. qui maior eſt vtroque, cùm deberet eſſe maior minimo, minor maximo. Non ſufficit igitur vt cubus cui æquatur 8. ſit maior quàm 1 C. + 1 Q. ſed oportet ſimul vt ſit minor quàm 1 C. + 2 Q. + 1 N. Hoc vt arte certa conſequamur fingemus cubũ in quo præter 1 C. contineatur 1 Q & aliquid amplius, quod tamen non æquet 2 Q. Quare cum latus cubi ponendum ſit 1 N. + aliquot vnitatibus, ac proinde quadratorum numerus in cubo contentorum ſit triplum illarum vnitatum, patet in latere ponendas tot vnitates, vt earum triplum ſit minus quàm 2. ſed non minus quàm 1. Quare vtriuſque trientem ſumentes concludemus, fingendum latus cubi 1 N. + . tot vnitatibus quæ ſint minus quàm ⅔ ſed non minus quàm ½. ſic Diophantus poſuit huiuſmodi latus 1 N. + ⅝ quod æquans lateri ipſius 8. puta 2. inuenit valorem Numeri ⅝. & ſi fingas latus 1 N. + ½. hoc æquabitur 2. & fiet

1 N. $\frac{1}{3}$. Erunt ergo quæsiti duo numeri $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$. quorum productus $\frac{1}{12}$ per quem diuidendo 8. fit medius $\frac{2}{3}$. tres enim $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. satisfaciunt proposito, hoc est solidus sub ipsis contentus, est cubus latus habens summam interuallorum quibus bini inter se distant, & omnia reducendo ad integros, fient 45. 64. 75. per quos si velis soluere quæstionem propositam, pones quæsitos Numeros 45 N. 64 N. 75 N. horum summa 184 N. æquatur 4. & fit 1 N. $\frac{1}{46}$ sunt ergo quæsiti Numeri $\frac{45}{46}$. $\frac{64}{46}$. $\frac{75}{46}$.

Itaque vt compendiosissimè propositum lemma perficiatur, cùm fiat valor Numeri auferendo à binario vnitates positas in latere fictitio cubi, & ostensum sit vnitates illas minores esse debere quàm $\frac{2}{3}$ non minores quàm $\frac{1}{2}$. his autem à binario detractis, supersint $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{2}$. patet valorem Numeri maiorem esse debere quàm $\frac{4}{3}$ non maiorem quàm $\frac{1}{2}$. sic sumi poterunt pro valore Numeri $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. & alij infiniti. Vnde constat allucinari Xilandrum, cùm asserit valorem numeri esse posse $\frac{1}{2}$. nam is cadit extra limites constitutos, eumque proposito non satisfacere senties experiendo.

Restat videndum cur Diophantus loco ipsorum $\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$. sumat ipsos 40. 27. 25. in iisdem rationibus. Quod ne cui scrupulum moueat, demonstrabitur hoc Theoremate.

Si fuerint tres numeri, ita vt solidus sub ipsis contentus, sit cubus latus habens duplum interualli maximi & minimi, & tres alij quicunque in iisdem rationibus idem præstabunt.

F 27000.
D 30. E 15.
A 40. B. 27. C 25.
G 80. H 54. K 50.
L 60. M 30.
P 216000.

Sint tres A B C. & interuallum extremorum esto E. cuius duplum D. At solidus sub ipsis A B C. esto F cubus, cuius latus sit D. & sumantur tres G H K in iisdem rationibus cum ipsis A B C. & sit extremorum interuallum M. cuius duplum L. & solidus sub ipsis G H K esto P. dico P. esse cubum cuius latus est L. Etenim cùm latera A B C. G H K sint proportionalia, erunt solidi F P similes ex definitione. Quare [1] habebunt inter se rationem cubi ad cubum, ac proinde cùm F sit cubus, [2] erit & P cubus. Quoniam verò ex hypothesi est A ad C. vt G ad K. erit diuidendo E ad C. vt M ad K. ac proinde erit D, duplus ipsius E, ad C; sicut L. duplus ipsius M. ad K, & permutando erit D ad L vt C ad K. Atqui solidi similes F P [3] sunt in triplicata ratione laterum C K. & similiter cubi F P. [4] sunt in triplicata ratione lateris D ad latus ipsius P. Igitur est C ad K. sicut D ad latus cubi P. sed vt C ad K. sic est D ad L. vt ostensum est. Igitur L est latus cubi P. Quod erat demonstrandum.

[1] 27 Octaui.
[2] 25 Octaui.
[3] 19 Octaui.
[4] 12 Octaui.

Cæterùm eodem artificio soluetur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt solidus sub ipsis contentus sit cubus, latus habens summam interuallorum, quibus bini inter se distant, ipsa autem summa interuallorum sit datus numerus.

Esto summa interuallorum 15. Quærentur vt prius tres numeri, ita vt solidus sub ipsis contentus sit cubus summæ interuallorum, & inuenientur 40. 27. 25. Quare ponentur quæsiti 40 N. 27 N. 25 N. & fit summa interuallorum 30 N. æqualis 15. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt igitur quæsiti numeri $\frac{40}{2}$ $\frac{27}{2}$ $\frac{25}{2}$.

QVÆSTIO XXVII.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ἑκάτερον ποιῇ κύβον. τάσσω τὸν πρῶτον ἀπὸ κυβικῶν ςξ̄. ἔστω δὲ ςξ̄ ᾱ. ὁ δεύτερον δεῖ ᾱ γ μ̄ ᾱ. ὁ συμφωνῆ μοι ἡ ὑπόταγμα. ὁ γὰρ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ὁ πρῶτον ποιεῖ κύβον. λοιπὸν δεῖ ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβόντα τὸν δεύτερον ποιεῖν κύβον. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν ὁ δεύτερον ποιεῖ κύβους β̄ δύναμιν, ᾱ λείψει ςξ̄ β̄ ἴσους κύβῳ. πλάσσω ὁ κύβον ἀπὸ ἀριθμοῦ β̄ λείψει μ̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιδ̄ ιγ̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ριβ̄ ιγ̄. ὁ δὲ δεύτερος κζ̄ ιγ̄.

INVENIRE duos numeros, vt productus ex eorum multiplicatione vtrolibet adiecto faciat cubum. Pono primum, aliquot numerorum cubicorum, puta 8 N. secundum verò 1 Q. — 1. Ita alteri postulatorum satisfit. Nam productus eorum multiplicatione adscito primo, facit cubum. Restat vt idem productus adscito secundo faciat cubum. Sed productus ille adscito secundo facit 8 C. + 1 Q. — 8 N. — 1. hæc ergo æquantur cubo. Formo cubum à 2 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{12}{11}$. Ad positiones. erit primus $\frac{11}{11}$. secundus $\frac{17}{121}$.

IN QVAESTIONEM XXVII.

NVMERI cubo æquandi 8 C. + 1 Q. — 8 N. — 1. latus ingeniosè fingitur 2 N. — 1. vt cubo vtriusque partis elidantur 8 C. — 1. & remaneat æqualitas inter Numeros & quadratos. Cæterùm positiones diuersis modis institui possunt. Nam primus quæsitorum poni potest quilibet Numerorum numerus siue cubicus, siue non, dum secundus statuatur certus quadratorum numerus —

1. ita tamen vt ex primo in quadratos ſecundi fiat numerus cubus, ita ſi ponatur primus 4 N. ponetur ſecundus 2 Q. − 1. fitque productus 8 C. − 4 N. qui adſcito primo cubum facit. Reſtat ergo vt idem productus adſcito ſecundo cubum faciat, facit autem 8 C. + 2 Q. − 4 N. − 1. Hoc ergo cubo æquatur, cuius latus fingetur 2 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{1}{7}$. erunt ergo quæſiti numeri $\frac{15}{7}$ & $\frac{1}{15}$. qui ſoluunt quæſtionem, nam eorum productus $\frac{15}{11}$, vtroque adſcito cubos facit $\frac{3375}{1331}$ & $\frac{27}{1331}$. Verùm aduerte talem ſtatuendum eſſe Numerorum numerum pro primo, vt ſit maior vel æqualis numero quadratorum qui ponitur in ſecundo, nam ſi ponatur minor, æquatio quidem ritè procedet, ſed valorem Numeri applicando poſitionibus, ſecundus inuenietur nihil, vel minor nihilo. Ita ſi ponas primum 2 N. ſecundum 4 Q. − 1. erit productus 8 C. − 2 N. qui adſcito primo cubum facit. At idem productus adſcito ſecundo facit 8 C. + 4 Q. − 2 N. − 1. æqualem cubo à latere 2 N. − 1. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare ſecundus inuenitur nihil. At ſi ponas primum 8 N. ſecundum 8 Q. − 1. fiet tandem 64 C. + 8 Q. − 8 N. − 1. æqualis cubo à latere 4 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{1}{4}$ eruntque quæſiti numeri qui ſuprà $\frac{15}{7}$ & $\frac{1}{15}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, vtrolibet detracto faciat cubum. Vt prius ponatur primus 8 N. ſecundus autem 1 Q. + 1. & productus eorum multiplicatione, dempto primo fit cubus; ſed idem productus dempto ſecundo facit 8 C. + 8 N. − 1 Q. − 1. Hoc æquatur cubo, & eſt impoſſibile. Statuo ergo rurſus primum, numerorum cubicorum aliquot addita vnitate, puta, 8 N. + 1. ſecundum autem 1 Q. & productus eorum multiplicatione dempto ſecundo fit cubus; ſed dempto primo fit 8 C. + 1 Q. − 8 N. − 1. Hæc æquantur cubo à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{2}{11}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{120}{11}$. ſecundus $\frac{225}{121}$.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας ἑκάτερον, ποιῇ κύβον. ὁμοίως ὁ πρῶτος τετάχθω κυβικῶν ς̄ ā. ὁ δὲ δεύτερος δ̄ ā μ̄ ā γίνεται ὁ ὑπ' αὐτ̄ λείψας τ̀ πρῶτον, κύβος, ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τ̀ δεύτερον ποιεῖ κ̄ ā ς̄ ā ā γ δ̄ ā μ̄ ā. ταῦτα ἴσα κύβῳ. καὶ ἔστιν ἀδύνατον. τάττω τοίνυν πάλιν τ̀ πρῶτον κυβικῶν ς̄ μ̄ μ̄ ā. ἔστω ς̄ ā μ̄ ā. τ̀ δὲ δεύτερον δ̄ ā. ὁ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας τ̀ δεύτερον, κύβος, ἀλλὰ λείψας τ̀ πρῶτον ποιεῖ κ̄ ā δ̄ ā λείψει ς̄ ā μ̄ ā. ταῦτα ἴσα κύβῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ β γ μ̄ ā. ὁ γίνεται ὁ ς̄ ιδ̄ ῑᾱ. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ρκδ̄ ῑᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ρ̄ϛ̄ ῑᾱ.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

TEXTVS lacunas malè cùm repleuiſſet Xilander, non mirum eſt ſi Diophanti mentem minimè aſſequutus eſt. Attamen ſatis apparet Diophantum primò voluiſſe imitari operationem præcedentis quæſtionis. Quemadmodum enim poſuerat ibi primum 8 N. ſecundum 1 Q − 1 vt producto 8 C. − 8 N. addendo primum fieret cubus. Ita hîc ponere voluit primum 8 N. ſecundum 1 Q. + 1. vt à producto 8 C. + 8 N. detrahendo primùm, cubus ſupereſſet. Verùm ab eodem producto auferendo ſecundum relinquebatur 8 C. + 8 N. − 1 Q. − 1. quod eſt impoſſibile cubo æquari, nam is cubus non poteſt fingi niſi à latere 2 N. − 1. vt tollantur cubi & vnitates. Quare hac æquatione tandem 11 Q. + 2 N. remanent æquales nihilo. Idcirco vt hoc incommodum vitetur aliter inſtituendæ ſunt poſitiones, & primus ponendus eſt 8 N. + 1. ſecundus 1 Q. reſque optimè ſuccedit.

Cæterùm infinitis alijs modis inſtitui poſſunt poſitiones, dum primus ponatur quilibet numerus Numerorum + 1. & ſecundus quilibet Quadratorum numerus, qui ductus in numerum Numerorum primi, cubum faciat. Ita ſi ponas primum 4 N. + 1. ſecundum 2 Q. erit productus 8 C. + 2 Q. qui multatus ſecundo, cubum relinquit. At multatus primo, manet 8 C. + 2 Q. − 4 N. − 1. qui æquabitur cubo à latere 2 N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. Erunt ergo quæſiti numeri $\frac{3}{2}$ & $\frac{15}{2}$ qui ſoluunt quæſtionem, nam productus fit $\frac{3375}{121}$. Vnde auferendo ipſos numeros, remanent cubi $\frac{27}{121}$ & $\frac{3375}{121}$. Sed hîc etiam aduerte talem ſtatuendum Numerorum numerum in primo, vt ſit æqualis vel maior numero quadratorum qui ponitur pro ſecundo. Alioquin ſi ponatur minor, non poterit à producto detrahi vterque numerus. Ita ſi ponas primum 8 N. + 1. ſecundum 8 Q. res bene ſuccedet, nam erit productus 64 C. + 8 Q. qui multatus ſecundo cubum relinquit, at multatus primo, remanet 64 C. + 8 Q. − 8 N. − 1. æqualis cubo à latere 4 N. − 1. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. Sunt ergo quæſiti numeri qui ſuprà $\frac{3}{2}$ & $\frac{15}{2}$. Sed ſi ponas primum 2 N. + 1. ſecundum 4 Q. erit productus 8 C. + 4 Q. qui detracto

secundo cubum relinquit, at primo detracto, relinquit 8 C. + 4 Q. − 2 N. = 1. æqualem cubo, à latere 2 N. − 1. & fit 1 N. ½. suntque quæsiti numeri 2. & 1. à quorum producto si primum auferas, nihil remanet.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν καί τι συναμφότερον συναμφότερον, καί τι λεῖψη ποιῇ κύβον. ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν συναμφοτέρων ποιεῖ κύβον ποιείτω μ^ον ξδ^ον. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερον, ποιεῖ κύβον, ποιείτω μ^ον η^ον. δὶς ἄρα συναμφότερον ποιεῖ αὐτῶν τὸν ὑπερέχοντα, ἴσα μ^ον νς^ον. ὥστε συναμφοτέρων ἴσα μ^ον κη^ον. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρων ποιεῖ μ^ον ξδ^ον. λοιπὸς ἄρα ὁ ὑπ' αὐτῶν ἴσα μ^ον λς^ον. ἀπῆκται οὖν μοι εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, οὗ συντιθέντες ποιῶσι μ^ον κη^ον. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν ὅζι μ^ον λς^ον. πεπάχθω ὁ μείζων ς^ον α^ον μ^ον ιδ^ον. ὁ ἄρα ἐλάσσων ἔσται μ^ον ιδ^ον. λείψει ς^ον α^ον. λοιπὸν ὅζι τὸν ὑπ' αὐτῶν τουτέστι μ^ον ρκς^ον λείψει δυνάμεως α^ον. ἰσωθήσομαι μ^ον λς^ον. καὶ γίνεται δ^ον α^ον ἴσοι μ^ον ρξ^ον. καὶ εἰ ἦσαν μονάδες ρξ^ον τετραγωνικαὶ, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ἀλλ' αἱ μ^ον ρξ^ον. ὑπερέχει δὲ ἡ ὑπερέχουσα μ^ον ρκς^ον τοὺς λς^ον. ἀλλ' αἱ μ^ον ρκς^ον ἀπὸ μ^ον ιδ^ον ὅζι τετράγωνος. ὁ δὲ ιδ^ον ἥμισύ ὅζι τοῦ κη^ον. ὥστε τὰ ρκς^ον τὸ ἥμισύ ὅζι τοῦ κη^ον ἐφ' ἑαυτό. ἀλλ' ὁ κη^ον ἥμισύ ὅζι τοῦ νς^ον. ἀλλ' ὁ νς^ον δύο κύβων ὅζι ὑπερέχει τῶν ξδ^ον καὶ τῶν η^ον. ὁ δὲ λς^ον συναμφοτέρων ὅζι τοῦ κύβου τὸ ἥμισυ. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ εὑρεῖν δύο κύβους ὅπως τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τὸ τέταρτον, ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον, καὶ λεῖψας συναμφοτέρων τὸ ἥμισυ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ἡ τοῦ μείζονος κύβου πλευρὰ ς^ον α^ον μ^ον α^ον. ἡ τοῦ ἐλάσσονος ς^ον α^ον γ^ον μ^ον α^ον. ⟨καὶ γίνονται⟩ οἱ κύβοι ὁ μὲν μείζων κ^ος α^ον δ^ος γ^ον ις^ος γ^ον μ^ον α^ον. ὁ δὲ ἐλάσσων κ^ος α^ον ις^ος γ^ον λεῖψις δ^ος γ^ον μ^ον α^ον. καὶ δ' τούτων ὑπεροχῆς τὸ τέταρτον δι^ον α^ον. α^ον ς^ον μ^ον α^ον ς^ον. ταῦτα ἐφ' ἑαυτὰ, γίνονται δυναμοδυνάμεις β^ον. α^ον δ^ος δ^ος α^ον. α^ον ς^ον μ^ον α^ον δ^ον. ταῦτα ἐστὶ λείψη συναμφοτέρων τῶν κύβων τὸ ἥμισυ, ὅπερ ὅζι κ^ος α^ον ις^ος γ^ον. λοιπὸν γίνονται δ^ος δ^ος β^ον. α^ον δ^ον δ^ος α^ον. α^ον ς^ον μ^ον α^ον δ^ον ⟨κ^ος α^ον ις^ος γ^ον⟩ ἵνα τετραγωνίσω. καὶ πάντα τετράκις διὰ τὸ μέσον γίνεται δ^ος δ^ος ϛ^ον δ^ος ς^ον μ^ον α^ον λείψει κ^ος δ^ον ις^ος ιβ^ον. ταῦτα ἵνα τετραγωνίσω ἀπὸ δυνάμεων τελῶν μ^ον α^ον ⟨ις^ος ς^ον⟩. αὐτὸς ἄρα ἔσται δ^ος δ^ος ϛ^ον δ^ος μβ^ον μ^ον α^ον λείψει κ^ος λς^ον ις^ος ιβ^ον ἴσον δυναμοδυνάμεσι ϛ^ον δ^ος ϛ^ον μ^ον α^ον ⟨κ^ος α^ον ις^ος ιβ^ον.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione, summa ipsorum siue addita, siue detracta cubum faciat. Quoniam productus eorum multiplicatione adsumens vtrumque facit cubum, faciat 64. Rursus quia idem productus vtroque detracto facit cubum, faciat 8. Itaque duplum summæ numerorum æquatur interuallo horum cuborum 56. Proinde summa numerorum est 28. sed productum multiplicationis cum summa facit 64. relinquitur ergo productum multiplicationis esse 36. Eo itaque loci deducta res est, vt inueniendi sint duo numeri, quorum summa sit 28. productum multiplicationis 36. Ponatur maior 1 N. + 14. Minor ergo erit 14 − 1 N. superest vt productum multiplicationis nimirum 196 − 1 Q. æquetur 36. & fit 1 Q. æqualis 160. & si vnitates 160. essent quadratæ, soluta esset quæstio. Sed 160. est excessus quo 196. superat 36. & 196. est quadratus ipsius 14. qui est semissis de 28. Quare 196 est semissis de 28. in se ductus. Atqui 28. est semissis ipsius 56. atque ideo 14. est quarta pars eiusdem 56. Cæterùm 56. est interuallum duorum cuborum 64. & 8. ipse verò 36. est summæ cuborum semissis. Itaque eo redactus sum vt inueniam duos cubos quorum interualli quadrans in se si ducatur, & ab hoc quadrato auferatur summæ cuborum semissis, fiat quadratus. Sit latus maioris cubi 1 N. + 1. minoris verò 1 N. − 1. & fiunt cubi maior quidem 1 C. + 3. Q. + 3 N. + 1. minor autem 1 C. + 3 N. − 3 Q. − 1. & horum interualli quadrans est 1 ½ Q. + ½ hoc in se ducto fiunt 2 ¼ QQ. + 1 ½ Q. + ¼. hinc si auferatur summæ cuborum semissis, nempè 1 C. + 3 N. relinquitur 2 ¼ QQ. + 1 ½ Q + ¼ − C. − 3 N. Hoc æquatur quadrato. Sed propter minutias, omnia quadruplicentur, fit 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. hæc quadrato æquantur à latere 3 Q. + 1 − 6 N. Ipse quadra-

tus est 9 QQ. + 42 Q. + 1 − 36 C. − 12 N. qui æquatur 9 QQ. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. Communis addatur defectus, & à similibus auferantur similia, relinquuntur 32 C. æquales 36 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{8}$. Ad positiones. Posueram latera cuborum, hoc quidem 1 N. + 1. illud verò 1 N. − 1. Erit ergo alterum $\frac{9}{8}$. alterum $\frac{7}{8}$. Ipsi ergo cubi erunt, primus quidem $\frac{729}{512}$. secundus autem $\frac{343}{512}$. venio ad id quod initio propositum erat, ac quæro quomodo dentur duo numeri, vt productus eorum multiplicatione cum vtriusque summa faciat $\frac{729}{512}$ & idem productus detracta eadem summa faciat $\frac{343}{512}$. Quoniam ergo productum multiplicationis additum summæ facit cubum $\frac{729}{512}$. & idem productum detracta summa facit cubum $\frac{343}{512}$. horum cuborum interuallum, nempè $\frac{386}{512}$. est vtique duplum summa. Ipsa igitur summa est $\frac{193}{512}$. sed productum multiplicationis cum summa facit $\frac{729}{512}$. & summa inuenta est $\frac{193}{512}$. erit igitur productum multiplicationis $\frac{93312}{262144}$. Quod reliquum est vt conficiatur demonstratum est libro primo, sed explicandæ causa quæstionis denuo ostendamus. Ponatur primus 1 N. cum semisse vnitatum quæ summam exprimunt, hoc est $\frac{192}{512}$. secundus erit $\frac{192}{512}$ − 1 N. & est summa illorum $\frac{384}{512}$. Sed productum multiplicationis est $\frac{147456}{262144}$. − Q. hoc ergo æquatur $\frac{93312}{262144}$ & omnia per denominatorem 262144. multiplicentur, & auferantur similia à similibus fiunt 262144. Q. æquales 250000. & fit 1 N. $\frac{25}{512}$. Ad positiones erit primus $\frac{153}{512}$. secundus $\frac{103}{512}$. & demonstratio est euidens.

κὴ καινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ὅσου ὁμοίων ὁμοίοις, καὶ λοιποὶ κ̄ᵒ λβ̄ ἴσοι δ̄ᵘ λ̄ς̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵒ Ϝ, ᾱ. δεῖ πᾶς ὑπὸς ἀσφς. ἵστασα πᾶς τὴν κύβου τὸ ἐλαχιστὸ ἑνὸς ς̄ᵒ ᾱ. ἡ δὲ ᾱ ᾱ. αὐτοὶ ἐσονται οἱ κύβοι ἴσονται ἑνὶ πρώτας δπλ̄ῑ̄ς̄. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ ῑ̄ς̄. ἤρχμεθα οὖν ὅθεν τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ζητῶ τὸν ὑπ' αὐτ̄ μεῖζ̄ συναμφοτέρου πιεῖν κύβοι τὸν δπλ̄ῑ̄ς̄. ἡ δὲ ὑπ' αὐτ̄ λείψασα συναμφότερον πιεῖν κύβους τὸν ᾱ ῑ̄ς̄. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν ὑπ' αὐτ̄ μεῖζ̄ συναμφοτέρου πιεῖ κύβον, τουτέστι μονάδις δπλ̄ῑ̄ς̄ ἐστὶν ὁ ὑπ' αὐτὴν λείψας συναμφότερον πιεῖ κύβοι, τουτέστι μονάδος ᾱ ῑ̄ς̄. ὁ δὲ ἔλαττα συναμφότερος ὄντα ἁπλᾶ ἡ ὑποχὴ, τουτέστι δπλ̄ῑ̄ς̄. ὥστε συναμφοτέρους ἴσται βυν̄ῑ̄ς̄. ἀλλ' ὁ ὑπ' αὐτὴν μὴ συναμφοτέρου ὄζει δπλ̄ῑ̄ς̄. ὧν συναμφοτέρῳ βυν̄ῑ̄ς̄. ἴσοι ἄρα ὁ ὑπ' αὐτὴν μ̄ᵒ βυν̄ζ̄ ῑ̄ς̄ ὃ προέδει δεῖξαι. αὐτὴ ἡ ἀπόδειξις ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ὃ νῦν ἠναγκάσθη διὰ τὸ προβλημα. πεπάχθω ὁ ἀριθμὸς ς̄ᵒ ᾱ καὶ μ̄ᵒ ϛ̄ ἡμισύτατε, ὧν οἱ συναμφότεροι, τουτέστι μ̄ᵒ ασκη̄ ῑ̄ς̄. ὁ δὲ ἕτερος ἴσται μονάδων ασκη̄ ῑ̄ς̄ λείψει ς̄ᵒ ᾱ. καὶ ὄζει ὁμοῦ συναμφότερος μ̄ᵒ βυν̄ῑ̄ς̄. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτὴν ὄζει μ̄ᵒ ρν̄. ζητῶ μερίσαι κε̄. βρμδ̄ λείψει δυνάμεως ᾱ. ταῦτα ἴσα μ̄ᵒ βυν̄ζ̄ ῑ̄ς̄. καὶ πάντα δεῖ μόρια τουτέστι κε̄. βρμδ̄. καὶ ὅσου ὁμοίων ὁμοῖα, γίνεται δ̄ᵘ κε̄. βρμδ̄ ἴσαι μ̄ᵒ μυρ. κε̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵒ μ̄ᵒ φ̄ ῑ̄ς̄. δεῖ πᾶς ὑπὸς ἀσφς. ἔσαι ὁ πρῶτος ᾱφκη̄ ῑ̄ς̄. ὁ δ' ἕτερος ψκη̄ ῑ̄ς̄. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

IN QVAESTIONEM XXIX.

HIc duo imprimis supponuntur à Diophanto.

Primùm interuallum cuborum qui fiunt addita & adempta summa numerorum producto multiplicationis ipsorum, esse duplum eiusdem summæ numerorum, quod facilè est demonstrare.

D 28. D 28.
A 8. B 36. C. 64.

Sit enim A cubus minor: C maior, & B productus multiplicatione quæsitorum numerorum, quorum summa D adempta ipsi B relinquat A, & addita eidem B. faciat C. dico interuallum cuborum C A esse duplum ipsius D. & patet, cùm enim interuallum duorum C B sit D. & duorum B A. interuallum sit rursus D. euidens est extremorum C A. interuallum esse duplum ipsius D. Quod erat propositum.

Secundò supponit Diophantus ipsum productum B. semissem esse summæ cuborum A C. quod etiam euidens est, cùm enim tres A B C. sint in medietate arithmetica ex hypothesi, ' erit medius B. semissis summæ extremorum. Quod erat intentum. Hinc apparet, quod ait Diophantus quærendos esse duos numeros, quorum summa sit D. productum B. Id autem fiet per trigesimam primi, cuius operationem hic repetit. Cum autem ex huiusmodi operatione, vel ex Canone inde eruto constet, vt quæstio solui possit oportere à quadrato semissis summæ auferendo productum, relinqui quadratum, sequitur oportere vt à quadrato semissis ipsius D. auferendo B. relinquatur quadratus. Atqui, vt ostensum est, D. est semissis interualli cuborum A C. ac proinde semissis ipsius D. est

' 5. 1. parif.

quadrans interualli eorundem cuborum ; & rursus , vt ostensum quoque est , B. est semissis summæ cuborum A C. Igitur euidenter colligitur necessitas lemmatis à Diophanto assumpti, quo quæruntur tales duo cubi , vt à quadrato quadrantis interualli eorum auferendo semissem summæ eorundem, relinquatur quadratus. In huius lemmatis explicatione multa occurrunt obseruanda.

Primò aduerte latera cuborum poni 1 N. + 1. & 1 N. − 1. vt cuborum tam summa quàm interuallum ex pauciſſimis constet speciebus. Nam horum laterum cubi prorsus similes sunt , nisi quod quadrati & vnitates deficiunt in cubo residui , cùm adsint in cubo binomij , sicut docuimus ad primam huius , cubi genesim explicantes. Vnde colligendo summam cuborum , cùm quadrati & vnitates ob signa contraria sese mutuò elidant , fit vt summa cuborum constet solùm ex cubis & Numeris , vt in hypothesi fit summa cuborum 2 C. + 6 N. similiter cuborum interuallum ex duabus tantùm componitur speciebus , ex quadratis scilicet , & vnitatibus quia cuborum & Numerorum iidem vtrimque reperiuntur numeri, sic in hypothesi est cuborum interuallum 6 Q. + 2. cuius quadratus est 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$.

Secundò aduerte quadratum huius quadrantis , necessariò esse trinomium constans ex quadrato quadratis , quadratis , & vnitatibus, vt colligere ex genesi quadrati quam tradidit Euclides quarta secundi. fit enim huiusmodi quadratus 2 $\frac{1}{2}$ Q Q. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$. Quare cùm ab hoc quadrato auferri debeat semissis summæ cuborum , qui constat , vt iam diximus , ex cubis & Numeris , necesse est hanc subtractionem fieri per signum defectus , cùm in dicto quadrato non reperiantur species eorundem nominum. Itaque fiet huiusmodi subductione qui nomium constans ex quadrato quadratis, quadratis , & vnitatibus , cum defectu cuborum & Numerorum , nimirum 2 $\frac{1}{2}$ Q Q. + 1 $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$ − 1 C. − 3. N. qui æquandus est quadrato , vt soluatur propositum lemma. Sed ad vitandas fractiones , omnia per 4. multiplicantur , & fit 9 Q Q. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12 N. æqualis quadrato.

Tertiò aduerte ita formandum latus propositi quinomij , vt æqualitas consistat inter duas species proximas. Quare tria potissimum sunt præstanda. Primò tollendi sunt quadrato quadrati. Secundò vnitates quoque tollendæ. Tertiò vel Numeri tollendi sunt , vt æqualitas consistat inter cubos & quadratos. vel tollendi sunt cubi , vt æquales maneant quadrati & Numeri. Duo quidem præstabuntur facilè , quia tam quadrato quadratorum quàm vnitatum numerus , quadratus est , puta 9 Q Q. & 1. quare si in latere fictitio ponantur horum quadratorum latera , nimirum 3 Q. & 1. habebitur intentum. Tertium verò , vt perficiatur, adiicienda est in latere fictitio tertia species , qua vel cubi vel Numeri elidantur , vnde duplex æquationis ratio consurgit , quarum primam duntaxat prosequutus est Diophantus , nos vtramque non grauatim explicabimus. Primùm ergo si libeat abolere numeros , curandum nobis erit vt in quadrato fictitio reperiantur − 12 N. Cùm igitur Numeri produci non possint , nisi ex ductu Numerorum in vnitates , patet in latere fictitio numeros ponendos esse ; vt verò eorum multitudo nobis innotescat , cùm latus fictitium debeat esse trionomium constans ex
1.2. *poris.* quadratis , Numeris , & vnitatibus , ' erit quadratus illius æqualis quadratis singularum partium,& duplo ductis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis , ac proinde Numeri qui erunt in quadrato fictitio , erunt duplum producti ex vnitatibus in Numeros in latere contentos. Quamobrem cum vt docuimus , in latere, vnitatum numerus sit 1. vt ex eius ductu in Numeros bis , fiant 12 N. manifestum est in latere ponendos esse 6 N. & quia signi quoque ratio habenda est , & − 12 N. fieri possunt siue ex 6 N. in − 1. bis , siue ex 1. in − 6 N. bis , dubitari potest vtrum latus fictitium ponendum sit 3 Q. + 6 N. − 1. vel 3 Q. + 1 − 6 N. nam vtroque modo , in quadrato reperientur 9 Q Q. + 1 − 12 N. Sed si ponatur latus fictitium 3 Q. + 6 N. − 1. fit totus quadratus 9 Q Q. + 1 − 12 N. + 36 C. + 30 Q. vbi quoniam vterque cuborum & quadratorum Numerus maior est numero cuborum & quadratorum numeri quadrato æquandi ; manent enim 30 Q. + 36 C. æquales 6 Q. − 4 C. id tandem incommodi accidit , vt 24 Q. + 40 C. æquentur nihilo. Igitur fictitium latus poni non potest 3 Q. + 6 N. − 1. Quamobrem restat vt fingatur 3 Q. + 1 − 6 N. vt fecit Diophantus , & æquatio ritè procedit , nam fit 1 N. $\frac{1}{3}$ sunt ergo cuborum latera $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ ipsi cubi $\frac{1}{27}$ & $\frac{1}{27}$. Quorum summæ semissis $\frac{2}{27}$ interualli verò semissis $\frac{1}{27}$. Quare si inueniamus duos numeros, quorum summa sit $\frac{1}{27}$. productus verò $\frac{1}{27}$ soluta erit quæstio. Inuenientur autem per trigesimam primi , & erunt quæsiti numeri in minimis $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$. quorum productus $\frac{2}{9}$. cui addendo & detrahendo summam ipsorum numerorum , fiunt cubi $\frac{25}{81}$. & $\frac{1}{81}$ à lateribus $\frac{5}{9}$ & $\frac{1}{9}$.

Aliam viam si libeat amplecti , & curare vt æqualitas consistat inter quadratos & Numeros, abolendo cubos , puta − 4 C. Cùm in latere sint 3 Q. patet ex 3 Q. bis in $\frac{3}{1}$ N. fieri 4 C. vnde constat in latere ponendos $\frac{1}{1}$ N. Sed & signi ratio si habeatur − 4 C. æquè bene fiunt ex 3 Q. in − $\frac{3}{1}$ N. atque ex $\frac{1}{1}$ N. in − 3 Q. Verùm si ponas latus fictitium 3 Q. + 1 − $\frac{3}{1}$ N. fiet quadratus 9 Q Q. + 1 − 4 C. + 6 $\frac{3}{1}$ Q. − $\frac{3}{1}$ N. vnde hoc incommodi accidit , vt tam quadratorum quàm Numerorum numerus, excedat numerum quadratorum & Numerorum , qui sunt ex altera æquationis parte , puta 6 Q. − 12 N. ac proinde tandem $\frac{3}{1}$ Q. + 10 $\frac{3}{1}$ N. æquantur nihilo. Supereſt igitur vt latus fictitium ponatur 1 + $\frac{3}{1}$ N. − 3 Q. & fit quadratus 9 Q Q. + 1 − 4 C. + $\frac{3}{1}$ N. − 5 $\frac{3}{1}$ Q. qui æquatur 9 Q Q. + 6 Q. + 1 − 4 C. − 12. N. & fit 1 N. $\frac{11}{11}$. Sunt igitur quæsitorum cuborum latera $\frac{11}{11}$ & $\frac{3}{11}$. ipsi cubi $\frac{1331}{1331}$ &

$\frac{1}{6561}$. Per quos si propositam initio quæstionem soluere velimus, cum horum summæ semissis sit $\frac{1121}{6561}$. Quærendi sunt duo numeri quorum summa sit $\frac{1121}{6561}$ productum verò $\frac{1120}{6561}$. Igitur operantes per Canonem trigesimæ primi sumemus quadratum semissis summæ, puta $\frac{1121^2}{6561^2}$ à quo auferemus productum, & relinquetur $\frac{1}{6561^2}$ cuius latus $\frac{1}{6561}$ additum & ablatum semissi summæ $\frac{1121}{6561}$. dabit quæsitos numeros $\frac{1122}{6561}$ & $\frac{1120}{6561}$ seu in minimis $\frac{561}{3281}$, $\frac{560}{3281}$. Horum productus est $\frac{313920}{6561^2}$. cui si addas & adimas summam numerorum $\frac{1121^3}{6561^3}$ fient cubi qui suprà. $\frac{1123^3}{6561^3}$ & $\frac{1119^3}{6561^3}$.

Cæterùm & latera cuborum qui per hoc lemma quæruntur diuersimodè fingi possunt, nimirum alterum poni potest quodlibet binomium constans ex Numeris & vnitatibus, alterum verò eiusdem binomij residuum, vt 2 N. + 2 & 2 N. − 2. vel 3 N. + 2. & 3 N. − 2. Semper enim aliquo modorum quos explicauimus, ad æquationem commodam peruenietur.

QVAESTIO XXX.

INVENIRE tres numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addita summa ipsorum, siue detracta cubum faciat. Hac in re scias quod quolibet quadrato diuiso in duas partes, quarum altera sit latus eius, productus harum partium multiplicatione addita summa illarum, cubum facit. Ponatur igitur quadratus 1 Q. & diuidatur in latus suum, & in id quod supereſt, nimirum in 1 N. & 1 Q. − 1 N. & productum multiplicationis eorum, vtroque adscito facit cubum. Supereſt vt idem productum, detracto vtroque faciat cubum. Atqui facit 1 C. − 2 Q. Hæc ergo cubo æquantur qui sit minor quam 1 C. formo cubum ab $\frac{1}{2}$ N. is est $\frac{1}{8}$ C. & omnia octies fiunt 8 C. − 16 Q. æquales 1 C. & fit 1 N. $\frac{16}{7}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{15}{7}$. secundus $\frac{17}{7}$.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν ἴσος ᾖ τῇ συναμφοτέρων ἴσῃ τε λείψῃ πιῇ κύβον. ἐκ τοῦ πῶς ὑπὸ τῶν τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεῖται εἰς τε τὰς πλευρὰς, καὶ τὸν λοιπὸν, ποιεῖ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων, κύβον. τετράθω πάντως ὁ τετράγωνος δύναμις ᾱ. καὶ διῃρήσω εἰς τὰς πλευρὰς καὶ τὸν λοιπὸν, ἔσται ς ᾱ. καὶ δυνάμεως ᾱ λείψει ς ᾱ. καὶ ἔστι ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ συναμφοτέρων, κύβος. λοιπὸν δεῖ τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαι συναμφότερα πιεῖν κύβον. ἀλλὰ ὁ ὑπ' αὐτῶν λείψας συναμφότερα ποιεῖ κύβον ᾱ λείψει δυνάμεων β̄. ταῦτα ἴσα κύβῳ ἑλάσσονι τοῦ κύβου ᾱ. πλάσσω κύβον ἀπὸ τοῦ ς ᾱ ς̄. τουτέστι κ̄ᾱ ᾱ ᾱ̄. καὶ πάντα ὀκτάκις. γίνονται κ̄ᾱ ᾱ λείψει δυνάμεων ιβ̄ ἴσα κύβῳ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄ ς̄. ὅθεν τὰς ὑπος ἀσφς, ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ις̄ ς̄. ὁ δὲ δεύτερος ρμδ̄ ρμθ̄.

IN QVAESTIONEM XXX.

HÆC quæstio eadem est cum præcedente, sed tractatio eius diuersa, & quidem facilior. Lemma quod assumitur de inueniendis duobus numeris, quorum productus adscita amborum summa cubum faciat, facile est demonstratu. Sit enim quilibet Numerus A cuius quadratus B, vnde auferendo ipsum A supersit C. ductoque A in C. fiat D. dico si ad ipsum D addatur summa ipsorum A C. seu B fieri cubum. Etenim ducendo A in suum quadratum B. fit cubus ipsius A. Sed ducere A in B idem est, ac ducere A sigillatim in ipsos A. C. ex quibus B componitur; productus autem ex A in A est B, & productus ex A in C est D. Igitur summa amborum B D æquatur cubo ipsius A. Quod erat demonstrandum. Reliqua sunt perspicua, nec maiori explicatione indigent.

A 5. B 25. C 20. D 100.

Cæterùm simili prorsum artificio soluentur & huiusmodi quæstiones.

QVAESTIO PRIMA.

Inuenire duos numeros, vt productus eorum multiplicatione siue addito siue detracto ipsorum interuallo cubum faciat.

Ponatur alter quæsitorum numerorum 1 N. alter 1 Q. + 1 N. nam productus eorum multiplicatione, puta 1 C. + 1 Q. detracto interuallo ipsorum, cubum facit. Supereſt vt idem productus addito eodem interuallo cubum faciat, facit autem 1 C. + 2 Q. hoc ergo æquatur Cubo. Esto 8 C. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1}{2}$ & $\frac{12}{7}$ qui soluunt quæstionem. Nam eorum productus est $\frac{12}{7}$. cui addendo & adimendo interuallum numerorum, putà $\frac{22}{7}$. fiunt cubi $\frac{64}{343}$ & $\frac{8}{343}$. Vbi & ani-

maduersione dignum est interuallum numerorum esse semper quadratum, sicut & in priore quæstione summa Numerorum quadratus erat.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire duos numeros, vt eorum summa siue addito siue detracto producto multiplicationis eorundem, cubum faciat.

Ponatur alter 1 N. alter 1 Q. − 1 N. sic enim summa addito producto cubum facit. Superest vt à summa detrahendo productum, cubus fiat. Fit autem 2 Q − 1 C. æqualis cubo, sit is quilibet numerus cuborum cubicus minor vnitate, vt fiat valor Numeri vnitate minor, & haberi possit alter numerorum qui positus est 1 Q. + 1 N. sit ergo cubus $\frac{1}{8}$ C. æqualis 2 Q. − 1 C. & fit 1 N. $\frac{17}{8}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{15}{8}$ & $\frac{17}{8}$ qui soluunt quæstionem, nam productus est $\frac{255}{64}$ summa verò ad eandem denominatorem redacta $\frac{289}{64}$ cui addendo & adimendo productum, fiunt cubi $\frac{343}{64}$ & $\frac{125}{64}$, à lateribus $\frac{7}{4}$ & $\frac{5}{4}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire duos numeros, quorum interuallum siue addito siue detracto producto cubum faciat.

D − D −
A − B − C −

Vtentes eodem logismo ferè quo vsus est Diophantus quæstione vigesima nona huius. Sint cubi qui fieri debent A C. & productus multiplicatione quæsitorum numerorum esto D. interuallum eorundem B. Igitur ex hypothesi addendo D ad B fiet cubus C. & auferendo eundem D. ab eodem B remanebit cubus A. Quamobrem cuborum A C
5. 1. *poris.* interuallum duplum est ipsius D. At quoniam A B C sunt in medietate arithmetica, ' B est semissis summæ ipsorum A C. Eo ergo redacti sumus vt inueniamus duos Numeros, quorum productus sit semissis interualli duorum cuborum, & eorundem interuallum sit semissis summæ eorundem cuborum. Atqui, vt constat ex Canone trigesimæ tertiæ primi, dato interuallo duorum numerorum, & producto multiplicationis, si quærantur numeri, vt solutio contingat rationalis, oportet vt quadrato interualli addendo quadruplum producti quadratus fiat. Igitur quærendi sunt duo cubi tales, vt quadrato semissis summæ ipsorum addendo quadruplum semissis interualli, seu duplum interualli eorundem, fiat quadratus. Ponantur ipsorum latera 1 N. + 1 − 1 & 1 N. Erit summa cuborum 6 Q. + 2. cuius semissis 3 Q. + 1. cuius quadratus 9 QQ. + 6 Q. + 1. cui si addatur duplum interualli cuborum, puta 4 C. + 12 N. fiet 9 QQ. + 6 Q. + 1. + 4 C. + 12 N. æquális quadrato. Huius latus esto 1 + 6 N. − 3 Q. fiet quadratus 9. QQ. + 30 Q. + 1 + 12 N. − 36 C. æqualis 9 QQ. + 6 Q. + 1 + 4 C. + 12 N. vnde fit 1 N. $\frac{1}{4}$. & sunt cuborum latera $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$. ipsi cubi $\frac{1}{16}$. & $\frac{1}{64}$. semissis summæ horum est $\frac{5}{64}$. semissis interualli $\frac{7}{64}$. Itaque si inueniamus duos numerosquorum interuallum sit $\frac{7}{64}$ productus verò $\frac{5}{64}$ soluta erit quæstio proposita. Inuenientur autem per trigesimam tertiam primi puta $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$. quorum productus $\frac{1}{8}$. at interuallum $\frac{3}{4}$. cui si addatur & adimatur productus, fiunt cubi $\frac{7}{8}$ & $\frac{1}{8}$.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire duos numeros, vt producto addendo summam, & ab eodem auferendo interuallum numerorum fiat cubus vtrimque.

Patet ex hypothesi, cuborum qui fieri debent interuallum componi ex summa & ex interuallo
23. 1. *poris.* quæsitorum numerorum. Quare sint cubi qui fieri debent 1. & 8. Igitur horum interuallum 7. est aggregatum ex summa & interuallo numerorum. ' Quare 7. est duplum maioris numeri, & ipse maior numerus est $\frac{7}{2}$. ponatur minor 1 N. erit productus $\frac{7}{2}$ N. cui addendo summam numerorum, puta $\frac{7}{2}$ + 1 N. fit $\frac{7}{2}$ + $\frac{9}{2}$ N. æqualis 8. vel à producto auferendo interuallum numerorum, manet $\frac{7}{2}$ N. − $\frac{5}{2}$ æqualis 1. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique idem valor Numeri 1. Sunt ergo quæsiti Numeri 3 $\frac{1}{2}$ & 1. Ex hac autem operatione sequitur cubos ad placitum sumi posse qui fiant huiusmodi additione & subtractione.

QVÆSTIO QVINTA.

Inuenire duos numeros: vt producto addendo interuallum, & ab eodem auferendo summam numerorum, cubus fiat vtrinque.

Sumantur vt prius cubi ad placitum 8. & 64. qui fiant huiusmodi additione & subtractione. Igi-
13. 1. *poris.* tur horum interuallum 56. componetur ex summa, & ex interuallo quæsitorum numerorum. ' Quare 56. est duplum maioris numeri, ipse maior numerus 28. ponatur minor 1 N. erit productus 28 N. cui si addas interuallum numerorum fit 27 N. + 28. æqualis 64. vel si ab eodem producto auferas summam Numerorum fit 27 N. − 28. æqualis 8. & vtraque æquatione resoluta fit vtrobique 1 N. $\frac{1}{27}$. sunt ergo quæsiti numeri 28. & $\frac{1}{27}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO SEXTA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo interuallum, & ab eadem auferendo productum, cubus vtrimque fiat.

Sumantur cubi ad placitum dum duplum minoris non ſuperet maiorem, ſumantur ergo 8. & 64. Quia igitur ſummæ quæſitorum numerorum addendo interuallum ipſorum, fit 64. ' patet 64. eſſe duplum maioris numeri. ergo ipſe maior numerus eſt 32. Ponatur minor 1 N. fiet ſumma 32 + 1 N. à qua auferendo productum 32 N. ſupereſt 32 − 31 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{31}{31}$. Sunt ergo quæſiti numeri 32. & $\frac{31}{31}$. 23. 1. *Perif.*

QVÆSTIO SEPTIMA.

Inuenire duos numeros, vt ſummæ addendo productum, & ab eadem auferendo interuallum, cubus fiat vtrimque.

Sumantur rurſus cubi quicunque 8. & 64. Quia ergo ex ſumma Numerorum auferendo interuallum remanet 8. ' Patet 8. eſſe duplum minoris numeri. Quare ipſe minor eſt 4. Ponatur maior 1 N. erit productus 4 N. cui addendo ſummam fit 4 + 5 N. æqualis 64. & fit 1 N. 12. ſuntque quæſiti Numeri 4. & 12. 23. 1. *Perif.*

QVÆSTIO OCTAVA.

Inuenire duos numeros, vt interuallo addendo ſummam, & ab eodem interuallo auferendo productum, cubus vtrimque conficiatur.

Sumantur duo cubi, quorum maior ſuperet duplum minoris, quales ſunt 8. & 64. Quia igitur interuallo numerorum addendo ſummam, fit 64. erit 64. duplum maioris numeri. Ipſe maior numerus 32. Ponatur minor 1 N. erit interuallum 32 − 1 N. vnde auferendo productum, fiet 32 − 33 N. æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{8}{33}$ ſuntque quæſiti numeri 32. & $\frac{8}{33}$.

QVÆSTIO NONA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis, ſiue addatur ſumma, ſiue interuallum ipſorum, fiat cubus.

Ponantur cubi qui fieri debent 8. & 64. Cùm igitur eidem producto addendo interuallum & ſummam numerorum fiant 8. & 64. patet inter ipſos 8. & 64. eandem eſſe differentiam, quæ eſt inter ſummam & interuallum numerorum, ' at hæc dupla eſt minoris Numeri. Igitur 56. eſt duplum minoris numeri, & ipſe minor numerus eſt 28. Ponatur maior 1 N. erit productus 28 N. interuallum 1 N. − 28. quo ad productum addito fit 29 N. − 28. æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{36}{29}$ maior numerus. Quod eſt impoſſibile, cum minor ſit 28. Porro 36. eſt compoſitum ex minore cubo, & ex ſemiſſe interualli cuborum, at 29. eſt ipſe ſemiſſis interualli cuborum vnitate auctus. Igitur inueniendi ſunt duo cubi, vt aggregatum ex minore & ex ſemiſſe interualli ipſorum, diuiſum per eundem ſemiſſem vnitate auctum, det quotientem maiorem ipſo ſemiſſe interualli cuborum; ſeu quod idem eſt, oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, ſuperet productum ex ſemiſſe interualli cuborum in ſeipſum vnitate auctum. At hic productus æquatur quadrato ſemiſſis interualli cuborum aucto ſuo latere. Igitur oportet vt aggregatum ex minore cubo & ex ſemiſſe interualli cuborum, excedat quadratum ſemiſſis eiuſdem interualli auctum ſuo latere, & auferendo vtrimque eundem ſemiſſem interualli cuborum; Oportet vt minor cubus excedat quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Statuatur maior, quilibet cubus, puta 8. & diuidatur 8. in duas partes, quarum maior excedat quadratum ſemiſſis minoris. Quoniam ergo diuiſo 8. in partes æquales 4. & 4. contingit alteram æquari quadrato ſemiſſis alterius, patet ſi altera ponatur maior quàm 4. altera minor, haberi quod quæritur nam maior excedet quadratum ſemiſſis minoris. Proinde poſito maiore cubo 8. talis ponendus eſt minor vt ſit maior quàm 4. Sic enim minor cubus excedet quadratum ſemiſſis interualli cuborum. Hoc vt facilè fiat, reducatur 8. ad fractionem cubicam denominatam à maiore aliquo cubo, puta ad $\frac{8}{125}$. & ad eiuſdem denominationis fractionem reducatur 4. fiet $\frac{32}{125}$. Tum ſumatur cubus aliquis inter 108. & 216. puta 125. cui ſubſcribendo denominatorem eundem, fient quæſiti Cubi $\frac{27}{125}$ & $\frac{64}{125}$ ſeu 8. per quos commodè ſoluetur quæſtio. Nam eorum interuallum eſt $\frac{37}{125}$ cuius ſemiſſis $\frac{37}{250}$ eſt minor quæſitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. erit ſumma 1 N. + $\frac{37}{250}$ productus verò $\frac{37}{250}$ N. cui addendo ſummam fit $\frac{37}{250}$ N. + $\frac{37}{250}$ æqualis 8. vnde fit 1 N. $\frac{2000}{37}$ maior ſcilicet numerus, minor autem eſt $\frac{1728}{37}$. & ſoluunt quæſtionem.

¶ Vt autem methodus quam tradidi ad inueniendum duos cubos, quorum minor excedat quadratum ſemiſſis interualli ipſorum, firmius comprehendatur: ſtatuatur rurſus maior cubus 64. qui diuidatur in duas partes, quarum maior ſuperet quadratum ſemiſſis minoris. Erit igitur maior pars 32

+ 1 N. minor 32 − 1 N. huius semissis 16 − ½ N. cuius quadratus 256 + ¼ Q. − 16 N. debet esse minor quàm 32 + 1 N. & addendo vtrimque æqualia, tum auferendo similia à similibus, ac demum omnia per 4 multiplicando, fiunt 68 N. maiores quàm 896 + 1 Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. maior, vel certè non minor quàm 18. vnde constat maiorem partem de 64. debere esse 50. vel maiorem quàm 50. Ponatur 50 minor 14. Patet igitur maiore Cubo posito 64. minorem sumendum esse non minorem quàm 50. sic enim eorum interuallum minus erit quàm 14. ac proinde semissis interualli quadratus minor erit minore cubo, vt requiritur. Itaque reducatur 64. ad fractionem cubicam, puta ad $\frac{3200}{125}$ & ad eandem denominationem reducatur 50. fiet $\frac{4000}{125}$ sumatur ergo cubus inter 3200. & 4096. qualis est 3375. Huic igitur eundem denominatorem adscribendo, habebuntur cubi quæsiti $\frac{3375}{125}$ & $\frac{4096}{125}$. seu 64. Per quos rursus, si libet, soluet quæstionem.

QVÆSTIO DECIMA.

Inuenire duos numeros, vt producto multiplicationis siue adimatur summa, siue interuallum ipsorum, fiat cubus.

Eodem ferè logismo quo suprà concludemus, reperiendos esse duos cubos, quorum maior superet quadratum semissis interualli ipsorum. Ponatur ergo minor 8 maior 8 + 1 N. Igitur 8 + 1 N. debet esse maior quàm ½ Q. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 8. Quare posito minore cubo 8. debet maior esse minor quàm 16. reducantur 8. & 16. ad fractionem denominationis cubicæ, puta ad $\frac{64}{8}$ & $\frac{128}{8}$. Quærendus ergo est cubus inter 64. & 128. qualis est 125. eruntque quæsiti cubi 8. & $\frac{125}{8}$ Quorum interuallum $\frac{61}{8}$ cuius semissis $\frac{61}{16}$ est minor quæsitorum numerorum. Ponatur maior 1 N. fiet summa 1 N. + $\frac{61}{16}$ productus verò $\frac{61}{16}$ N. vnde auferendo summam, manet $\frac{45}{16}$ N. − $\frac{61}{16}$ æqualis 8. & fit 1 N. $\frac{29}{45}$. Tantus est maior, minor verò $\frac{61}{45}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXI.

ΕΥΡΕΙΝ τέσσαρας ἀριθμοὺς τετραγώνους οἱ συμπληροῦντες ἓν τετράγωνον τὰς ἰδίας πλευρὰς συμπληροῦσαι ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ ιβ̄. ἐπεὶ πᾶς τετράγωνος λαβὼν τὴν ἰδίαν πλευρὰν καὶ μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον. οὗ ἡ πλευρὰ λείψασα μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ ἀριθμόν τινα, ὃς ἔσται τῶν ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρά, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἅμα προσλαβόντες ὅλην τὰς ἰδίας πλευρὰς ποιοῦσι μονάδας ιβ̄. προσλαβόντες; ἢ δὲ τέσσαρα τέταρτα ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ μονάδες ιβ̄. μῦ τετράκις τετάρτων. ὅ ἐστι μονὰς μία, μονάδες ιη̄. τὰς ιη̄ ἅμα μονάδας διαιρεῖν δεῖ εἰς τέσσαρας τετραγώνους, καὶ ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς ἀφελὼν μονάδος τὸ ἥμισυ, ἕξω τ̄ τετράκις τετραγώνων τὰς πλευράς. διαιροῦνται δὲ οἱ ιη̄ εἰς δύο τετραγώνους, τόν τε δ̄ καὶ τὸν θ̄. καὶ πάλιν ἑκάτερος τούτων διαιρεῖται εἰς ξδ̄ $^{\alpha\iota\overline{\varsigma}}$. καὶ λε̄ $^{\alpha\iota\overline{\varsigma}}$. καὶ ρμδ̄ $^{\alpha\iota\overline{\varsigma}}$. καὶ πᾱ $^{\alpha\iota\overline{\varsigma}}$. λαβὼν τούτων ἑκάστου τὴν πλευρὰν ἡ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ε̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ιβ̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. θ̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. αἷρε ἀπὸ ἑκάστου τούτων μονάδος τὸ ἥμισυ, καὶ ἔσονται αἱ πλευραὶ τ̄ ζητουμένων τετραγώνων. ιᾱ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ζ̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ιθ̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$ ιη̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. αὐτοὶ δὲ οἱ τετράγωνοι. ὃς μὲν ρκᾱ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ὃς δὲ μθ̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ὃς δὲ τξᾱ $^{\iota\overline{\varsigma}}$. ὃς δὲ ςξθ̄ $^{\iota\overline{\varsigma}}$.

INVENIRE quatuor numeros quadratos, quorum summa cum summa laterum coniuncta, numerum imperatum faciat. Sit is 12. Quandoquidem omnis quadratus suo latere & vnitatis quadrante auctus facit quadratum, cuius latus semisse vnitatis multatum, exhibet prioris quadrati latus. At quatuor numeri qui quæruntur, suis lateribus adsumptis faciunt 12. iidem vtique adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, facient quatuor quadratos. Atqui vnitates 12. auctæ quatuor quadrantibus vnitatis, hoc est 1. fiunt 13. Oportet igitur diuidere 13. in quatuor quadratos, tunc si à cuiuslibet latere detraxero ½. habebo quæsitorum quatuor quadratorum latera. Diuiditur autem 13. in duos quadratos 4. & 9. & rursus quilibet ipsorum diuiditur in duos quadratos, nempe alter in $\frac{64}{65}$ & $\frac{1}{65}$. alter in $\frac{144}{145}$ & $\frac{1}{145}$. sumens igitur cuiusque latus, nempe $\frac{8}{65}$. $\frac{1}{65}$. $\frac{12}{145}$. $\frac{1}{145}$. aufero ab vnoquoque illorum ½. & sunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{33}{65}$. $\frac{-32}{65}$. $\frac{133}{145}$. $\frac{-132}{145}$. Ipsi ergo quadrati sunt $\frac{1089}{4225}$. $\frac{1024}{4225}$. $\frac{17689}{21025}$. $\frac{17424}{21025}$.

IN QVAESTIONEM XXXI.

LEMMA quod assumit Diophantus, sic breuissimè domonstratur. Esto quilibet numerus A B. & semissis vnitatis B C. sintque ipsorum quadrati D. E. & summa ipsorum A B. D. E sit F. Dico F esse quadratum à cuius latere si auferatur B C. relinquitur A B. Etenim quadratus totius A C æquatur quadratis D. E. & producto bis ex A B in B C. sed quia B C. est semissis vnitatis, hic productus bis æquatur ipsi A B. vt cuidens est. Igitur quadratus totius A C. æquatur summæ ipsorum A B. D. E. seu ipsi F. Quare F est quadratus, cuius latus A C. à quo auferendo B C. remanet A B. Quod erat demonstrandum. 4. *secundi.*

A ..... B ; C.
D 25. E ¼. F 30 ¼.

Quoniam verò infra docebimus quæstionem hanc vniuersalius proponi posse, nimirum inueniri posse quatuor quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum, datum conficiat numerum, necesse est & hoc lemma vniuersalius concipi, nimirum sic.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris auctus, & quadrato semissis multiplicatoris, quadratum exhibet, cuius latus multatum semisse multiplicatoris, fit prioris quadrati latus.

Esto quadratus E cuius latus A B. & sit multiplicator D. cuius semissis B C. cuius quadratus F. & summa ipsorum E F. & producti ex A B in D. esto G. Dico G esse quadratum, à cuius latere si auferatur B C. remanet A B. etenim quadratus totius A C. æquatur quadratis partium, nimirum ipsis E. F & producto bis ex A B in B C. seu producto ex A B in D. quamobrem G. est quadratus ipsius A C. vnde patet auferendo B C. relinqui A B. Quod erat demonstrandum. 4. *secundi.*

D 6.
A ..... B ... C.
E 25. F 9. G 64.

Cæterùm totum analyseos Diophantææ negotium in eo consistit, vt datus numerus vnitate auctus diuidatur in quatuor quadratos. Quod qui vniuersaliter fieri possit non docuit Diophantus. Equidem si datus numerus vnitate auctus quadratus sit, vel suaptè natura ex duobus quadratis compositus, facilè diuidetur in quatuor, atque etiam in plures quotlibet quadratos per octauam secundi. Sed si harum proprietatum neutra illi accidat, quomodo res absoluenda sit non constat ex Diophanto. Etenim datus numeros esto 13. Tunc numerus 14. diuidendus erit in quatuor quadratos. Sed quo artificio? Nam 14. nec quadratus est, nec ex duobus quadratis compositus. Hæc difficultas non immerito prima fronte inextricabilis appareat, quamuis rem subtilius consideranti facilè euanescat. Etenim datus numerus vnitate auctus etsi nec quadratus sit, nec ex duobus quadratis compositus, attamen eum ex tribus, vel etiam ex quatuor quadratis suaptè natura componi necesse est. Ita supradictus numerus 14. componitur ex tribus quadratis 1. 4. 9. Quare vno ex illis in duos diuiso per octauam secundi, iam totus numerus in quatuor quadratos diuisus erit. Omnem autem numerum vel quadratum esse, vel ex duobus, aut tribus, aut etiam quatuor quadratis componi satis experiendo deprehendes. Mihi sanè perfectà id demonstratione assequi nondum licuit quam qui proferet maximas ei habebo gratias, præsertim cùm non solum in hac quæstione, sed & in nonnullis libri quinti hoc supponere videatur Diophantus. Interim libet id inductione confirmare, ostendendo proprium esse numerorum omnium ab 1. vsque ad 120. vt constat ex sequenti diagrammate.

1. Quadratus
2. ex 1. 1.
3. ex 1. 1. 1.
4. Quadratus.
5. ex 1. 4.
6. ex 1. 4. 1.
7. ex 1. 1. 1. 4.
8. ex 4. 4.
9. Quadratus.
10. ex 1. 9.
11. ex 1. 1. 9.
12. ex 4. 4. 4. vel 1. 1. 1. 9.
13. ex 4. 9.
14. ex 1. 4. 9.
15. ex 1. 1. 4. 9.
16. Quadratus.
17. ex 1. 16.
18. ex 9. 9. vel 1. 1. 16.
19. ex 1. 9. 9. vel 1. 1. 1. 16.
20. ex 4. 16. vel 1. 1. 9. 9.
21. ex 1. 4. 16.
22. ex 4. 9. 9. vel 1. 1. 4. 16.
23. ex 1. 4. 9. 9.
24. ex 4. 4. 16.
25. Quadratus.
26. ex 1. 25. vel 4. 4. 9. 9.
27. ex 1. 1. 25. vel 9. 9. 9.
28. ex 1. 1. 1. 25. vel 1. 9. 9. 9. vel 4. 4. 4. 16.
29. ex 4. 25.
30. ex 1. 4. 25.
31. ex 1. 1. 4. 25. vel 4. 9. 9. 9.
32. ex 16. 16.
33. ex 1. 16. 16.
34. ex 9. 25.
35. ex 1. 9. 25.
36. Quadratus.
37. ex 1. 36.
38. ex 1. 1. 36.
39. ex 1. 1. 1. 36. vel 1. 4. 9. 25.
40. ex 4. 36.
41. ex 16. 25. vel 1. 4. 36.
42. ex 1. 16. 25.

43. ex 9. 9. 25. vel 1. 1. 16. 25.
44. ex 4. 4 36.
45. ex 9. 36. vel 4. 4. 16. 25.
46. ex 1. 9. 36. vel 1. 4. 16. 25.
47. ex 1. 1. 9. 36. vel 4. 9. 9. 25.
48. ex 16. 16. 16. vel 4. 4. 4. 36.
49. Quadratus.
50. ex 1. 49. vel 25. 25.
51. ex 1. 1. 49. vel 1. 25. 25.
52. ex 16. 36.
53. ex 4. 49. vel 1. 16. 36.
54. ex 1. 4. 49.
55. ex 1. 1. 4. 49. vel 1. 9. 9. 36.
56. ex 4. 16. 36.
57. ex 1. 4. 16. 36.
58. ex 9. 49.
59. ex 1. 9. 49. vel 9. 25. 25.
60. ex 1. 1. 9. 49. vel 1. 9. 25. 25. vel 4. 4. 16. 36.
61. ex 25. 36.
62. ex 1. 25. 36.
63. ex 1. 1. 25. 36.
64. Quadratus.
65. ex 1. 64. vel 16. 49.
66. ex 1. 1. 64. vel 1. 16. 49.
67. ex 9. 9. 49.
68. ex 4. 64.
69. ex 1. 4. 64. vel 4. 16. 49.
70. ex 9. 25. 36.
71. ex 1. 9. 25. 36.
72. ex 36. 36. vel 4. 4. 64.
73. ex 9. 64.
74. ex 25. 49.
75. ex 1. 25. 49.
76. ex 4. 36. 36. vel 1. 1. 25. 49.
77. ex 4. 9. 64.
78. ex 4. 25. 49.
79. ex 1. 4. 25. 49. vel 9. 9. 25. 36.
80. ex 16. 64.
81. Quadratus.
82. ex 1. 81.
83. ex 1. 1. 81. vel 9. 25. 49.
84. ex 4. 16. 64.
85. ex 4. 81. vel 1. 36. 49.
86. ex 1. 4. 81. vel 1. 36. 49.
87. ex 1. 1. 4. 81. vel 1. 1. 36. 49.
88. ex 16. 16. 36.
89. ex 25. 64.
90. ex 9. 81.
91. ex 1. 9. 81.
92. ex 1. 1. 9. 81. vel 4. 16. 36. 36. vel 9. 9. 25. 49.
93. ex 4. 25. 64.
94. ex 4. 9. 81. vel 9. 36. 49.
95. ex 1. 4. 9. 81. vel 1. 9. 36. 49.
96. ex 16. 16. 64.
97. ex 16. 81.
98. ex 49. 49. vel 1. 16. 81.
99. ex 1. 49. 49. vel 9. 9. 81.
100. Quadratus.
101. ex 1. 100.
102. ex 1. 1. 100.
103. ex 1. 1. 1. 100. vel 4. 9. 9. 81. vel 4. 25. 25. 49. vel 9. 9. 36. 49.
104. ex 4. 100.
105. ex 1. 4. 100.
106. ex 25. 81.
107. ex 1. 25. 81.
108. ex 36. 36. 36. vel 1. 1. 25. 81.
109. ex 9. 100.
110. ex 1. 9. 100.
111. ex 1. 1. 9. 100.
112. ex 4. 4. 4. 100. vel 4. 36. 36. 36. vel 16. 16. 16. 64.
113. ex 49. 64.
114. ex 1. 49. 64.
115. ex 9. 25. 81.
116. ex 16. 100.
117. ex 36. 81.
118. ex 1. 36. 81.
119. ex 9. 25. 36. 49.
120. ex 4. 16. 100.

Tu, si vacat vlterius experiare licebit. Ego sanè de omnibus numeris vsque ad 325. experimentum sumpsi. Facile autem ad quotlibet quadratos extenderur quæstio, sed si duo tantum quadrati postulentur, quorum summa cum summa laterum datum conficiat numerum, oportebit dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis. Et si tres quærantur quadrati, oportebit dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis. Si vero plures postulentur quadrati, nulla conditio præscribetur, quia tunc continget quendam numerum diuidendum esse in quatuor aut in plures quadratos, quod semper fieri posse docuimus. Denique eadem arte, & ampliando lemma Diophanti, vt supra fecimus, inuenientur quotlibet quadrati, quorum summa adsumpto quolibet multiplici summæ laterum, datum conficiat numerum. Quoniam autem in his omnibus quæstionibus plerumque accidit aliquem numerum ita diuidendum esse in duos, vel tres vel plures quadratos, vt quilibet eorum excedat certum aliquem numerum, quod ritè perfici nequit, nisi per artificium quo vtitur Diophantus duodecima, decima tertia, & decima quarta quinti, satius erit hujusmodi quæstionum explicationem in eum locum reiicere.

OBSERVATIO D. P. F.

IMo propositionem pulcherrimam & maxime generalem nos primi deteximus. Nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum

esse pentagonum, vel ex duobus tribus quatuor aut quinque pentagonis compositum & sic deinceps in infinitum in hexagonis heptagonis & poligonis quibuslibet enuntianda videlicet pro numero angulorum generali & mirabili propositione; eius autem demonstrationem quæ ex multis varijs & abstrusissimis numerorum mysterys deriuatur hic apponere non licet, opus enim & librum integrum huic operi destinare decreuimus & Arithmeticen hac in parte vltra veteres & notos terminos mirum in modum promouere.

QVÆSTIO XXXII.

INVENIRE quatuor quadratos, quorum summa laterum summa detracta faciat præscriptum numerum. Sit is 4. Quia volo primum suo multatum latere, & secundum suo multatum latere, itemque tertium & quartum suis multatos lateribus facere 4. Cæterùm omnis quadratus suo latere multatus, & adsumens vnitatis quadrantem, facit quadratum, cuius latus adscito vnitatis semisse exhibet prioris quadrati latus; quatuor vtique quadrati quæsiti multati suis lateribus, & adsumentes quatuor vnitatis quadrantes, nimirum 1. facient quatuor quadratos. Sed & iidem multati suis lateribus, faciunt vnitates 4. & adsumentes 1. faciunt 5. Hoc ergo mihi incumbit vt diuidam 5. in quatuor quadratos, quorum singulorum lateribus vbi adiecero $\frac{1}{2}$. inuenero latera quæsitorum quadratorum. Diuiditur autem 5. in quadratos $\frac{25}{9}. \frac{25}{16}. \frac{25}{49}. \frac{25}{64}$. Horum sumo latera, nimirum $\frac{5}{3}. \frac{5}{4}. \frac{5}{7}. \frac{5}{8}$. addo cuilibet illorum $\frac{1}{2}$. & inuenio latera $\frac{11}{10}. \frac{11}{12}. \frac{11}{14}. \frac{11}{16}$. Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{121}{100}. \frac{121}{144}. \frac{121}{196}. \frac{121}{256}$.

ΕΤΡΕΙΝ τέσσαρας τετραγώνους, οἱ σωι πηθέντες ⁊ λείψαντες τὰς πλευρὰς αὐτῶν σωτηθήσας, ποιῶσι δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ τὸν δ'. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν πρῶτον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευρὰν, ⁊ τὸν δεύτερον λείψαντα αὐτοῦ τὴν πλευρὰν, ⁊ τὸν τρίτον, καὶ τὸν τέταρτον ὁμοίως λείψαντας αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιεῖν μ̄ δ'. ἀλλὰ μὴν ⁊ τὰς τετράγωνος λείψας ἑαυτοῦ πλευρὰν ⁊ τετραπλασίων μονάδος τέταρτον ποιεῖ τετράγωνον, ὃ ἐστὶ πλευρὰ τετραπλασίων μονάδος ἡμίσεως ποιεῖ τὸν τῆς ἐξ ἀρχῆς τετραγώνου πλευρὰν, ὥστε οἱ τέσσαρες τετράγωνοι λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς ⁊ τετραπλασίονες μονάδος τέσσαρα τέτραρτα, τουτέστι μονάδα μίαν ποιήσουσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλὰ ⁊ οἱ τέσσαρες λείψαντες αὐτῶν τὰς πλευρὰς ποιοῦσι μ̄ δ'. τετραπλασίονες ἄρα ⁊ μονάδα μίαν ποιοῦσι μ̄ ι'. ἁπλᾶ ταῦτα μοι γ̄ τ̄ ι' διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους. ἑκάστη γὰρ πλευρὰ τετράγωνος μονάδος τὸ ἥμισυ, ⁊ δύο τὰς γ̄ ζητουμένων τετραγώνων πλευράς. διαιρεῖ ἄρα ὁ ι'. εἰς τέσσαρας τετραγώνους θ̄ ⁿ. ⁊ ις̄ ⁿ. ⁊ ξδ̄ ⁿ. ⁊ λς̄ ⁿ. λαμβάνω τούτων τὰς πλευράς, γίνονται γ̄ ⁿ δ̄ ⁿ. ⁊ η̄ ⁿ. ⁊ ⁿ. προσθήμι ἑκάστῳ τούτων τὸ ἥμισυ, ⁊ δύο τὰς γ̄ ζητουμένων τετράγωνοι ἔσονται ἡ ἄρα οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἔσονται ἰδ̄ ρκᾱ ⁿ. ὁς ἡ υμᾱ ⁿ. ὁς ἡ σοθ̄ ⁿ.

IN QVAESTIONEM XXXII.

LEMMA Diophanti vniuersaliùs etiam proponetur hoc pacto.

Omnis quadratus quolibet multiplice sui lateris multatus, & adsumens quadratum semissis multiplicatoris, quadratum facit, cuius latus adscito semisse multiplicatoris, exhibet latus prioris quadrati. Oportet autem latus prioris quadrati esse maius semisse multiplicatoris.

H 48. D 6.
A..... B... C.
E 25. F 9. G 64.

Esto quadratus G. cuius latus A C. & sit multiplicator D cuius semissis B C. cuius quadratus F. productus autem ex D in A C. sit H. Itaque auferendo H ex G. & residuo addendo F. fiat E. Dico E quadratum esse à latere A B. cui addito B C. sit A C latus prioris quadrati G. Etenim quia productus ex D in A C puta H. æquatur productis ex D in singulos A B. B C. productus autem ex D in suum semissem B C æquatur duplo quadrati F. patet auferre H ex G. idem esse, atque auferre ex G productum ex D in A B & duplum quadrati F. Quare cùm residuo addendo F fiat E patet E fieri si ex G auferatur productus ex D in A B & quadratus F, vnde è conuerso si ipsi E addantur productus ex D in A B & quadratus F. fiet G. sed vt constat ex lemmate præcedentis, si quadrato ex A B addantur idem pro- *1. secundi.*

ductus ex D in A B. & idem quadratus F fiet idem quadratus G. Igitur E est quadratus ipsius A B. Quod demonstrandum erat.

Hæc quæstio quoque ad quotlibet numeros extendetur, vt aliquot exemplis ostendere libet, cùm hîc ad propositiones libri quinti recurrere minimè cogamur. Itaque.

Inuemantur duo numeri, vt summa quadratorum, laterum summa detracta conficiat datum numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum binario componi ex duobus quadratis.

Datus esto 6. Igitur ad 6. addendo duos quadrantes vnitatis; patet $6\frac{1}{2}$ diuidendum in duos quadratos, & vtrique lateri addendo $\frac{1}{2}$; fient quæsitorum quadratorum latera. ducantur omnia in 4. fiet 26. diuidendus in duos quadratos. Diuiditur autem in 25. & 1. quorum latera 5 & 1. quorum semissis, puta $\frac{5}{2}$ & $\frac{1}{2}$; sunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Addo ergo vnicuique $\frac{1}{2}$. & fiunt latera quæsitorum quadratorum 3. & 1. quæ soluunt quæstionem, nam summa laterum est 4. quadratorum 10. vnde auferendo 4. manet 6. Rursus.

Inueniantur tres quadrati, quorum summa, laterum summa detracta datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario componi ex tribus quadratis.

Datus esto 8. Igitur ad 8 addendo tres quadrantes vnitatis, fiet $8\frac{3}{4}$ diuidendus in tres quadratos, omnia per 4. fiet 35. diuidendus in tres quadratos. Diuiditur autem in 1. 9. 25. quorum latera 1. 3. 5. quorum semissis $\frac{1}{2}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. sunt latera quadratorum, ex quibus $8\frac{3}{4}$ componitur. Quare vnicuique addendo $\frac{1}{2}$ fient quæsitorum latera quadratorum 1. 2. 3. Nam summa quadratorum fit 14. vnde auferendo 6. summam laterum, supereſt 8. Rursus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum summa, laterum summa detracta, datum faciat numerum.

Datus esto 3. Igitur ad 3. addendo quinque quadrantes vnitatis fiet $4\frac{1}{4}$ diuidendus in quinque quadratos omnia per 4. fiet 17. diuidendus in quinque quadratos. Diuiditur autem in 4. 9. 4. & si duo ex illis in duos diuidantur, totus 17. in quinque diuisus erit, diuidatur ergo 4. in quadratos $\frac{289}{169}$ & $\frac{240}{169}$. & rursus 9. diuidatur in duos quadratos $\frac{81}{17}$. & $\frac{136}{17}$ sic totus 17. diuisus est in quinque quadratos, quorum latera 2. $\frac{9}{17}$. $\frac{23}{17}$. $\frac{9}{17}$. $\frac{11}{17}$. quorum semisses 1. $\frac{9}{34}$. $\frac{23}{34}$. $\frac{9}{34}$. $\frac{11}{34}$. sunt latera quadratorum ex quibus componitur $4\frac{1}{4}$. vnde singulis addendo $\frac{1}{34}$. fiunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{1}{34}$. $\frac{43}{34}$. $\frac{11}{34}$. $\frac{35}{34}$. $\frac{13}{34}$. & soluunt quæstionem. Item.

Inueniantur quatuor quadrati, quorum summa, detracto sextuplo summæ laterum, datum conficiat numerum. Datus esto 4.

Quoniam, vt constat ex lemmate supra tradito, omnis quadratus multatus sextuplo sui lateris, & adsumens 9. quadratum facit, cuius latus adscito 3. exhibet prioris quadrati latus. Quatuor vtique quadrati multati sextuplo laterum & adsumentes quater 9. nimirum 36. facient quatuor quadratos. Quare cùm quatuor quadrati multati sextuplo laterum faciant 4. patet addito 4. ad 36. fieri 40. diuidendum in quatuor quadratos, quorum lateribus si addatur 3. sigillatim, fient latera quæsitorum quadratorum. Porro 40. diuiditur in duos quadratos 36. & 4. quorum quilibet si diuidatur rursus in duos, puta 4. in $\frac{16}{17}$ & $\frac{1}{17}$. & similiter 36. in $\frac{144}{17}$ & $\frac{324}{17}$. Iam totus 40. in quatuor quadratos diuisus erit, quorum latera $\frac{4}{17}$. $\frac{1}{17}$. $\frac{12}{17}$. $\frac{18}{17}$. quibus addendo sigillatim ternarium, fiunt latera quæsitorum quadratorum $\frac{55}{17}$. $\frac{52}{17}$. $\frac{63}{17}$. $\frac{69}{17}$. & soluunt quæstionem. Rursus.

Inueniantur quinque quadrati, quorum summa, detracto sextuplo summæ laterum, datum faciat numerum.

Datus esto 10. Igitur ad 10. addendo quintuplum nouenarij, nimirum 45. fiet 55. diuidendus in quinque quadratos, & cujuslibet lateri addendo 3. fient quæsitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 55. in quatuor quadratos 1. 1. 4. 49. Quare vnus illorum puta 1. rursus in duos diuidatur, nimirum in $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$. & sic totus 55. in quinque quadratos diuisus erit, quorum latera $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$. 1. 2. 7. quibus addendo sigillatim 3. fient latera quæsitorum quadratorum $\frac{7}{2}$. $\frac{7}{2}$. 4. 5. 10. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO XXXIII.

Τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμὸν, ὁ ποιεῖ τὸ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. ἔστω δὴ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς. καὶ ᾧ μὲν προσθῶμεν γ'. ᾧ δὲ α'. ὁ ποιεῖ τὸ ὑπ' αὐτ

VNITATEM diuidere in duos numeros, & vtrique addere datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Esto diuidenda vnitas in duos numeros, & oporteat

alteri addere 3. alteri 5. & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Ponatur primus 1 N. ergo secundus erit 1 — 1 N. & si primo addantur 3. fit 1 N. + 3. At si secundo addantur 5. fit 6 — 1 N. & productus eorum multiplicatione est 3 N. + 18. — 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. Communis addatur defectus, fiunt 3 N. + 18. æquales 5 Q. & non est rationalis æquatio. Atqui 5 Q. est quadratus numerus vnitate auctus. Oportet itaque hunc ductum in vnitates 18. & adsumentem quadratum semissis 3 N. nimirum 2 ½. facere quadratum. Eò igitur nunc redactus sum, vt quæram quadratum qui adsumpta vnitate, & per 18. multiplicatus, adscitisque 2 ½ faciat quadratum. Esto quadratus ille 1 Q. Hic vnitate auctus & ductus in 18. adscitisque 2 ½ fit 18 Q. + 20 ½ æqualis quadrato. Omnia quater, fiunt 72 Q. + 81. æqualia quadrato. Formo quadratum à 8 N. + 9. & fit 1 N. 18. Ad positiones. Erit quadratus 324. Redeo ad propositum initio, & 3 N. + 18 — 1 Q. æquo quadrato iam inuento. 324 Q. & fit 1 N. $\frac{18}{17}$ hoc est $\frac{6}{17}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{6}{17}$. secundus $\frac{15}{17}$.

τριάκοντα. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ ᾱ. ὁ ἄρα δεύτερος ἔσται μ̄ ᾱ ⏋ ς̄ ᾱ. ἐὰν μὲν τῷ πρώτῳ προστεθῶσι μ̄ γ̄. ἔσται ς̄ ᾱ μ̄ γ̄. ἐὰν δὲ τῷ δευτέρῳ μ̄ ε̄. ἔσται μ̄ ς̄ ⏋ ς̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ὑπ' αὐτὰ ς̄ γ̄ μ̄ ιη̄ ⏋ δ̄ ᾱ. ἴσος τριάκοντα. ἴσῳ δ̄ δ̄. καὶ κοινὴ προσκείσθω τὰ τοῦ λείμματος, γίνονται ς̄ γ̄ μ̄ ιη̄ ἴσοι δ̄ ε̄. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ῥητή. ἀλλ' αἱ δ̄ ε̄. δεῖ τετράγωνος μετὰ μ̄ ᾱ. δεῖ δὴ ταῦτα ὅπως τὰς ιη̄. μοναδας πολλαπλασιαζόντα, καὶ προσλαβόντα τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισείας τοῦ ἑνὸς ς̄ τετράγωνον. τοιοῦτοι β̄. α ˢ. ποιεῖν τετράγωνον. διὰ τοῦτο πίπτω αὐτῆκ) μοι εἰς τὸ ζητεῖσθαι τετράγωνον ὃς προσλαβὼν μ̄ ᾱ. καὶ ὀκταπλασιάσας ποιεῖ μον, καὶ προσλαβὼν μ̄ β̄. α ˢ. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τετράγωνος δ̄ ᾱ. ὅπως μετὰ μ̄ ᾱ ὀκταπλασιάσας γινόμενος, καὶ προσλαβὼν μ̄ β̄. α ˢ. ποιεῖ δ̄ ιη̄ μ̄ ῑ. α ˢ. ἴσας τετραγώνῳ πάντα τετράκις, γίνονται δ̄ οβ̄ μ̄ πᾱ ἴσαι τετραγώνῳ, καὶ πλάστῳ τετράγωνον ἀπὸ ς̄ ιβ̄ μ̄ ϟ. γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ιη̄. ὅπου τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ τετράγωνος τκδ̄. ἔρχομαι ὅπου τὸ ὀξ ἀρχῆς ἰσῶσαι ς̄ γ̄ μ̄ ιη̄ ⏋ δ̄ ᾱ ἴσους τετραγώνῳ. ὧν νῦν πάσων δ̄ τκδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ οη ρξδ̄. τουτέστι ς̄ ρξδ̄. ὅπου τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ς̄ ρξδ̄. ὁ δὲ δεύτερος ιϟ ρξδ̄.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

HIc Diophantus in solutione lemmatis assumpti ad regulas compositas deuoluitur. Sed subtili sane artificio cauet, ne incidat in numeros surdos, cuius defectu cautionis non arbitratus sum ad huiusmodi regulas deueniendum esse vigesima tertia quæstione libri huius. Quamuis enim in proposito ibi exemplo res bene succedat, & solutio contingat rationalis, attamen non ostendit author quomodo id necessario eueniat si aliquo modo mutetur operatio, quod in hac quæstione eleganter præstitit. Cæterùm quid sibi velit Diophantus, non satis adsequutus est Xilander. Putat enim eò quod 5 Q. æquantur 3 N. + 18. æquationem reducendam esse ad 1 Q. diuidendo scilicet omnia per 5. vnde fit 1 Q. æqualis ⅗ N. + $\frac{18}{5}$. Quamobrem cùm Diophantus ait quadratum semissis de 3 N. addendum producto ex 5. in 18. censet Xilander sumi debere semissem non de 3. simpliciter, sed de ⅗. & eius quadratum esse non 2 ¼ simpliciter, sed 2. ½ de ⅗. quæ interpretatio nimis coacta est, & à mente Diophanti prorsus aliena. Tenebras autem effudit Xilandro, ignorantia methodi qua regulas compositas resoluit Diophantus, quam ad trigesimam tertiam primi explicauimus. Nam ad vitandas fractiones, rarò Diophantus æquationem reducit ad 1 Q. Sed ducto numero quadratorum in numerum vnitatum, addit producto quadratum semissis numeri Numerorum, & reliqua perficit, vt loco citato docuimus. Hinc est cur velit 5. numerum quadratorum duci in vnitates 18. & producto 90. addi 2 ½ quadratum semissis numeri numerorum 3. Quoniam verò, vt solutio rationalis sit oportet hac additione fieri quadratum, apparet necessitas lemmatis assumpti. Cum enim numerus quadrato æquandus sit 3 N. + 18 — 1 Q. patet quærendum esse quadratum, qui vnitate auctus & per 18. multiplicatus, itaque adsumens 2 ½. faciat quadratum.

In huius quoque lemmatis explicatione insignis occurrit difficultas, cuius tamen ne verbum quidem Xilander. Cùm enim tandem 72. Q. + 81. æquandus sit quadrato, euidens est quadrati latus commodè fingi non posse, nisi vel quadratorum vel vnitatum numerus, quadratus sit. Ostendendum ergo est necessario euenire vt vnitatum numerus, qualis est hîc 81. quadratus sit alioquin casu, non arte certa res succedere videbitur. Atqui 81. est quadruplum ipsius 20. ¼. Quare vt 81. quadratus sit oportuit prius 20 ¼ quadratum esse. Porro 20. ¼ fit ad 18. addendo 2 ¼. Videndum igitur vnde pro-

uenerint 18. & 2 ¼. factus est autem 18. ex 3. in 6. & 2 ½ est quadratus semissis de 3 N. Fiunt autem 3 N. addendo simul + 6 N. & − 3 N. in multiplicatione 1 N. + 3. per 6 − 1 N. Quare cum ob signorum contrarietatem additio in subtractionem mutetur, patet 3 N. tandem fieri auferendo 3 N. à 6 N. Quamobrem 18. est productus ex 3. in 6. At 2 ½ est quadratus semissis interualli eorundem 3. & 6.

2.2. *Porif.* ' Constat autem producto multiplicationis duorum numerorum addendo quadratum semissis interualli eorundem, fieri quadratum semissis summæ ipsorum. Quare patet propositum; sic vides 20 ¼ seu ½ esse quadratum semissis duorum 3. & 6. seu ipsius ½.

Rursus in fingendo latere quadrati 72 Q. + 81. magna cautio adhibenda est, quod non vidit Xilander, nec attigit ipse Diophantus. Etenim si ad hanc æquationem solum respicias, sufficit si ponas hoc latus 9 + tot Numeris, quorum quadratus sit minor quàm 72. Sed si ponas hoc latus 9 + 6 N. vel 9. + aliquo numero Numerorum minore quàm 6. fiet valor Numeri qui prioribus positionibus nullatenus accommodari poterit, cùm enim eius quadratus æquabitur 3 N. + 18 − 1 Q. fiet 1. N. maior vnitate, quod est absurdum, cùm 1 N. ponatur pars vnitatis. Hoc igitur incommodum vt vitemus, sic ratiocinandum est. Quia 3 N. + 18 − 1 Q. sic quadrato æquandus est, vt fiat 1 N. minor vnitate, in hac autem æquatione debent tandem 3 N. + 18. æquari cuidam quadratorum numero: at si 1 N. ponatur æqualis vnitati, vtique 3 N. + 18. æquabuntur 21 Q. Quo verò minor ponetur valor Numeri, eo maiori numeri quadratorum æquabuntur 3 N. + 18. manifestũ est vt fiat 1 N. minor vnitate oportere vt 3 N. + 18. æquentur numero quadratorum maiori quàm 21. Porro numerus iste quadratorũ fit ex quodam quadrato vnitate auctõ, quare sublata vnitate de 21. consequens est quadratum cui æquari debet 3 N. + 18 − 1 Q. maiorem esse quàm 20. Cum ergo latus proximum ipsius 20. sit 4 ½ manifestũ est, latus quadrati 72 Q. + 8. ita ponendũ esse vt fiat valor Numeri maior quàm 4 ¼. fit autem in hac æquatione valor Numeri, auferendo à 72. quendam quadratum, & per residuum diuidendo productum ex 18. in latus eiusdem quadrati. Igitur $\frac{1\frac{1}{2}\,N.}{1\,Q.}$ maior èsse debet quàm 4 ¼. & tandem re ad integros redacta 18 N. maiores sunt quàm 324 − 4 ½ Q. & addito defectu, atque etiam facto paralaboliſimo, quia commodè potest fieri, tandem 72. maior esse debet quàm 4 N. + 1 Q. Qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. 6 ½ ferè patet latus fictitium ponendum 9 + tot numeris, qui excedant 6 ½. sic Diophantus posuit 9 + 8 N. Poni quoque poterat 9 + 7 N. vel 9 + aliquot Numeris, qui excedant 6 ¼. & quorum quadratus sit minor quàm 72..

Eodem prorsus artificio quæstio hæc ad omnem numerum extendetur. Quod vt exemplo comprobemus. Esto 2. diuidendus in duas partes, vt primæ addendo 3. secundæ 5. & summas inter se multiplicando, fiat quadratus. Esto prima pars 1 N. ergo secunda 2 − 1 N. & si primæ addatur 3. secundæ 5. fiunt 1 N. + 3. & 7 − 1 N. & productus eorum multiplicatione est 4 N. + 21 − 1 Q. æquandus quadrato, videlicet alicui quadratorum Numero quadrato; qui talis sumendus est, vt auctus vnitate, & multiplicatus in 21. itaque adsumens 4. faciat quadratum. Ponatur is 1 Q. Igitur 21 Q. + 25. quadrato æquandus est. Sed curandum vt talis hîc proueniat valor Numeri, vt applicatus priori æquationi, fiat in ea 1 N. minor quàm 2. quia 1 N. ponitur esse pars binarij. Cùm ergo æquando 4 N. + 21 − 1 Q. alicui quadrato, tandem 4 N. + 21. æquentur aliquot quadratis, si autem 1. N. ponatur 2. fiant 4 N. + 21. æquales 7 ½ Q. patet vt fiat 1 N. minor quàm 2. oportere 4 N. + 21. æquari quadratorum numero maiori quàm 7 ¼. Et quia ille quadratorum numerus est quadratus vnitate auctus, auferendo vnitatem de 7 ¼ sequitur quadratum qui æqualis ponetur 4 N. + 21 − 1 Q. maiorem esse debere quàm 6 ¼. atque ideo latus eius maius esse oportet quàm ½. Quamobrem numeri 21 Q. + 25. latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. maior quàm ½. Fit autem 1 N. auferendo quadratum quendam de 21. & per residuum diuidendo decuplum lateris illius. Quare $\frac{1\frac{1}{2}\,N.}{1\,Q.}$ maior esse debet quàm ¼. qua æquatione ritè præparata, tandem fiunt 4 N. + 1 Q. maiores quàm 21. vnde constat 1 N. excedere debere 3. Ponatur igitur latus fictitium 5 + 4 N. fiet quadratus 25 + 40 N. + 16 Q. æqualis 21 Q. + 25. & fiet 1 N. 8. quadratus 64. Redeo ad propositum initio, & 4 N. + 21 − 1 Q. æquo quadrato 64 Q. & fit 1 N. $\frac{43}{63}$. Prima pars binarij. Secunda verò est $\frac{20}{63}$ quæ soluunt quæstionem nam primæ addendo 3. secundæ 5. fiunt $\frac{323}{63}$. & $\frac{115}{63}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{37145}{3969}$ quadratus à latere $\frac{215}{63}$.

QVAESTIO XXXIV.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. Ἔστω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς, καὶ ᾧ μὲν προσθεῶμεν μ̄ γ̄. ᾧ δὲ μ̄ ε̄. καὶ ποιεῖν τὸν ὑπ' αὐτῶν τετράγωνον. τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α̃. καὶ λοιπὸς μ̄ γ̄ ἂς προσλαμβάνει. λοιπὸς

VNITATEM diuidere in duos numeros, & addere vtrique datum numerum, & productum eorum multiplicatione facere quadratum. Sit vnitas diuidenda in duos numeros, & oporteat alteri addere 3. alteri 5. & ita facere quadratum productum multiplicationis eorum

num. Ponatur primus 1 N. — 3. quandoquidem 3. debet illi addi, relinquetur ergo secundus 4 — 1 N. & si primo addantur 3 fit 1 N. si autem secundo addantur 5. fit 9 — 1 N. & fit eorum multiplicatione 9 N. — 1 Q. æqualis quadrato. Esto quadrato 4 Q. & fit 1 N. $\frac{5}{9}$. si ad positiones hoc applicare coner, non possum auferre 3 de 1 N. Oportet igitur numerum maiorem quidem esse quam 3. minorem verò quàm 4. Atqui 1 N. factus est diuiso 9. per 5. Ipse autem 5. est quadratus vnitate auctus. Iam si 9. diuisus per quadratū aliquem vnitate auctum facit numerum maiorem quam 3. oportet eum per quem diuiditur minorē esse quàm 3. sed his per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus. Ergo quadratus vnitate auctus minor est quàm 3. Auferatur vnitas. Igitur quadratus minor est quàm 2. Rursus quia volumus secundum diuisum per quadratū vnitate auctum, facere numerum minorem quàm 4. oportet eum per quem diuiditur maiorem esse quàm 2 $\frac{1}{2}$. Is autem per quem 9. diuiditur est quadratus vnitate auctus, proinde quadratus vnitate auctus maior est quàm 2 $\frac{1}{2}$. Auferatur vnitas. Ergo quadratus maior est quam 1 $\frac{1}{2}$. Sed iam ostensus est minor quàm 2. Eo itaque res deducitur, vt inueniam aliquem quadratum maiorem quàm 1 $\frac{1}{2}$ minorem quàm 2. Resoluo hæc in partes quadratas, nempè in sexagesimas quartas, & sunt 80. & 128. Facilè ergo inuenietur quadratus $\frac{81}{49}$ seu $\frac{81}{49}$. Reuertor ad id quod initio erat propositum. Quærebam 9 N. — 1 Q. æquare quadrato. esto inuento quadrato $\frac{81}{49}$ Q. & fit 1 N. $\frac{81}{49}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{81}{49}$. secundus $\frac{81}{49}$.

ἄρα ὁ δεύτερος ἴσται μ̄ δ̄ λείψει ς̄ ᾱ. καὶ ἐστὶν ὑπὸ τὸν πρῶτον πολλαπλασιασθὲν μ̄ γ̄. γίνεται ς̄ ᾱ. ἐστὶ δὲ τοῦ δευτέρου μ̄ ῑ. γίνεται μ̄ θ̄ λείψει ς̄ ᾱ. καί ἐστιν ὁ ὑπ' αὐτὸν ςξ̄ θ̄ λείψει δ̄ ᾱ ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ ὁ̄. ⸫ γίνεται ὁ ς̄. β̄ ᾱ. ὅτι τὰς ὑποτάσεις. καὶ ἡ δύναμαι ἀφελεῖν ἀπὸ ς̄ ᾱ. μονάδας γ̄. δεῖ οὖν τὸν ς̄ μείζονα μᾶ ἔχ μ̄ Γ̄. ἐλάσσονα δὲ μ̄ δ̄. ὁ δὲ ς̄ δύναται ἐπὶ τῶν τὸν θ̄ μεριθῆναι εἰς τὸν ῑ. ὃς ἐστι τετράγωνος συν̄ μονάδι μιᾷ. εἰ δὲ ὁ θ̄ μεριζόμενος εἰς πια τετράγωνον συν̄ μ̄ ᾱ. ἀεριθμὸν ποιεῖ μείζονα μ̄ Γ̄. εἰς ὃν ἔχ μερίζεται, ἐλάσσων ὄζει τοῦ γ̄. εἰς ὃν δὲ ὁ θ̄ μερίζεται τετράγωνός ὄζει συν̄ μονάδι, ὥστε ὁ τετράγωνος συν̄ μονάδι μιᾷ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ γ̄. καὶ ἥρθω ἡ μονάς. ὁ ἄρα τετράγωνος ἐλάσσων ἐστὶ μ̄ β̄. πάλιν θέλομεν τὸν δεύτερον μερίζοντα εἰς τετράγωνον συν̄ μονάδι μιᾷ ποιεῖν ἀεριθμὸν ἐλάσσονα μ̄ δ̄. εἰς ὃν ἄρα μερίζεται, μείζων ἐστὶ μ̄ β̄. ᾱ ⸫. εἰς ὃν δὲ μερίζεται. ὁ δὲ τετράγωνός ὄζει συν̄ μονάδι μιᾷ, ὥστε ὁ τετράγωνος συν̄ τῇ μονάδι μείζων ὄζει μ̄ β̄. ᾱ ⸫. ⸫ ἥρθω ἡ μονὰς μία. ὥστε ὁ τετράγωνος μείζων ὄζει μονάδος, καὶ ᾱ ⸫. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐλάσσων μ̄ β̄. γίγνοιτο ἂν μοι εὑρεῖν πια τετράγωνον ὃς ὄζει μείζων μ̄ ᾱ. ᾱ ⸫. ἐλάσσων δὲ β̄. καὶ ἀναλύω ταῦτα εἰς μόρια τετραγωνικὰ, εἰς ξδ̄. ⸫ γίνονται π̄. ⸫ ῥητὴ τοῦτο δὲ ὄζει ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν ὁ τετράγωνος ρ̄ ξε̄ ͵. τουτέστι καὶ ις̄ ͵ ἔρχομαι ἵνα ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ ἰζήτουν ςς̄ θ̄. λείψει δ̄ α ἴσα τετραγώνῳ. τουτέστι τοῦ εὑρεθέντος, δ̄ καὶ ις̄ ͵. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ρυδ̄ μᾱ ͵. ὅτι τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος καὶ μᾱ ͵. ὁ δεύτερος καὶ μᾱ ͵.

IN QVAESTIONEM XXXIV.

EADEM est quæstio hæc cum præcedente, sed diuersa operatio, qua videtur Diophantus rem absoluere voluisse absque auxilio regularum compositarum. Nam ita suas instituit positiones, vt tandem fiat 9 N. — 1 Q. quadrato æquandus, quod fit per simplicem æquationem qua quadrati Numeris æquales sunt, & fit valor Numeri diuidendo 9. per aliquem quadratum vnitate auctum. Quoniam verò altera pars vnitatis posita est 1 N. — 3. altera 4 — 1 N. debere esse maiorem quàm 4. Igitur quærendus est quadratus qui vnitate auctus, & diuidens 9. det quotientem minorem quàm 3. maiorem quàm 4. Quare cùm diuidendo 9. tum per 3. tum per 4. fiant 3. & 2. $\frac{1}{2}$. patet quadratum vnitate auctum consistere debere inter 3. & 2 $\frac{1}{2}$. ac proinde auferendo vtrimque vnitatem, quærendus erit quadratus minor quàm 2. maior quàm 1 $\frac{1}{2}$. Tales infiniti reperientur reducendo 2. & 1 $\frac{1}{2}$ ad fractiones quadratas ab eodem aliquo quadrato maiore denominatas, vt fecit Diophantus qui reduxit ad sexagesimas quartas.

Cæterùm & hanc operationem cuilibet numero applicabimus, quod iam antè nos præstitit Vieta noster zetetico 13. lib. 5. Sit diuidendus 3. in duas partes, vt alteri addendo 6. alteri 12. & summas in-

ter se multiplicando, fiat quadratus. Ponatur pars altera 1 N. — 6. altera ergo erit 9. — 1 N. & primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt 1 N. & 21. — 1 N. quorum mutuo ductu producitur 21 N. — 1 Q. æquandus quadrato. Sed ex ipsis positionibus apparet quærendum esse quadratum qui vnitate auctus & diuidens 21. det quotientem maiorem quàm 6. minorem quàm 9. Itaque cum 21. diuisus tum per 6. tum per 9. det quotientes 3 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{3}$. Quadratus vnitate auctus sumendus erit inter 3 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{3}$. & ablata vnitate quærendus quadratus minor quàm 2 $\frac{1}{3}$. maior quàm 1 $\frac{1}{2}$. Reducatur vterque ad trigesimas sextas, fient $\frac{77}{36}$ & $\frac{72}{36}$ inter quos sumi possunt quadrati proposito satisfacientes $\frac{75}{36}$. $\frac{74}{36}$. $\frac{73}{36}$. si sumas vltimum seu $\frac{73}{36}$ æquabis $\frac{73}{36}$ Q. & 21 N. — 1 Q. vnde fiet 1 N. $\frac{11}{12}$. Sunt ergo quæsitæ partes ternarij $\frac{1}{12}$. & $\frac{11}{12}$. quæ soluunt quæstionem, nam primæ addendo 6. secundæ 12. fiunt $\frac{73}{12}$ & $\frac{133}{12}$ quorum mutuo ductu fit $\frac{1369}{144}$ quadratus à latere $\frac{37}{12}$.

Sed & aliam analysim huic soluendæ quæstioni excogitauimus, Diophantæa vtraque non deteriorem, atque etiam faciliorem. sit 2. numerus diuidendus, & addendi 3. & 5. patet ergo summarum aggregatum fore 10. Quare res eò deducitur vt 10. diuidatur in duos planos similes, quorum alter supereat 3. alter excedat 5. Sic enim ab altero auferendo 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes. Porrò 10. diuidetur in duos huiusmodi planos similes hac arte. Sumpto minore addendorum 3. comparo illum cum residuo de 10. puta cum 7. & quæro duos quadratos, quorum sit minor ratio quàm 3. ad 7. quales sunt 4 & 9. vel 9. & 16. & alij infiniti. Diuidatur ergo 10. in duos numeros in ratione 4. ad 9. Inuenientur hi per Canonem secundæ primi $\frac{40}{13}$ & $\frac{90}{13}$. Quare si ab altero detraxero 3. ab altero 5. remanebunt quæsitæ binarij partes $\frac{1}{13}$ & $\frac{11}{13}$. Rursus si diuisero 10. in duos numeros seruantes rationem 9. ad 16. erunt hi $\frac{90}{13}$ & $\frac{160}{13}$ & à primo auferendo 3. à secundo 5. remanent quæsitæ binarij partes $\frac{1}{13}$ & $\frac{11}{13}$.

Eadem arte licebit & sequentes quæstiones soluere.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum in duas partes secare, vt ab vtraque auferendo datum numerum, ex residuorum mutuo ductu, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse summa detrahendorum numerorum.

Diuidendus sit 12. in duas partes, vt altera auferendo 3. ab altera 5. ex residuorum mutuo ductu, quadratus fiat. Ponatur altera 1 N. + 3. altera ergo erit 9. — 1 N. & à prima auferendo 3. à secunda 5. remanent 1 N. & 4 — 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N — 1 Q. æquandus quadrato. Esto cuilibet quadratorum numero quadrato, puta 9 Q. fiet 1 N. $\frac{1}{10}$ Sunt ergo partes quæsitæ 3 $\frac{1}{10}$ & 8 $\frac{1}{10}$. & soluunt quæstionem.

Aliter. Quoniam summa detrahendorum est 8. qua ablata de 12. supereat 4. oportet diuidere 4. in duos quoscunque planos similes, sic enim alteri addendo 3. alteri 5. fient quæsitæ partes numeri 12.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum secare in duas partes, vt vtramque auferendo à dato numero, ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum minorem esse summa numerorum, à quibus partes detrahendæ sunt.

Diuidendus sit 4. in duas partes, vt alteram auferendo à 3. alteram à 5. ex residuorum mutuo ductu fiat quadratus. Ponatur altera 3 — 1 N. altera ergo erit 1. + 1 N. & primam auferendo à 3. secundam à 5. remanent 1 N. & 4 — 1 N. quorum mutuo ductu fit 4 N. — 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est, vt vnitate auctus & diuidens 4. det quotientem minorem quàm 3. quia scilicet altera pars posita est 3 — 1 N. At diuidendo 4. per 3. fit $\frac{4}{3}$. patet ergo quadratum vnitate auctum, debere esse maiorem quàm $\frac{4}{3}$ & ablata vnitate, quadratus debet esse maior quàm $\frac{1}{3}$. sit is 9 Q. fiet 1 N. $\frac{1}{3}$. Sunt ergo quæsitæ partes 2 $\frac{1}{3}$ & 1 $\frac{1}{3}$. & soluunt quæstionem.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum secare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, ab altera datum etiam numerum detrahendo, ex mutuo ductu summæ & residui, fiat quadratus. Oportet autem numerum diuidendum maiorem esse detrahendo.

Sit diuidendus 8. in duas partes, vt alteri addendo 3. ab altera detrahendo 5. ex summa in residuum fiat quadratus. Ponatur altera pars 1 N. — 3. ergo altera erit 11 — 1 N. & primæ addendo 3. à secunda auferendo 5. fiunt 1 N. & 6 — 1 N. Quorum mutuo ductu fit 6 N. — 1 Q. æquandus quadrato, qui sic ponendus est vt vnitate auctus & diuidens 6. det quotientem maiorem quàm 3. Quare cùm diuidendo 6. per 3. fiat 2. patet quadratum vnitate auctum debere esse minorem quàm 2. & detracta vnitate,

ſumendus erit quadratus minor quàm 1. Ponatur $\frac{1}{4}$ Q. fiet 1 N. $\frac{1}{16}$. ſunt ergo quæſitæ partes $\frac{3}{4}$ & $\frac{15}{16}$.

QVÆSTIO QVARTA

Datum numerum ſecare in duas partes, vt alteri addendo datum numerum, alteram detrahendo a dato numero, ex ſumma in reſiduum fiat quadratus.

Hic duplex caſus datur, quia numerus à quo fit detractio nunc minor, nunc maior eſſe poteſt numero diuidendo. Primùm ergo ſit 8. ſecandus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundam auferendo à 5. fiat quod poſtulatur. eſto ſecunda 5 − 1 N. ergo prima erit 3 + 1 N. & ſecundam auferendo à 5. & addendo 3. primæ fiunt 1 N. & 6 + 1 N. quorum mutuo ductu fit 6 N. + 1 Q. æquandus quadrato. qui ſic ponendus eſt, vt multatus vnitate & diuidens 6. det quotientem minorem quàm 5. Quare cùm diuiſo 6. per 5. fiat $\frac{6}{5}$. patet quadratum vnitate multatum, debere eſſe maiorem quàm $\frac{6}{5}$. & addita vnitate, ſumendus eſt quadratus maior quàm $\frac{11}{5}$. eſto 9. Q. fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. Sunt ergo quæſitæ partes prima $\frac{11}{20}$ ſecunda $\frac{17}{20}$.

Deinde ſit 8. ſecandus in duas partes, vt primæ addendo 3. ſecundam auferendo à 20. fiat quod petitur. Ponatur ſecunda 20 − 1 N. ergo prima eſt 1 N. − 12. & ſecundam auferendo à 20. addendo 3. primæ, fiunt 1 N. & 1 N. − 9. quorum mutuo ductu fit 1 Q. − 9. N. æquandus quadrato, qui talis ponendus eſt vt detracto eo ab vnitate, & per reſiduum diuidendo 9. fiat quotiens minor quàm 20. maior quàm 12. Cum itaque diuidendo 9. tum per 20. tum per 12. fiant $\frac{9}{20}$ & $\frac{9}{12}$. & vtrumque auferendo ab vnitate, relinquantur $\frac{11}{20}$ & $\frac{3}{12}$. patet ſumendum eſſe quadratum maiorem quàm $\frac{3}{12}$. minorem quàm $\frac{11}{20}$. ſumatur $\frac{1}{2}$ Q. fiet ergo 1 N. $\frac{1}{2}$ & erunt quæſitæ partes. Prima $\frac{1}{4}$ ſecunda $\frac{3}{4}$.

QVÆSTIO XXXV.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt qui fit primo in ſecundum ducto, ſiue addito tertio, ſiue detracto quadratum faciat. Eſto datus 6. Ponatur tertius 1 N. ſecundus vnitatum aliquot quæ ſint minus quàm 6. puta 2. Primus ergo erit 4 − 1 N. Reſtant duo poſtulata, nimirum vt productus ex primo in ſecundum, tertio ſiue addito ſiue detracto faciat quadratum. Et occurrit duplicata æqualitas, nam 8 − 1 N. æquantur quadrato, & 8 − 3 N. æquantur quadrato. Expediri autem non poteſt, quia numeri inter ſe non habent rationem quam habet quadratus ad quadratum. Sed 1 N. vnitate minor eſt quàm 2. & 3 N. vnitate maior eodem 2. Eò itaque res deducta eſt, vt inueniam numerum aliquem loco ipſius 2. vt qui eo vnitate maior eſt ad eum qui vnitate minor eſt eodem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Eſto quæſitus 1 N. erit ergo vnitate maior 1 N. + 1. At vnitate minor 1 N − 1. Volumus igitur hos inter ſe rationem habere quam habet quadratus ad quadratum, ſit vt 4. ad 1. Itaque cùm ducto 4. in 1 N. − 1. fiat 4 N. − 4. & ducto 1. in 1 N. + 1. fiat 1 N. + 1. vt habeant expoſiti numeri rationem quam habet quadratus ad quadratum. erunt, 4 N. − 4.

Δοθεντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου ἑαυτῷ προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἑαυτῷ λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς ὁ η̄. τετάχθω ὁ τρίτος ς̄ α. καὶ ὁ δευτέρῳ μ̄ ὑπερ ὃν τὸ η̄. ἔστω μ̄ β̄. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ̄ δ̄ λείψει ς̄ ᾱ. καὶ λοιπὰ ὀφει δύο ὑποτάγματα, τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου ἑαυτῷ προσλάβῃ τὸν τρίτον, ἑαυτῷ λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον, καὶ γίνεται διπλῆ ἡ ἰσότης μ̄ ἢ λείψει ς̄ ᾱ. ἴσαι τετραπλασίοις, καὶ μ̄ ἢ. λείψει ς̄ ϛ̄ ἴσαις τετραπλασίοις, καὶ ἡ μὲν ὑπόθεσις ὅτι διὰ τὸ μὴ εἶναι τοὺς ς̄ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχοντας, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀλλὰ ὁ ς̄ ᾱ. μονάδι ἐλάσσων τοῦ β̄. οἱ δὲ ς̄ ϛ̄ ὁμοίως μείζονες μονάδι τοῦ β̄. ἀπῖκε) ἵν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὡς τ β̄. ἵνα ὁ μονάδι μεῖζον αὐτοῦ μείζων, ἔσται ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. ὁ δὲ μονάδι αὐτοῦ μείζων, πρὸς τ μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα, λόγον ἔχῃ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστω ὁ ζητούμενος ς̄ ᾱ. καὶ μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσων ς̄ ᾱ. λείψει μ̄ ᾱ. διελωμεν οὖν αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν ἔστω δ̄ πρὸς ᾱ. ὥστε ς̄ εἰς λείψει μ̄ ᾱ ὅτι μονάδας δ̄. γίνεται ς̄ δ̄ λείψει μ̄ δ̄. καὶ ς̄ εἰς μ̄ ᾱ ὅτι τῶν μονάδα μίαν γίνεται ς̄ ᾱ. καὶ εἰσὶν ὅτοι οἱ ἐκκείμενοι ἀριθμοὶ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον

ἀριθμόν. νῦν ζ^ῳ δ̄. λείψει μ^ο δ̄. ἴσοι ς^ϖ ᾱ μ^ο ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς^ι. μ^ο ῑ ^γ̄. πάλιν ὧν τὸν δεύτερον μ^ο ῑ ^γ̄. ὁ γὰρ τρίτος ὄζει ς^ο ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται μ^ο ιη̄ ^γ̄. λείψει ς^ο ᾱ. λοιπὸν δεῖ τὸ ὑπόταγμα τοῦτο τὸν ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου περιλαβόντα τὸν τρίτον ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου περιλαβὼν τὸν τρίτον ποιεῖ μ^ο ξῑ ^δ̄. ϙβ ^γ̄. ςξ̄ ἴσα τετραγώνῳ. λείψας δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μ^ο ξῑ ^δ̄. λείψει ςξ̄ ῑ ^γ̄. ἴσα τετραγώνῳ, καὶ πάντα εἰς ἑ δ̄. ℭ γίνονται μ^ο ξῑ. λείψει ςξ̄ ϛ̄ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ^ο ξῑ ϙ ςξ̄ κδ̄ ἴσοι τετραγώνῳ. ℭ ἐξισῶ τὰς ς^ας τῆς μιᾶς ἰσότητος πεμπτας τεσσάρας. ℭ ἔσι μ^ο σξ̄ ϙ ςξ̄ κδ̄ ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ μ^ο ξῑ λείψει ςξ̄ κδ̄ ἴσοι τετραγώνῳ. νῦν τούτων λαμβάνω τὴν ὑπεροχήν, καὶ ἔσι μ^ο ρϛ̄. καὶ διπλάσιαι δύο ἀριθμοὶ ὧν τὸ ὑπὸ ὅζει μ^ο ρϛ̄. καὶ εἰσὶ ιε̄. καὶ ιγ̄. καὶ τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἴσον ὅζει τῷ ἑλάσσονι τετραγώνῳ. καὶ γίνεται ὁ ς^ι μ^ο ῑ ^γ̄. ὅλαι τὰς ὑποστάσεις, ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ῑ ^γ̄. ὁ δὲ δεύτερος ῑ ^γ̄. ὁ δὲ τρίτος ῑ ^γ̄. καὶ ἡ διπλῆ εἰς φανερά.

æquales 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Pono igitur secundum $\frac{1}{3}$ nam tertius est 1 N. ergo primus erit $\frac{11}{3}$ — 1 N. Restat vt postulata perficiantur, videlicet vt productus ex primo in secundum siue adscito tertio, siue dempto faciat quadratum. Sed productus ex primo in secundum adicito tertio facit $\frac{11}{9}$ — $\frac{1}{3}$ N. hoc ergo æquatur quadrato, & idem productus dempto tertio facit $\frac{11}{9}$ — $\frac{4}{3}$ N. hoc etiam æquatur quadrato. Omnia nouies, fiunt 65 — 6 N. æqualia quadrato. & 65 — 24 N. æqualia quadrato. Exæquo numeros æquationis vnius, multiplicans per 4. & est 260 — 24 N. æqualis quadrato, itemque 65 — 24 N. æquatur quadrato. Horum nunc interuallum sumo quod est 195. & expono duos numeros, quorum mutuo ductu fiat 195. ij sunt 15. & 13. Horum interualli semissis in se æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. erit primus $\frac{5}{2}$. secundus $\frac{3}{2}$. tertius $\frac{1}{2}$. & demonstratio est euidens.

OBSERVATIO D. P. F.

ITA facilius fiet operatio, datus numerus 6. vtcunque diuidatur v. g. in 5. & 1. productus demptâ vnitate hoc est 4. per 6. datum numerum diuidatur, eueniet $\frac{2}{3}$. Quem si tum à 5. tum ab 1 abstuleris duo residua $\frac{13}{3}$ & $\frac{1}{3}$ erunt duæ priores partes numeri diuidendi 3. igitur erit $\frac{1}{3}$.

IN QVAESTIONEM XXXV.

QVID hic præstiterim in Diophanto restituendo coniicere est ex versione Xilandri, cùm in codicem emendatiorem non inciderim, sed textus lacunas replere, & passim deprauata emendare certissimis coniecturis coactus sim; vbi legebatur ipso initio καὶ ὁ δεύτερος μ^ο ὑπερ ὧν τὸ ιγ̄ restitui ὑπερ ὧν τὸ ς̄. vt sit sensus, Ponendum secundum aliquot vnitatum super quas sit 6. ideſt quæ sint minus quàm 6. quod necesse est vt pars inueniatur minor toto.

Cæterum emendato textu satis perspicua est operatio Diophanti; vtitur duplicata æqualitate eo modo quem explicauimus ad decimam octauam tertij, & nihil amplius hîc addendum, nisi quod limitationes quædam attendendæ sunt, quibus neglectis in absurdum aliquod incidamus necesse est. Primùm ergo cùm quæritur numerus qui vnitate auctus ad seipsum vnitate multatum rationem habeat quadrati ad quadratum, vnde colligitur 1 N. + 1. ad 1 N. — 1. debere esse in ratione quadrati ad quadratum, non temerè sumendi sunt duo quadrati quibus propositi numeri proportionales sint. Etenim 1 N. debet esse secundus Numerus quæsitorum, ac proinde pars totius numeri diuidendi 6. & per consequens minor quàm 6. Quamobrem tales duo quadrati deligendi sunt quorum summa, ad ipsorum interuallum minorem rationem habeat quàm 6 ad 1. Alioquin 1 N. maior inuenietur quàm 6. vt si esse ponatur 1 N. + 1. ad 1 N. — 1. sicut 49. ad 36. fiet enim per decimam nonam septimi 36 N. + 36. N. + 36. æqualis 49. N. — 49. & tandem 1 N. fiet 6. $\frac{1}{13}$. Quod est absurdum.

Deinde in duplicata æqualitate resoluenda cùm quæruntur duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 195. hi tales sumendi sunt vt quadratus semissis summæ eorum sit minor quàm 260. vel vt quadratus semissis interualli eorundem sit minor quàm 65. quia scilicet numeri quadrato æquandi sunt 260 — 24 N. & 65 — 24. N. Quare cùm latus proximum de 65. sit 8. Oportet interuallum eorum non excedere 16. Ideirco sumi non potuerunt 194. & 1. neque 39. & 5. neque vlli integri præter 15. & 13. quos sumpsit Diophantus, sed per fractiones infinitis modis res expediri poterat.

QVÆSTIO XXXVI.

INVENIRE duos numeros, vt si alter ab altero eandem partem siue easdem partes acceperit, ratio ad reliquum sit ea quæ poscitur. Iubeatur vt primus accipiens secundi partem aliquam vel partes, sit ad residuum triplus. At secundus sumens à primo eandem partem, vel easdem partes, sit residui quincuplus. Ponatur secundus 1 N + 1. Pars autem vel partes eius esto 1. Primus igitur erit 3 N — 1. sic enim primus sumens à secundo partem aliquam vel partes, nimirum 1. fit residui triplus. Volumus itaque & secundum sumentem primi eandem partem, vel easdem partes, residui quincuplum esse. Sed quoniam ambo simul faciunt 4 N. & secundus aliquid accipit, primusque id dat, & summa residui fit quincupla. Cæterùm summa eadem cum residuo iuncta facit 4 N. residuum vtique habebitur si sumamus sextantem de 4 N. nempe ⅔ N. si ergo à 3 N. — 1. tollamus ⅔ N. habebimus primi partem vel partes. Si autem tollamus, relinquitur ⅓ N. — 1. Hoc ergo pars est vel partes primi. Nam secundus accipiens à primo ⅔ N. — 1. fit quincuplus ad residuum ex primo. Superest hîc vt quæramus an quæ pars vel partes est 1. de 1 N + 1. eadem pars, vel eædem partes fit ⅔ N — 1. de 2 N. — 1. Cùm autem tale aliquid quæris productum ex ⅔ N. — 1. in 1 N. + 1. æquale est producto ex 3 N. — 1. in 1. hoc est partes alternatim multiplicantur, & fiunt ⅔ Q. + ⅔ N. — 1. æqualia 3 N. — 1. & fit 1 N. ⅗. Ad positiones. Erit primus ⅗. secundus ⅘. Erat autem 1. partes secundi, videamus ergo quæ partes secundi sit 1. Est vtique ⅖. Multiplico per 7. duos numeros; erit primus 8. secundus 12. Partes autem ⅖. Et quia primus non habet duodecimam, multiplico per 3. vtrumque, ne incidamus in diuisionem vnitatis, & fit primus 24. secundus 36. Partes autem seu ⅖ illius quidem 14. Huius verò 21. & demonstratio manifesta.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἑτέρου λαβὼν τὸ ἑτέρου μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη λόγον ἔχῃ πρὸς ἃ ἀπολείφθησαι, καὶ ὅπως ὁ ἕτερος λαβὼν τὸ ἑτέρου μέρος τί, ἢ μέρη, τοῦ λοιποῦ ἓν πενταπλάσια, καὶ ἔτι ὁ δεύτερος λαβὼν τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ ἓν πενταπλάσια. ὑπάρχω ὁ β δύο ς᾽ α μ᾽ α. τὸ δὲ μέρος ἢ μέρη αὐτοῦ ἴσα μ᾽ ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἴσος ες γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. καὶ ὁ πρῶτος ἐπὶ πρῶτον λαβὼν τὸ δευτέρου μέρος τὸ, ἢ μέρη, τουτέστι μ᾽ ᾱ. γίνεται τοῦ λοιποῦ τεσσαρακοντάκις. θέλομεν δὴ καὶ τὸν δεύτερον πρῶτον λαβόντα τὸ πρώτου τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, τοῦ λοιποῦ ἓν πενταπλάσια. ἀλλ᾽ ἐπεισελθοι δύο εἰσὶν ες᾽ καὶ ὁ δεύτερος λαμβάνει τὶ, καὶ ὁ πρῶτος δίδωσι, καὶ ὁ γεγόμενος τοῦ λοιποῦ γίνεται πενταπλάσιον, ὥστε ὁ συναμφότερος ὁ γεγονὼς καὶ ὁ λοιπὸς ἴσοι εἰσὶ, ες ϙ̄ ὥστε ὁ λοιπὸς ἴσος ἐστὶ πλ̄ ες δ᾽ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τουτέστι ες β γ̄. ἰσάκις ἄρα διπλ̄ ες γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. ἀφῶμεν ες β γ̄. ἴσος ἐστὶ τῷ πρώτου μέρει ἢ μέρη. ἰσάκις δὲ ἀφῶμεν, γίνεται ες ζ γ̄. ϛ μ᾽ ᾱ. τοῦτο ἄρα τοῦ πρώτου μέρος ὄντος ἢ μέρη. λαβὼν γὰρ ὁ δεύτερος πλ̄ τοῦ πρώτου ες ζ γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. γίνεται πενταπλάσιον τοῦ καταλιμπανομένου τοῦ πρώτου. λοιπὸν δεῖ ἐνθάδε ζητῆσαι, εἰ ὁ μέρος ὄντος ἢ μέρη μονὰς μία, ς᾽ ἑνὸς μ᾽ ᾱ. τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τοῖς αὐτοῖς μέρη ες Γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. εἰσὶ οἱ ες᾽ ζ γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. ὅταν δ᾽ ἐπὶ τοιοῦτο ζητῶμεν, τὸ ὑπὸ τῶν ες ζ γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. καὶ ς᾽ ᾱ μ᾽ ᾱ. ἴσον ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ες γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. δηλ̄ τῷ μονάδι. τουτέστι τοῖς μέρη ἑναλλὰξ πολλαπλασιάζεται, ὧν εἰσιν δ᾽ ζ γ̄. ες᾽ δ᾽ γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. ἴσαι ἀριθμοῖς γ̄. λείψει μ᾽ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς᾽ ᾱ ζ̄. δηλ̄ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος η̄ ζ̄. ὁ δὲ δεύτερος ιβ ζ̄. ἵνα δὲ τὸ δευτέρου μέρη μ᾽ ᾱ. σκεπτόμεθα δὲ μέρη ἢ μ᾽ ᾱ. τοῦ δευτέρου, ὄντι δὲ ζ ιϛ̄. καὶ ποιεῖ ἐπτάκις τοὺς δύο ἀριθμούς. ἔσται ὁ πρῶτος μ᾽ η̄. ὁ δεύτερος μ᾽ ιβ̄. τὰ δὲ μέρη ζ ιϛ̄. ἀλλὰ ἐπεὶ ὁ πρῶτος οὐκ ἔχει δωδέκατον ποιεῖ αὐτὰ τρίς, ἵνα μὴ εἰς μονάδα ἐμπίπτοι. ἔσται ὁ πρῶτος κδ̄. ὁ δεύτερος λϛ̄. τοῦ γὰρ μέρη ζ ιϛ̄. τοῖς μὲν ιβ̄. τοῖς δὲ κᾱ. καὶ ἡ δοθεῖσα φανερά.

IN QVAESTIONEM XXXVI.

INGENIOSA operatione quæstionem hanc soluit Diophantus. Sed emaculato textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua. Cæterùm placet & aliam tradere analysim paulò compendiosiorem. Ponatur quæsitorum numerorum summa quotlibet vnitatum, puta 12. & sit primus 1 N. secundus 12 − 1 N. Cum ergo primus sumpta parte secundi fiat triplus ad reliquum, si 12. diuidatur in partes seruantes proportionem triplam; per secundam primi nempe in 9. & 3. patet primum sumpta parte secundi fore 9. Quare inde detrahendo primum, fiet pars secundi 9 − 1 N. similiter diuiso 12. in partes seruantes rationem quincuplam, puta in 10. & 2. patet secundum sumpta parte primi, fore 10. Quare inde auferendo secundum, fiet pars primi 1 N. − 2. Restat igitur, vt 1 N. − 2. sit eadem pars de 1
10. *septim.* N. quæ pars est 9 − 1 N. de 12 − 1 N. Quamobrem hi quatuor numeri sunt proportionales, ac proinde planus sub extremis æquatur plano sub me diis, ideſt 14 N. − 1 Q. − 24. æquatur 9 N. − 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. suntque quæsiti numeri $\frac{7}{2}$ & $\frac{1}{2}$. Quod si communem denominatorem abiicere libeat, fient quæsiti numeri 24. & 36. iidem quos reperit Diophantus. Supponimus enim cum Diophanto inuentis semel duobus numeris quæstionem soluentibus, idem euenire duobus aliis quibuscunque sumptis in eadem ratione. Quod facile est demonstrare, quia de partibus proportionalibus agitur numerorum proportionalium, vt tibi considerandum relinquo.

QVAESTIO XXXVII.

ΕΥΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρων ποιῇ τ δοθέντα ἀριθμόν, πλείονα μ̄ η̄. πετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ α̃. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ γ̄. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρων ἔστιν ἀριθμὸς δ μ̄ γ̄. ταῦτα ἴσα μ̄ η̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ῑ ᾱ. δεῖ τὰς ὑποσάσεις. ἔστω ὁ πρῶτος μ̄ ῑ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος μ̄ γ̄. νῦν σκέπτομαι ὁ ς̄ πόθεν ἠγέγετο ῑ ᾱ. ἐκ τῶν τ ῑ μερισθέντα εἰς τοὺς ςς̄ δ. ἀλλ' ὁ πέντε ἔστιν ἐκ δ ὑπερέχεις τῶν η̄. ἃς ὑπερέχει τ γ̄. οἱ δὲ ςς̄ δ̄. εἰσὶν ὁ μονάδι μείζων τοῦ δευτέρου. καὶ ἄφες τὸν δεύτερον ς̄ οἷον δήποτε, καὶ ἄφες αὐτὸν ἀπὸ μ̄ η̄. καὶ τὰ λοιπὰ μερίσω τῇ δὲ τ μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔξω τ πρῶτον. οἷον, ἔστω ὁ δεύτερος ς̄ α λείψει μ̄ α̃. ταῦτα ἄφες ἀπὸ μ̄ η̄. λοιπὰ μ̄ ϛ λείψει ς̄ α̃. ταῦτα μερίζω εἰς τὸν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ςς̄ α̃. καὶ γίνεται μ̄ θ̄ ϛ̄ ῑ α̃ ᾱ. ἔστω ὁ πρῶτος. καὶ λέλυται ἐν τῇ ἀορίστῳ, ὥστε τ ὑπ' αὐτῶν μὴ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ η̄. τὸ δὲ ἐν τῇ ἀορίστῳ τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τ ἀριθμὸν ὅσον ἄν τις θέλει μονάδων ᾖ δεῖ τὰς ὑποσάσεις.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus ex ipsorum multiplicatione cum vtriusque summa datum faciat numerum. Faciat autem 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione cum summa vtriusque fit 4 N. + 3. Hæc æquantur 8. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{5}{4}$. secundus 3. Nunc considero vnde 1 N. sit factus $\frac{5}{4}$. nimirum ex diuisione 5. per 4. sed 5. est excessus quo 8. superat 3. Et ipse 4. est secundus vnitate auctus. Si ergo statuam secundum numerorum quotlibet. Et auferam eum de 8. & residuum diuidam per secundum vnitate auctum, habebo primum. Verbi gratia sit secundus 1 N. − 1. hæc aufero de 8. restant 9 − 1 N. Hæc diuido per secundum vnitate auctum, id est per 1 N. & fit primus $\frac{9-1\mathrm{N}}{1+1\mathrm{N}}$. Et sic indefinitè soluta est quæstio, nam productus ex eorum multiplicatione, cum vtriusque summa facit 8. Indefinitè autem solui dicitur, quia quotcunque vnitatum ponatur 1 N. satisfaciet postulatis.

IN QVAESTIONEM XXXVII.

QVID sit indefinitè quæstionem soluere, iam alibi docuit Diophantus, & hîc rursus explicat. Id enim fit cùm ita instituuntur positiones, vt quilibet numerus sumi possit pro valore Numeri. Quod tamen cautè accipiendum est. Etenim sæpè contingit non omnem omnino numerum sumi posse pro valore Numeri, sed omnem qui cadat intra certos limites. Vt in hypothesi Diophanti, cùm alter quæsitorum sit 1 N. − 1. alter $\frac{1}{1+1\mathrm{N}}$ patet 1 N. maiorem esse debere quàm 1. minorem quàm 9. Quod si ponas alterum quæsitorum 1. N. erit alter $\frac{1}{1+1\mathrm{N}}$. vnde patet pro valore Numeri sumi posse

quemlibet numerum minorem quàm 8. Porrò de huiusmodi terminis intra quos sumi debet valor Numeri, plura dicemus infrà ad quadragesimam primam.

QVÆSTIO XXXVIII.

INVENIRE tres numeros, vt qui fiunt ex binorum mutuo ductu, adscita eorundem summa, faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Imperatum sit vt productus ex primo in secundum adscito vtroque faciat 8. Productus ex secundo in tertium cum vtroque faciat 15. Denique productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. Quoniam igitur volo productum ex primo in secundum cum vtroque facere 8. si posuero secundum quemlibet, & eum de 8. detraxero, & residuum diuisero per vnitate maiorem secundo, habebo primum. Ponatur secundus 1 N — 1. & si eum abstulero de 8. & residuum diuisero per vnitate maiorem secundo, erit vtique primus $\frac{9}{1N}$ — 1. Rursus simili ratione, quandoquidem volo productum ex secundo in tertium cum vtroque facere 15. Ab his aufero 1 N. — 1. & residuum diuido per vnitate maiorem secundo, hoc est per 1 N. fiunt $\frac{16}{1N}$ — 1. tantus est tertius. Superest vt productus ex primo in tertium cum vtroque faciat 24. facit autem $\frac{25}{1Q}$ — 1. Hæc æquantur 24. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{18}{25}$. secundus $\frac{1}{2}$. tertius $\frac{32}{25}$. & omnia ad eundem denominatorem, fit primus $\frac{36}{50}$. secundus $\frac{25}{50}$. tertius $\frac{64}{50}$.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ ὁπωνῶν πλευρῶν συναμφοτέρων ποιῇ δοθέντας ἀριθμούς. δεῖ δὲ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι μονάδι ἐλάττονας. ὑπάρχω δὴ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ η̄, τὸν ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ ῑε̄. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ κδ̄. ἐπεὶ οὖν θέλω τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ η̄. ἐὰν ἄρα τάξω τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ ἀπὸ μονάδων η̄ ἄρα αὐτὸν, καὶ τὸν λοιπὸν μερισμὸν τῆς μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἕξω τὸν πρῶτον. τετάχθω ὁ δεύτερος ς̄ α̃ γ̄ μ̄ α̃. καὶ ἐστὶν ἀπὸ μ̄ η̄ ἄρα αὐτὰ, καὶ ς̄ α̃ λοιπὰ μερισμὸν τῆς μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, ἔστιν ὁ πρῶτος ϛ̄ ιη̄ϛ̄ δ̄ιν̄. λείψει μ̄ α̃. πάλιν ὁμοίως ἐπεὶ θέλω τὸν ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ ῑε̄. ἀφέλω ς̄ α̃. λείψει μ̄ α̃. καὶ τὸν λοιπὸν μερισμὸν εἰς τὴν μονάδι μείζονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς̄ α̃. γίνονται ις̄ ϖ̄α̃ δ̄ιν̄. λείψει μ̄ α̃. ἔξω τὸν τρίτον. λοιπὸν ὄζι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου μετὰ συναμφοτέρων ποιεῖν μ̄ κδ̄. ποιοῦσι μ̄ ρμδ̄ ϖ̄α̃. λείψει μ̄ α̃. ταῦτα ἴσα μ̄ κδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ιβ̄ ϖ̄α̃. ὅπερ ταῖς ὑποκάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος λη̄ ϖ̄α̃ ὁ δὲ δεύτερος ζ̄ ϖ̄α̃. ὁ δὲ τρίτος ξη̄ ϖ̄α̃. καὶ πάντα εἰς τὴν μέσην, καὶ γίνεται ὁ πρῶτος ρξ̄ ϖ̄α̃. ὁ δεύτερος πδ̄ ϖ̄α̃. ὁ δὲ τρίτος σμ̄ ϖ̄α̃.

IN QVAESTIONEM XXXVIII.

CVR hîc requirat Diophantus datos numeros esse quadratos vnitate multatos, ratio est euidens; Cùm enim verbi gratia 25 Q. æquentur 144. vt solutio esset rationalis, oportuit diuidendo vnitates per quadratos, quotientem fieri quadratum, fit autem 25. addita vnitate ad 24. vnum datorum numerorum. Similiter 144. fit ex mutuo ductu 9. & 16. qui fiunt addita vnitate ad datos numeros 8. & 15. vnde sequitur ipsum 144. esse quadratum, cùm ex duorum quadratorum multiplicatione oriatur. Quamobrem quadrato 144. per quadratum 25. diuiso, produci quadratum necesse est, & proinde solutionem contingere rationalem.

Porrò ex his apparet conditionem hanc nimis strictè proponi à Diophanto, non enim erat necesse 144. & 25. quadratos fuisse, sed sufficiebat vt essent quadratorum similes, cùm certum sit huiusmodi numerorum siue multiplicatione, siue diuisione mutua semper procreari quadratum. Ita igitur præscribi debuit hæc conditio. *Oportet autem si cuilibet datorum numerorum addatur vnitas, productum ex binorum multiplicatione, ad reliquum habere rationem quadrati ad quadratum.* Verbi gratia. Summa primi & secundi adscito plano sub ipsis contento esto 11. secundi & tertij 19. tertij & primi 14. Hîc nullus datorum numerorum est quadratus vnitate multatus. Attamen optimè solui potest quæstio; ob conditionis à nobis allatæ obseruationem. Nam ponatur secundus 1 N. — 1. erit primus $\frac{11 - 1N}{1N}$. tertius verò $\frac{19 - 1N}{1N}$. ductoque primo in tertium, & summa illorum producto

addita fiet $\mu^{o} \frac{1}{\zeta^{a}} \bar{\eta}$. æqualis 14. & tandem 240. æquantur 15 Q. vnde fit 1 N. 4. sunt ergo quæsiti numeri 2. 3. 4. Itaque vides addita vnitate ad datos numeros 11. & 19. fieri 12. & 20. ex quorum mutuo ductu producitur 240. qui ad reliquum vnitate auctum, nempe ad 15. habet rationem quadrati ad quadratum. Hinc facile est Canonem formare.

Datis numeris adde vnitatem sigillatim, productum ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæsitorum vnitate auctus.

Quod autem ait Xilander duobus primis vt collibuisset per præcedentem quæstionem positis, puta 1 & 7. licuisse tertium inuenire & satisfacere quæstioni, falsum est vt ex hac ipsa hypothesi potes colligere. Nam duobus primis ita positis, impossibile est tertium inueniri qui reliquas postulati partes impleat.

QVÆSTIO XXXIX.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμοὺς ἀορίστους, ὥστε τὸ ὑπ' αὐτῶν λείψαντα σωαμφότερον ποιεῖν τὸν δοθέντα. ἔστω τὸν $\bar{\eta}$. πεπάχθω ὁ πρῶτος ς^{o} $\bar{\alpha}$. ὁ δεύτερος μ^{o} $\bar{\gamma}$. καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν τὸ σωαμφότερον ποιεῖ $\varsigma\varsigma^{\alpha\iota}$ $\bar{\beta}$ λείψει μ^{o} $\bar{\gamma}$. ἴσους μ^{o} $\bar{\eta}$. καὶ γίνεται ὁ ς^{o} μ^{o} $\bar{\iota}$. $\alpha^{\tilde{\varsigma}}$ $\varsigma^{\tilde{\alpha}}$. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος μ^{o} $\bar{\iota}$. $\alpha^{\tilde{\varsigma}}$ $\varsigma^{\tilde{\alpha}}$. ὁ δεύτερος μ^{o} $\bar{\gamma}$. πάλιν δὲ σκέπτομαι πόθεν εὑρίσκετο ὁ ς^{o}. μ^{o} $\bar{\iota}$. $\alpha^{\tilde{\varsigma}}$ $\varsigma^{\tilde{\alpha}}$. ἐπὶ τῷ ἓν ἰσάκις μερισθῆναι εἰς τὸν $\bar{\beta}$. ἀλλ' ὁ μὲν ὁ δοθείς ἐστι μετὰ τοῦ δευτέρου. οἱ δὲ $\varsigma\varsigma^{o}$ $\bar{\beta}$ εἰσὶν ὁ μοναδικὸς ἐλάσσων τοῦ δευτέρου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον ὅσου δήποτε, καὶ προσθῶμεν αὐτὸν τῷ δοθέντι, καὶ τὰ γενόμενα μερίσωμεν διὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, εὑρήσομεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς^{o} $\bar{\alpha}$ μ^{o} $\bar{\alpha}$. ταῦτα μετὰ μ^{o} $\bar{\eta}$. ποιεῖ ς^{α} $\bar{\alpha}$. μ^{o} $\bar{\varsigma}$. μερίζω ταῦτα εἰς τὸν μονάδι μιᾷ ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς^{α} $\bar{\alpha}$. καὶ γίνεται μ^{o} $\bar{\alpha}$. $\vartheta^{\tilde{\alpha}}$ $\vartheta^{\tilde{\alpha}}$. καὶ λέλυται ἐπὶ τῇ ἀορίστῳ ὥστε τὸν ὑπ' αὐτῶν λείψαντα σωαμφότερον, ποιεῖν μ^{o} $\bar{\eta}$.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione multatus summa ipsorum, faciat datum numerum. Hic esto 8. Ponatur primus 1 N. secundus 3. & productus eorum multiplicatione, vtroque dempto facit 2 N. — 3. æquales 8. & fit 1 N. 5. Ad positiones. Erit primus $5\frac{1}{2}$. secundus 3. Rursum igitur dispicio vnde factum sit quod 1 N. est $5\frac{1}{2}$. nimirum ex diuisione 11. per 2. sed 11. est compositus ex dato & secundo, & 2 N. est numerus vnitate minor secundo. Itaque si statuero secundum quantumcunque, eumque dato adiecero, & summam diuisero per vnitate minorem secundo, inueniam primum. Esto secundus 1 N. + 1. huic addito 6. fit 1 N + 9. quem diuido per vnitate minorem secundo, hoc est per 1 N. & fit $1 + \frac{9}{1\mathrm{N}}$. Itaque soluta est quæstio indefinitè; nam productus eorum multiplicatione, amborum summa detracta, facit 8.

IN QVAESTIONEM XXXIX.

HIc soluitur indefinitè quæstio, ita vt nullus omnino numerus excludatur à valore Numeri. Quod euenit quia in positionibus nullibi reperitur signum defectus, vt ex dicendis ad quadragesimam primam clarius patebit.

QVÆSTIO XL.

ΕΤΡΕΙΝ ξητοὺς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν σωαμφότερον ποιῇ τοὺς δοθέντας. δεῖ δὴ τοὺς δοθέντας τετραγώνους εἶναι μονάδι. ὑποτετάχθω δὴ τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου λείψει σωαμφοτέρους ποιεῖν μ^{o} $\bar{\eta}$. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου λείψει σωαμφοτέρους ποιεῖν μ^{o} $\bar{\iota\eta}$. τὸν δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου λείψαντα σωαμφότερον ποιεῖν μ^{o} $\kappa\bar{\delta}$. ἐπεὶ βούλομαι τὸν ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ δευτέρου λείψει σωαμφοτέρους ποιεῖν μ^{o} $\bar{\eta}$. ἐὰν ἄρα

INVENIRE tres numeros, vt producti ex binorum mutua multiplicatione detracta amborum summa faciant datos numeros. Oportet autem datos esse quadratos vnitate multatos. Statutum sit productum ex primo in secundum vtroque detracto facere 8. Productum ex secundo in tertium vtroque dempto facere 15. & productum ex primo in tertium, vtroque ablato facere 24. Quia volo productum

ex

ex primo in ſecundum detracto vtroque facere 8. ſi ſecundum ſtatuero quantumcunque, & eum adiecero ad 8. & ſummam diuiſero per vnitate minorem ſecundo, habebo primum iuxta lemma iam expoſitum. Eſto ſecundus 1 N. + 1. addo illi 8. fit 1 N + 9. diuido hoc per vnitate minorem ſecundo, hoc eſt per 1 N. fit 1 + $\frac{9}{1}$. Tantus eſt primus. Simili ratione inuenietur tertius 1 + $\frac{25}{1}$. Ita duobus poſtulatis eſt ſatisfactum. Supereſt vt productus ex primo in tertium vtroque dempto faciat 24. facit autem $\frac{225}{1}$ — 1. hoc æquatur 24. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{64}{7}$. ſecundus $\frac{1}{7}$. Tertius $\frac{175}{7}$. Quos ſi velis idem habere nomen, omnia ad ſexageſimas. Erit primus $\frac{384}{7}$. ſecundus $\frac{6}{7}$. tertius $\frac{1050}{7}$.

τάξω τὸν δεύτερον οἷον δήποτε, καὶ ἐκτιθῶ αὐτὸν εἰς μ̄ᵒ ᾱ. καὶ τὰ γενόμενα μερίζω εἰς τὰ μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, ἔξω τὸν πρῶτον, καὶ τὸ λῆμμα τὸ προγεγραμμένον. ἔστω ὁ δεύτερος ς̄ᵒ ᾱ μ̄ᵒ ᾱ. προσκείσθω αὐτῷ μ̄ᵒ ᾱ γίνονται ς̄ᵒ ᾱ μ̄ᵒ β̄. ταῦτα μερίζω εἰς τὰ μονάδι ἐλάσσονα τοῦ δευτέρου, τουτέστιν εἰς ς̄ᵒ ᾱ. καὶ γίνεται μ̄ᵒ ᾱ. ϟ ᾱ ᾱ. ἔσται ὁ πρῶτος ὁμοίως ἢ ϟ ὁ ξ̄ῖτης ἔσται μ̄ᵒ α̅. ις̄ ᾱ ᾱ. καὶ λοιποὶ μοι δύο ἐπιτάγματα. λοιπὸν δεῖ τὰ ὑπὸ πρώτου ϟ τρίτου τῷ συναμφοτέρων πιεῖν μ̄ᵒ κδ̄. ποιεῖ ὁ ρμδ̄ ᾱ ᾱ. τῷ μ̄ᵒ α̅. ἴσα μ̄ᵒ κδ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵒ ιβ̄ ᾱ. διὰ τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιζ̄ ις̄. ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ιζ̄ ᾱ ὁ δὲ τρίτος ϛβ̄ ις̄. καὶ ἐὰν θέλῃς αὐτὰς εἰς ἑξ ἀνὰς μερίσαι, πάντα εἰς ξ̄. ἔσται ὁ πρῶτος σπ̄ ξ̄. ὁ δεύτερος σδ̄ ξ̄. ὁ δὲ ξ̄ῖτης υξ̄ ξ̄.

IN QVAESTIONEM XXXX.

HIC quoque conditio nimis ſtrictè proponitur à Diophanto, & proponenda eſt omnino vt ad trigeſimam octauam dictum eſt. Etenim ſumma primi & ſecundi detracta à plano ſub ipſis fiat 11. ſecundi & tertij 19. tertij & primi 14. Quamuis nullus datorum numerorum ſit quadratus vnitate multatus, tamen quia cuilibet addendo vnitatem, productus ex binorum mutua multiplicatione ad reliquum eſt in ratione quadrati ad quadratum, optimè ſoluetur quæſtio. Eſto enim ſecundus 1 N. + 1. erit ergo primus 1 + $\frac{11}{1}$. At tertius 1 + $\frac{25}{1}$. ita ſatisfit duobus poſtulatis. Supereſt vt productus ex primo in tertium, vtroque dempto faciat 14. facit autem $\frac{275}{1}$. — 1. hoc ergo æquatur 14. & fit 1 N. 4, Quare quæſiti numeri ſunt 4. 5. 6. Hinc etiam elicietur iſte Canon.

Datis numeris adde ſigillatim vnitatem, productumque ex binorum mutua multiplicatione diuide per reliquum, quotientis latus, erit vnus quæſitorum vnitate multatus.

QVÆSTIO XLI.

INVENIRE duos numeros indefinitè, vt productus eorum multiplicatione ad ſummam eorundem datam habeat rationem. Eſto productus ſummæ triplus. Ponatur primus 1 N. ſecundus 5. & eſt productus eorum multiplicatione. 5 N. hunc volumus triplum eſſe ad 1 N. + 5. Quamobrem 3 N. + 15. æquantur 5 N. & fit 1 N 7 $\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit primus 7 $\frac{1}{2}$. ſecundus 5. Conſidero hîc vnde 1 N. factus ſit 7 $\frac{1}{2}$. nimirum ex diuiſione 15 per 2. At 15. eſt multiplex ſecundi ſecundum datam rationem. At 2. eſt exceſſus quo ſecundus ſuperat denominatorem rationis. Ergo ſi ſecundum ſtatuamus quantumcunque, & multiplicemus eum per denominatorem rationis, & productum diuidamus per exceſſum quo ſecundus ſuperat denominatorem ratio-

ΕΤΡΕΙΝ ἀεριθμὰς ἀορίστους δύο. ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ συναμφοτέρων λόγον ἔχῃ δεδομένον. διατάχθω δὴ τὸν ὑπ' αὐτῶν συναμφοτέρων τριπλασίονα. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος ς̄ᵒ ᾱ. ὁ δεύτερος μ̄ᵒ ε̄. καὶ ἔστιν ὁ ὑπ' αὐτῶν ς̄ᵒ ε̄. ταῦτα θέλομεν εἶναι τριπλάσια ς̄ᵒ ᾱ μ̄ᵒ ε̄. ὥστε ς̄ᵒ γ̄ μ̄ᵒ ιε̄. ἴσοι εἰσὶν ς̄ᵒ ε̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵒ μ̄ᵒ ζ̄. ᾱ ς̄. διὰ τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ πρῶτος μ̄ᵒ ζ̄. ᾱ ς̄. ὁ δεύτερος μ̄ᵒ ε̄. βλέπω δὴ πόθεν ὁ ς̄ᵒ γίγονεν μ̄ᵒ ζ̄. ᾱ ς̄. ἐκ τοῦ τὸν ιε̄ μεμερίσθαι εἰς β̄. ἀλλ' οἱ ιε̄ ὁ δευτέρου πολλαπλασίων ἐστὶ διὰ τὸν λόγον. ὁ δὲ β̄ ἐστὶν ἐκ τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὸν δεύτερον οἷον δήποτε ς̄ᵒ. καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν διὰ τὸν λόγον τῶν γενομένων μερίσαι μὲν εἰς τὴν ὑπεροχήν, ἧς ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ λόγου, ἔξωμεν τὸν πρῶτον. ἔστω ὁ δεύτερος ς̄ᵒ ᾱ. οὗτος διὰ τὸν

λόγον ποιεῖ ϛ^ωι γ̄. ϛ ἐπὶ μεριδῆ εἰς τὸν ὑπερoχὸν ἢ ὑπερέχει ὁ δεύτερος τὸν λόγον τοῦτον εἰς ἀριθμὸν α̅. λείψει μ̄ γ̄. γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς γ̄. ἐν μερίῳ ϛ^ῳ α̅ λείψει μ̄ γ̄.

nis, habebimus primum. Esto secundus 1 N. Hic in denominatorem rationis, facit 3 N. qui si diuidatur per excessum secundi supra denominatorem rationis, nimirum per 1 N − 3. fit primus $\frac{3N}{1N-3}$.

IN QVAESTIONEM XLI.

QVAMVIS posito altero numerorum 1 N. altero $\frac{1N}{1N-3}$ quæstio indefinitè soluta sit, non tamen quilibet numerus statui potest pro valore Numeri, sed sumendus est omnino numerus aliquis maior quàm 3. vt euidens est. Vt haberi possit 1 N. − 3. per quem diuidantur 3 N. Itaque quoniam huc reiecimus tractationem de inueniendis terminis intra quos consistere debet valor Numeri in huiusmodi quæstionibus quæ indefinitè soluuntur, esto hæc regula generalis. Quotiescunque ex lege problematis institutis positionibus, in aliqua vel in aliquibus illarum reperiuntur vnitates cum defectu numerorum vel potestatis alicujus; aut è conuerso numeri vel potestatis cum defectu vnitatum; vel etiam vtrumque: necesse est vel dari terminum infrà quem, vel terminum supra quem, vel denique terminos intra quos sumi debet valor Numeri. Triplex ergo casus dari potest, ac proinde tria hæc obseruanda.

Primò si Numerus vel potestas alia adiunctum habeat defectum vnitatum, diuide vnitates per Numerorum vel potestatis numerum, quotiens erit terminus suprà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis, vt in hac quæstione Diophanti, quia in vna positione reperitur 1 N. − 3. diuiso 3. per 1. fit quotiens 3. supra quem necesse est sumi valorem Numeri. Et si in aliqua positionum reperiantur 2 N. − 10. diuiso 10. per 2. fieret 5. terminus supra quem consistere deberet valor Numeri; idemque de alijs dicendum potestatibus, nam si haberes 3 Q. − 12. diuidendo 12. per 3. quotiens 4. esset terminus supra quem sumendus esset valor quadrati.

Secundò si vnitates adiunctum habeant defectum Numerorum vel aliarum potestatum, diuide rursus vnitates per Numerorum vel potestatum numerum, quotiens erit terminus infrà quem sumi debet valor Numeri vel potestatis vt accidit in secunda analysi quam tradidimus trigesima septima huius, vbi ponentes alterum quæsitorum 1 N. alter positus est $\frac{1N+1}{1N+1}$. Quare cùm diuidendo 8. per 1. fiat quotiens 8. concluſimus Numerum minorem sumi debuisse quàm 8. & sic de aliis.

Denique si in vna positionum reperiantur Numeri vel potestates aliæ cum defectu vnitatum, & simul in alia positione reperiantur vnitates cum defectu Numerorum, vel potestatis. Tunc vtrobique diuidendo vnitates per numerum Numerorum vel potestatum, fient quotientes, qui termini erunt intra quos sumi debet valor Numeri vel potestatis. Vt in analysi Diophantæa, quæstione trigesima septima citata, quoniam in vna positione reperitur 1 N. − 1. in altera 9 − 1 N. facta vtrobique diuisione producuntur 1. & 9. termini intra quos sumendus est valor Numeri. Quamobrem etiam inde facilè cognoscetur an proposita quæstio sit impossibilis, si enim tales termini reperiantur intra quos sumi non possit aliquis numerus, impossibilis erit quæstio. Verbi gratia, si in vna positione sit 3 − 15 N. in alia 2 N. − 12. Quia diuiso 15. per 3. fit 5. terminus infra quem sumendus est valor Numeri, at diuiso 12. per 2. fit 6. terminus suprà quem valor Numeri sumi debet, cùm euidens sit eundem numerum non posse esse maiorem quàm 6. minorem quàm 5. quæstionem impossibilem esse prononciabimus.

Cæterùm si in diuersis positionibus eædem species ab iisdem deficiant, sed inæquali multitudine sumendus erit terminus quæsitus ab illa positione in qua defectus est maior. Vt in primo casu, si in vna positione sit 2 N. − 6. in altera 2 N. − 8. sumendus erit terminus à postrema, diuidendo scilicet 8. per 2. vnde fit 4. terminus suprà quem sumendus est valor Numeri. Sic in secundo casu si in vna positione sit 8 − 2 N. in altera 8 − 4 N. sumetur etiam valor Numeri à postrema in qua est defectus maior. Vel aliter, in primo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates, fit quotiens maior. Contrà in secundo casu sumendus est terminus ab illa positione, in qua diuisis vnitatibus per Numeros vel potestates fit quotiens minor. Sic in primo casu si occurrant 3 N. − 15. & 4 N. − 12. sumetur terminus à priore quia diuiso 15. per 3. fit quotiens maior quàm diuiso 12. per 4. sed in secundo casu si occurrant 8 − 2 N. & 12 − 3 N. sumetur terminus à posteriore ob contrariam causam.

His sanè præceptis, tota de inueniendis huiusmodi terminis doctrina comprehenditur, quæ cùm facilia sint, & è re ipsa nata, ita vt suam secum ferant demonstrationem, tamen à nemine ante nos tradita sunt, vt verè asserere possim quæstionum quam plurimarum quæ indefinitè soluuntur, perfectam enodationem neminem hactenus calluisse; quod vno aut altero exemplo fiet manifestum. Sit enim propositum soluere pulcherrimum problema, quod omnium qui nos præcesserunt Arithmeticorum ingenia mirè torsit, quodque olim ex parte explicauimus libello nostro extremo iucundo-

rum problematum qui per numeros absoluuntur, ante aliquot annos Lugduni edito nimirum.

Datum numerum diuidere in quotlibet numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Oportet autem summam productorum cadere inter productos, ex numero diuidendo in maximum & in minimum multiplicatorum.

Verbi gratia. Sit 20. diuidendus in tres numeros, ita vt primum ducendo in 4. secundum in $\frac{1}{2}$ tertium in $\frac{1}{4}$. summa productorum conficiat etiam 20. Esto primus 1 N. ergo reliqui duo simul erunt 20 − 1 N. & cum primo ducto in 4. fiant 4 N. his subductis à summa productorum, remanet 20 − 4 N. continens vtique $\frac{1}{2}$ secundi & $\frac{1}{4}$ tertij. Quare ducendo 20 − 4 N. in 4. fiet 80 − 16 N. continens bis secundum, & tertium semel. Proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, puta 20 − 1 N. relinquetur secundus 60 − 15 N. quem si auferas à summa secundi & tertij, nempe à 20. − 1 N. remanebit tertius 14 N. − 40. Itaque primo posito 1 N. fit secundus 60. − 15 N. tertius 14 N. − 40. & quæstio indefinite soluta est. Quoniam verò secundus continet vnitates cum defectu numerorum, & tertius continet numeros cum defectu vnitatum, diuidendo vtrobique vnitates per Numeros, fient termini intra quos consistere debet valor numeri, nimirum 4. & 2 $\frac{1}{2}$. Quare soluetur quæstio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 4. maior quàm 2 $\frac{1}{2}$. Verbi gratia ponatur 3. erit primus 3. secundus 15. tertius 2.

Rursus sit propositus 41. diuidendus in tres numeros ea lege, vt primum ducendo in 4. secundum in 3. tertium in $\frac{1}{2}$. summa productorum sit 40. Esto primus 1 N. ergo reliqui simul erunt 41 − 1 N. & cum primo ducto in 4 fiant 4 N. his detractis à 40. summa productorum, remanet 40 − 4 N. continens ter secundum, & $\frac{1}{2}$ tertij. Quare ducendo 40 − 4 N. in 3. fiet 120 − 12 N. continens secundum nouies, & tertium semel. Ac proinde si hinc auferatur summa secundi & tertij, nempe 41 − 1 N. relinquetur octuplum secundi, puta 79 − 11 N. Quare secundus erit 9. $\frac{1}{8}$ − 1 $\frac{1}{8}$ N. quo subducto à summa secundi & tertij, remanet tertius 31 $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Quoniam verò signum defectus reperitur tantùm in secundo numero 9 $\frac{1}{8}$ − 1 $\frac{1}{8}$ N. vnus tantùm hic erit terminus, infrà quem scilicet sumendus erit valor Numeri, qui habetur diuidendo vnitates per numeros, estque 7 $\frac{1}{11}$. Quare soluetur quæstio si 1 N. ponatur quilibet numerus minor quàm 7 $\frac{1}{11}$. Ponatur 5. Erunt quæsiti numeri 5. 3. 33.

Sæpe autem huiusmodi quæstiones ita proponuntur, vt requiratur solutionem in integris exhiberi seclusis fractionibus, quod accidit ex rerum quibus applicantur natura quæ non patitur diuisionem in partes, vt si de hominibus vel animalibus mentio fiat. Verbi gratia proponatur ita prior quæstio. Fuerunt in symposio personæ 20. nimirum viri, mulieres, & pueri, & expenderunt simul solidos 20. ita tamē vt quilibet virorum soluerit 4. solidos, quælibet mulierum $\frac{1}{2}$ solidi, quilibet puerorum $\frac{1}{4}$ solidi. Quæritur tam virorum, quàm mulierum, atque puerorum numerus sigillatim. Similiter sic proponatur posterior quæstio. Fuerunt personæ 41. expenderuntque solidos 40. & virorum quilibet persoluit 4. solidos, quælibet mulier 3. puerorum quilibet $\frac{1}{4}$ solidi. Quæritur idem quod prius. Hic patet solutionem in integris omnino exhibendam esse. Quod quidē facilè præstabitur in priore quæstione, quia in positionibus nullæ omnino intercueniunt fractiones, nam sufficiet si sumatur quilibet numerus integer cadens inter terminos inuentos 4. & 2 $\frac{1}{2}$. qualis est 3. vnde fiunt quæsiti numeri qui suprà 3. 15. 2. At in posteriore, vbi positiones habent fractiones admixtas, maiore artificio res opus habet. Veruntamen ita expedietur. Quoniam tertius numerus ponitur 31 $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{8}$ N. euidens est vt solutio contingat in integris, oportere pro valore Numeri sumi numerum integrum minorem quàm 7 $\frac{1}{11}$. cuius tres octauæ partes adscita $\frac{1}{8}$ vnitatis faciant integrum. Quia vero vt habeantur $\frac{1}{8}$ cuiuslibet numeri, ducendus est ille numerus in 3. & productus diuidendus per 8. Patet quærendum esse numerum minorem quàm 7 $\frac{1}{11}$ quo ducto in 3. & producto addendo 1. fiat numerus multiplex ad 8. seu quod idem est. Quærendus est numerus multiplex ad 8. qui excedat vnitate multiplicem ad 3. ita tamen vt multiplicator ipsius 3. sit minor quàm 7 $\frac{1}{11}$. Id autem qui fieri possit abundè docuimus in elementis, immò demonstrauimus vniuersale hoc problema.

Datis duobus numeris inter se primis, inuenire multiplicem vnius, qui alterius multiplicem superet dato numero, ita vt inuenti multiplices sint minimi qui hoc præstent.

Inuentisque minimis, alios omnes ordinatim multiplices idem præstantes ostendimus inueniri posse vnde sanæ propositæ quæstionis solutio manifesta est, inuenieturque 16. multiplex ad 8. qui excedit vnitate 15. multiplicem ad 3. & diuiso 15. per 3. fiet 5. quæsitus valor Numeri. Quare numeri qui prius reperiuntur 5. 3. 33.

Huius naturæ quæstio proponitur in veteri Epigrammate quod extat apud Pithœum lib. 4. & tale est.

Vt tot emantur aues, bis denis vtere nummis
Perdix, Anſer, Anas empta vocetur auis.
Sit ſimplex obolus pretium Perdicis, ematur
Sex obolis Anſer, biſque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quæſtio, mentem
Conſule, ſic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duæ, ſimplex erit Anſer.
Accipe Perdices quatuor atque decem.

Huius quæſtionis ſenſus eſt. Viginti Nummis, quorum quilibet duos obolos valet, ſeu 40. obolis emuntur Aues 20. videlicet Perdices, Anſeres, Anates, ſed Perdix obolo vno conſtat, Anſer 6 obolis, Anas 4. Quæritur Perdicum numerus, itemque Anſerum atque Anatum. Ponatur Anſerum numerus 1 N. erit Perdicum & Anatum ſimul numerus 20 − 1 N. erit autem Anſerum omnium pretium 6 N. quo detracto à 40. obolis, remanet pretium Perdicum & Anatum ſimul 40 − 6 N. Quare 40 − 6 N. continet. Perdicum numerum ſemel, & Anatum numerum quater, ac proinde hinc auferendo numerum Perdicum & Anatum ſemel, nempe 20 − 1 N. remanet 20 − 5 N. triplum numeri Anatum, vnde Anatum numerus eſt 6 $\frac{1}{3}$ − + $\frac{1}{3}$ N. quo detracto à 20 − 1 N. remanet Perdicum numerus 13. $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ N & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Sed quia in numero Anatum reperiuntur vnitates cum defectu Numerorum diuiſo 6 $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{3}$. fit 4. terminus infrà quem ſumendus eſt valor Numeri. Rurſus ob fractiones adiunctas, vt ſolutio contingat in integris, quia Perdicum numerus eſt 13 $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$ N. patet valorem Numeri eſſe debere, numerum integrum cuius $\frac{1}{3}$ adſciſcentes $\frac{1}{3}$ faciant integrum. Seu quod idem eſt quærendus eſt multiplex ad 3. qui excedat vnitate multiplicem ipſius 2. ita tamen vt multiplicator ipſius 2. ſit minor quàm 4. inuenieturque ipſe 3. qui excedit vnitate ipſum 2. Quare diuiſo 2. per 2. fit 1. quæſitus valor Numeri. Eſt ergo Anterum numerus 1. Anatum 5. Perdicum 14. vt voluit Epigrammatarius.

Iam verò diuidendus ſit 100. in quatuor numeros, vt primo ducto in 3. ſecundo in 1. tertio in $\frac{1}{3}$. quarto in $\frac{1}{3}$. ſumma productorum ſit 100. Ponatur primus 1 N. ergo reliquorum ſumma erit 100 − 1 N. & cùm ex primo in 3. fiant 3 N. erit ſumma trium reliquorum productorum 100 − 3 N. Supereſt igitur vt partiamur 100 − 1 N. in tres numeros vt primo ducto in 1. ſecundo in $\frac{1}{3}$. tertio in $\frac{1}{3}$ ſumma productorum ſit 100. − 3 N. id autem vt fieri poſſit, propter adiectam ab initio huic quæſtioni conditionem, oportet productum ex 1. maximo multiplicatorum in 100 − 1 N. nempe 100 − 1 N maiorem eſſe quàm 100 − 3 N. & rurſus productum ex $\frac{1}{3}$ minimo multiplicatorum in 100 1 N. nempe $\frac{100}{3}$ − $\frac{1}{3}$ N. minorem eſſe quàm 100 − 3 N. Et primùm quidem manifeſtum eſt, nam per ſe patet 100 − 1 N. maiorem eſſe quàm 100 − 3 N. quod ſignum eſt non dari minimum terminum ſupra quem ſumi debeat valor Numeri, ſed ritè ſolui poſſe quæſtionem quantumlibet exiguus ſtatuatur primus quatuor quæſitorum numerorum. At verò vt ſecundum conſequamur, cùm non ſtatim appareat an $\frac{100}{3}$ − $\frac{1}{3}$ N. ſit minor quàm 100 − 3 N. fingamus æquari, fiet 1 N. 30. maximus terminus, infrà quem vtique ſumendus eſt valor Numeri. Vnde iam conſtat quæſtionem infinitas recipere ſolutiones, cùm primus quatuor quæſitorum numerorum ſtatui poſſit quilibet numerus minor quàm 30. Ponatur verbi gratia 20. erit ergo trium reliquorum ſumma 80. & cùm ex 20. in 3. fiat 60. quo ſubducto à 100. remanet 40. erit vtique trium reliquorum productorum ſumma 40. Supereſt igitur vt diuidamus 80. in tres partes, vt prima ducta in 1. ſecunda in $\frac{1}{3}$. tertia in $\frac{1}{3}$. ſumma productorum ſit 40. Ponatur prima 1 N. erunt duæ reliquæ ſimul 80 − 1 N. & quia ex prima parte in 1. fit 1 N. patet duorum reliquorum productorum ſummam eſſe 40 − 1 N. quæ vtique continet $\frac{1}{3}$ ſecundæ partis & $\frac{1}{3}$ tertiæ. Quare multiplicando per 7. fiet 280 − 7 N. continens ſemel tertiam & $\frac{1}{3}$ ſecundæ. Proinde ſi hinc auferatur ſumma ſecundæ & tertiæ, puta 80 − 1 N. reſtat 200 − 6 N. continens $\frac{1}{3}$ ſecundæ. Quamobrem ipſa pars ſecunda reperietur 80 − $\frac{1}{3}$ N. quam auferendo à 80 − 1 N. reſtat pro tertia $\frac{1}{3}$ N. & quæſtio indefinitè ſoluta eſt. Nam poſito primò quatuor quæſitorum numerorum 20. erit ſecundus 1 N. tertius 80 − $\frac{1}{3}$ N. Quartus $\frac{1}{3}$ N. ſed quoniam in tertio ſunt vnitates cum defectu Numerorum diuiſo 80. per $\frac{1}{3}$ fit 33 $\frac{1}{3}$ terminus infrà quem ſumendus eſt valor Numeri. Quod ſi ſumas 30. fient quæſiti Numeri 20. 30. 8. 42. qui ſatisfaciunt propoſito. Et ſic infinitis alijs modis ſolui poteſt quæſtio, cùm admittendo fractiones infiniti numeri ſumi poſſint infra 33 $\frac{1}{3}$.

Verùm ſi requiratur ſolutionem in integris exhiberi, vtendum erit eodem artificio quod ſuprà explicauimus. Vt ſi quæſtio hæc ita proponatur. Fuerunt in ſympoſio perſonæ 100. viri, mulieres, pueri, puellæ. Et vir quilibet expendit tres aureos, mulier 1. puer $\frac{1}{2}$ puella $\frac{1}{3}$. Quæritur virorum, & mulierum, puerorúmque & puellarum numerus, eodem vtentes ductu euidenter inferemus ſumendum eſſe pro valore Numeri aliquem Numerum minorem quàm 33 $\frac{1}{3}$ quem quinarius metiatur, & ſic ſex ſolutiones in integris per hanc operationem reperientur, prout poſito virorum numero 20. ponetur mulierum numerus 5. vel 10. vel 15. vel 20. vel 25. vel 30. Itaque vt omnes ſolutiones quæ in in-

tegris possunt exhiberi, reperiamus, cum iam determinatum sit virorum numerum poni posse quemlibet infrà 30. toties repetenda erit hæc operatio quot sunt numeri integri infra 30. nimirum nouies & viciſies. Sed rem succedere non posse inueniemus, si numerus virorum ponatur 1. vel 2. vel 3. vel 29. Nam si ponatur 1. & mulierum numerus 1 N. erit puerorum numerus 232 − ½ N. At puellarum ⅔ N. − 133. Quare termini intra quos cadere debet valor Numeri erunt 97. & 96. ½. inter quos nullus cadit integer numerus. Similiter si virorum numerus ponatur 2. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 224 − ½ N. puellarum verò ⅔ N. − 126. Quare termini intra quos consistere debet valor Numeri erunt 93 ½. & 90. inter quos nullus cadit integer quem quinarius metiatur. Rursus si statuatur virorum numerus 3. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 216 − ½ N. & puellarum ⅔ N. − 119. Quare termini intra quos sumi debet valor Numeri reperientur 90. & 85. inter quos non cadit integer quem quinarius metiatur. Denique si numerus virorum ponatur 29. mulierum 1 N. erit puerorum numerus 8 − ½ N. puellarum verò ⅔ N. + 63. Quare terminus infra quem sumendus est valor Numeri reperietur 3 ½. Infra quem nullus est numerus integer quem quinarius metiatur. Cæterùm si virorum Numerus statuatur quilibet cadens inter 3. & 29. res optimè succedet, & reperientur in integris solutiones numero 81. quas omnes in sequenti diagrammate exhibeo, monens primum numerum esse virorum, secundum mulierum, tertium puerorum, quartum denique puellarum.

28	27	26	26	25	25	25	24	24
5	5	10	5	15	10	5	15	10
4	12	8	20	4	16	28	12	24
63	56	56	49	56	49	42	49	42
24	23	23	23	23	22	22	22	22
5	20	15	10	5	20	15	10	25
36	8	20	32	44	16	28	40	4
35	49	42	35	28	42	35	28	49
22	21	21	21	21	21	20	20	20
5	25	20	15	10	5	30	25	20
52	12	24	36	48	60	8	20	32
21	42	35	28	21	14	42	35	28
20	20	20	19	19	19	19	19	19
15	10	5	35	30	25	20	15	10
44	56	68	4	16	28	40	52	64
21	14	7	42	35	28	21	14	7
18	18	18	18	18	17	17	17	17
35	30	25	20	15	40	35	30	25
12	24	36	48	60	8	20	32	44
35	28	21	14	7	35	28	21	14
17	16	16	16	16	16	15	15	15
20	45	40	35	30	25	45	40	35
56	4	16	28	40	52	12	24	36
7	35	28	21	14	7	28	21	14
15	14	14	14	14	13	13	13	13
30	50	45	40	35	55	50	45	40
48	8	20	32	44	4	16	28	40
7	28	21	14	7	28	21	14	7
12	12	12	11	11	11	10	10	10
55	50	45	60	55	50	65	60	55
12	24	36	8	20	32	4	16	28
21	14	7	21	14	7	21	14	7
9	9	8	8	7	7	6	5	4
65	60	70	65	75	70	75	80	85
12	24	8	20	4	16	12	8	4
14	7	14	7	14	7	7	7	7

Hinc apparet quæstiones huiusmodi à nobis perfectissimè resolui, cùm tamen Nicolaus Tartalea asserat, neque per Algebram, neque per aliam certam regulam id fieri posse. Sed & alius non contemnendus Arithmeticus, cùm hanc ipsam quæstionē sub eadem prorsus hypothesi sibi proposuisset enodandam, vnicam tantum illius solutionem affert, eam scilicet quæ primum in superiore diagrammate locum obtinet, eamque etiam non satis certa ratione inuestigat, sed illa vtitur regula quam in libello nostro Iucundorum Problematum olim explicauimus, quamque vt nimis imperfectam meritò reiicimus.

Quod si postuletur exemplum in quo vnica solutio contingat in integris. Sit Personarum numerus 60. aureorum expensorum summa 100. & vir quilibet expendat 2. aureos. Mulier $\frac{1}{2}$. Puer $\frac{1}{3}$. Puella $\frac{1}{4}$. Ponatur virorum numerus 1 N. Igitur 60 − 1 N. erit numerus mulierum, puerorum & puellarum simul, & 100 − 2 N. erit reliquorum aureorum summa, quare ducendo tum $\frac{1}{2}$. tum $\frac{1}{3}$ in 60 − 1 N. fiet 40 − $\frac{1}{2}$ N. maior quàm 100. − 2 N & 30 − $\frac{1}{3}$ N. minor quàm 100 − 2 N. & vtraque æquatione sigillatim resoluta fient termini intra quos consistere debet valor Numeri 45. & 46. $\frac{1}{2}$. Proinde cum inter eos cadat solus numerus integer 46. patet virorum Numerorum non posse poni nisi 46. Atque ideo relinquentur personæ 14. Aurei 8. statuatur mulierum numerus 1 N. tandem inuenietur puerorum numerus 10 − $\frac{1}{3}$ N. Puellarum verò 4 + $\frac{1}{4}$ N. Quare cùm diuiso 10. per $\frac{1}{3}$ prodeat 6. patet pro valore Numeri sumendum esse Numerum infrà 6. quem ternarius metiatur ob fractiones positionibus admixtas. Itaque cùm infrà 6. solus numerus 3. habeat tertiam partem in integris; vnica continget solutio posito scilicet valore Numeri 3. & erit virorum numerus 46. Mulierum 3. Puerorum 5. Puellarum 6. eodem prorsus artificio diuidetur datus numerus in quinque aut plures numeros, ita vt singulis in datos numeros ductis, summa productorum datum conficiat numerum. Quamobrem ex omni parte satisfactum est proposito.

Cæterùm ad hanc quæstionem facilè reducuntur Alligationis regulæ, quarum perfectam enodationem, neminem antè nos tradidisse audacter asserere ausim. Etenim cùm tria rei alicuius genera proponuntur alliganda, patet vulgari regula vnicam tantùm reperiri solutionem, quamuis infinitæ tradi possint. Quod vt exemplo comprobemus. Sint alliganda tria Auri genera. Primum 24. graduum bonitatis quos vulgo Karattos vocant. Secundum 22. Karattorum. Tertium 18. & conficienda sit Massa librarum 60. auri Karattorum 20. sanè per vulgarem illam Alligationis regulam vnica reperietur solutio, & sumendæ erunt libræ 12. ex auro 24. Karattorum. Itemque libræ 12. ex auro 22. Karattorum. Ac denique libræ 36. ex auro 18. Karattorum. Sed quæstio suaptè natura infinitas recipit solutiones, quas sic indagabimus. Quoniam ducto 60. in 20. fit 1200. patet in tota massa conficienda contineri gradus bonitatis seu Karattos 1200. Quare superest vt diuidamus 60. in tres numeros, ita vt primo ducto in 24. secundo in 22. tertio in 18. summa productorum sit 1200. Ponatur primus 1 N. erit summa reliquorum 60 − 1 N. & cùm ducto 24. in 1 N. fiant 24 N. erit reliquorum productorum summa 1200 − 24 N. quæ continet secundum numerum bis & vicesies. Tertium verò decies & octies. Quare cùm 60 − 1 N. contineat secundum & tertium semel, ducto eo in 18. fiet 1080 − 18 N. continens vtrumque decies & octies, & si hic auferatur à 1200. − 24 N. remanet 120 − 6 N. continens secundum quater. Proinde secundus est 30 − $\frac{1}{2}$ N. quo detracto à 60 − 1 N. remanet tertius 30 + $\frac{1}{2}$ N. & quæstio indefinitè soluta est. Vt ergo habeamus terminum infra quem consistere debet valor Numeri diuidamus 30. per $\frac{1}{2}$ fiet 20. quæsitus terminus. Igitur ex auro 24. Karattorum sumi potest quilibet librarum numerus minor quàm 20. vnde constat infinitis modis solui posse quæstionem. Verbi gratia, sumantur ex prædicto auro libræ 18. sumemus ex secundo libras 3. ex tertio libras 39. Rursus sumantur primi auri libræ 16. secundi 6. tertij 38. Rursus sumantur, primi auri libræ 14. secundi 9. tertij 37. vel sumantur, primi auri libræ 10. secundi 15. tertij 35. vel sumantur primi auri libræ 8. secundi 18. tertij 34. vel sumantur primi auri libræ 6. secundi 21. tertij 33. vel sumantur primi auri libræ 4. secundi 24. tertij 32. vel etiam sumantur primi auri libræ 2. secundi 27. tertij 31. His omnibus modis, etiam per integros soluitur quæstio, quod si fractiones admittere libeat, quæ ab hoc quæstionum genere non excluduntur, infinitas alias solutiones reperiri posse manifestum est. Hæc dixisse sufficiat, ne pulcherrimum vtilissimumque inuentum posteris inuidisse videamur.

QVÆSTIO XLII.

ΕΤΡΕΙΝ ζεῖς ἀριθμοὺς ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν πρὸς συναμφότερον λόγον ἔχῃ δοθέντα. ὑποτετάχθω δὴ ὁ ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου συναμφοτέρους εἶναι τρίς. τὸν δὲ ὑπὸ δευτέρου, καὶ τρίτου, συναμφοτέρους εἶναι τετράκις. τὸν δὲ ὑπὸ πρώτου καὶ τρίτου συναμφο-

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt, is ad eorum summam datam habeat rationem. Sit productus è primo in secundum, ad summam ipsorum triplus, productus è secundo in tertium, sit ad summam eorum quadruplus,

& productus è primo in tertium, ſummæ amborum ſit quintuplus. Statuatur ſecundus 1 N. erit ex præcedenti lemmate primus $\frac{1\,N}{1}$. eodem modo tertius erit $\frac{4\,N}{1}$. Reſtat vt productus ex primo in tertium ad ſummam ipſorum ſit quincuplus. Sed productus ex primo in tertium eſt $\frac{4\,Q}{1}+\frac{11\,N}{1}$ ſumma verò primi & tertij eſt $\frac{2\,Q}{1}+\frac{14\,N}{1}$. quæ ſic habetur. Quoniam oportet addere minutias $\frac{1\,N}{1}$ & $\frac{4\,N}{1}$. Ipſi quidem numeri in denominatores alternatim multiplicabuntur, verbi gratia 3 N. in denominatorem alterius, hoc eſt in 1 N. — 4. & rurſus 4 N. in denominatorem alterius, puta in 1 N. — 3. ſic facta eſt ſumma 7 Q. — 24 N. ſub denominatione partis quæ fit ex denominatorum mutua multiplicatione, hoc eſt 1 Q. + 12 — 7 N. Habemus autem & productum ex primo in tertium $\frac{4\,Q}{1}+\frac{11\,N}{1}$. Quamobrem $\frac{20\,Q}{1}+\frac{55\,N}{1}$. quincuplum eſt ſummæ. Proinde ſumma quinquies puta $\frac{10\,Q}{1}+\frac{70\,N}{1}$. æqualis eſt $\frac{4\,Q}{1}+\frac{11\,N}{1}$. & omnia ducantur in communem denominatorem, Puta 1 Q. + 12 — 7 N. fiunt 12 Q. æqualis 35 Q. — 120 N. & fit 1 N. $\frac{12}{47}$. Ad hypoſtaſes. Poſueram primum $\frac{1\,N}{1}$. ſecundum 1 N. tertium $\frac{4\,N}{1}$. At 1 N. inuentus eſt $\frac{12}{47}$. hunc ſi ducas in primum, eo ducto in 3 N. fiet $\frac{36}{47}$. At eo ducto in denominatorem 1 N. — 3. fient $\frac{12}{47}$. erit igitur primus $\frac{168}{47}$. ſecundus autem $\frac{144}{47}$. non enim habebat numericam minutiam. At tertius ſimiliter inuenietur, nam ducto $\frac{144}{47}$ in 4 N. fiet $\frac{576}{47}$. Eodem modo ducto $\frac{144}{47}$ in denominatorem 1 N. — 4. fiet $\frac{48}{47}$. Eſt ergo tertius $\frac{528}{47}$. & demonſtratio eſt manifeſta.

ἀριθμητικὸν μόριον. ὁ δὲ τρίτος ὁμοίως, ρκ̄ ᵃᵧ̄. δεῖ τοὺς τέσσαρας ϛ̄ᵒ. γίνονται υπ̄ ᵃᵧ̄. ὁμοίως, καὶ δεῖ τὸ μόριον, ρκ̄ ᵃᵧ̄. δεῖ ϛ̄ ᾱ. ϛ μ̄ δ̄. γίνονται μ̄ κη̄ ᵃᵧ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ τρίτος μ̄ υπ̄ ᵃᵧ̄. ἡ δὲ ἀπόδειξις φανερά.

τίρους $\frac{\text{ιβ}}{\text{ιβ}}$ πενταπλασίους. τετάχθω ὁ δὲ δεύτερος ϛ̄ ᾱ ἴσαι δὴ διὰ τὸ λῆμμα ὁ πρῶτος ϛ̄ γ̄. ἐν μορίῳ ϛ̄ ᾱ λείψει μ̄ γ̄. ὁμοίως δὲ ὁ τρίτος ϛ̄ δ̄. ἐν μορίῳ ϛ̄ ᾱ. λείψει μ̄ δ̄. λοιπὸν δεῖ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου συναμφοτέρους $\frac{\text{ιβ}}{\text{ιβ}}$ πενταπλασίους. ἀλλ' ὁ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἐστὶ δ̄ᵒ ιβ̄. ἐν μορίῳ δ̄ᵒ ᾱ μ̄ᵒ ιβ̄. λείψει ϛ̄ᵒ ζ̄ συναμφότερος δὲ ἐστὶν ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος δ̄ᵒ ζ̄. λείψει ϛ̄ᵒ κδ̄ μορίων δ̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ιβ̄. λείψει ϛ̄ᵒ ζ̄. ὅπως. ὅταν γὰρ δύσῃ συμβαίνῃ μόρια εἶσι ϛ̄ᵒᵘ γ̄. μορίων ϛ̄ᵒ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ γ̄. καὶ ϛ̄ᵒᵘ δ̄. μορίων ϛ̄ᵒ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ γ̄. καὶ ϛ̄ᵒᵘ δ̄. μορίων ϛ̄ᵒ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ δ̄. οἱ μὲν ϛ̄ᵒᵘ δεῖ τὰ ἑναλλὰξ μόρια πολλαπλασιάσαντα, οἷον ϛ̄ᵒᵘ γ̄. δεῖ τὰ ἑτέρα μόρια τουτέστιν δεῖ ϛ̄ᵒᵘ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ δ̄. καὶ πάλιν οἱ ϛ̄ᵒᵘ δ̄. δεῖ τὰ μόρια τοῦ ἑτέρου δεῖ ϛ̄ᵒᵘ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ γ̄. ὅπως ἐπίσῃσιν ἡ συνθεσις δ̄ᵒ ζ̄. λείψει ϛ̄ᵒ κδ̄. μορίων τοῦ ὑπὸ τῶν μορίων, τουτέστι δ̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ιβ̄. λείψει ϛ̄ᵒ ζ̄. εἰχομὲν ἢ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου δ̄ᵒ ιβ̄. μορίων δ̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ιβ̄. λείψει ϛ̄ᵒ ζ̄. δυνάμεις ἄρα ιβ̄. μορίων δ̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ιβ̄. λείψει ϛ̄ᵒ ζ̄. πενταπλάσιαι εἰσὶ τῆς συνθέσεως. πενταπλάσιος ἄρα ἡ σύνθεσις γίνεται δ̄ᵒ λε̄ ϛ̄ ρκ̄. μορίων δ̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ιβ̄ ϛ ϛ̄ᵒᵘ ζ̄. ἴσαι δ̄ᵒ ιβ̄. μορίων τοῦ αὐτοῦ, ϗ πάντα δεῖ τὸ κυρὸν αὐτῶν μόριον δ̄ᵒ ᾱ. μ̄ᵒ ιβ̄ ϛ ϛ̄ᵒᵘ ζ̄. ϗ γίνονται δ̄ᵒ ιβ̄. ἴσαι δ̄ λε̄ ϛ ϛ̄ᵒᵘ ρκ̄. ϗ γίνεται ὁ ϛ̄ ρκ̄ ᵃᵧ̄. δεῖ τοὺς ὑποτασσόμενους. εἶχεν ἢ τὸν μὲν πρῶτον ϛ̄ᵒᵘ γ̄. μορίου ϛ̄ᵒ ᾱ ϛ μ̄ᵒ γ̄. ϗ ἢ δεύτερος ϛ̄ᵒ ᾱ. ϗ ἢ τρίτος ϛ̄ᵒᵘ δ̄. μορίων ϛ̄ᵒ ᾱ. ϛ μ̄ᵒ δ̄. δυρίθμη δὲ ὁ ϛ̄ ρκ̄ ᵃᵧ̄. ἐπὶ μὲν δεῖ ϗ πρῶτος πεπ̄ς, δεῖ ϛ̄ᵒᵘ γ̄. ἴσονται μ̄ τξ̄ ᵃᵧ̄. λοιπὰς δεῖ τὸ μόριον ρκ̄ ᵃᵧ̄. δεῖ ϛ̄ ᾱ. λείψει μ̄ᵒ γ̄. γίνονται μ̄ ρᾱ ᵃᵧ̄. λοιπὸς ἄρα ὁ πρῶτος τξ̄ ᵃᵧ̄. ὁ ἢ δεύτερος ρκ̄ ᵃᵧ̄. ἐπὶ γὰρ εἶχεν

IN QVAESTIONEM XLII.

HÆC quæſtio pendet à præcedente, vt diſertis verbis monet Diophantus. Cæterùm in ſua verſione Xilander multa omiſit, quæ clarioris doctrinæ gratia poſuit Diophantus, vt apparet ex textu Græco, & ex noſtra verſione.

QVÆSTIO XLIII.

INVENIRE tres numeros, vt quem bini producunt mutua multiplicatione, is ad compoſitum ex tribus datam

ΓΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν αὐτὸς ϗ συγκείμενον ἐκ τῶν ξιδν λόγον ἔχῃ δεδομένον. δεῖ τετάχθω δὴ ϗ

μὴ ὑπὸ τῆ πρώτῃ, καὶ τῆ δευτέρᾳ τ̃ Τριων ἴσῃ τριπλασίονα. ἡ δὲ ὑπὸ τῆ δευτέρᾳ, καὶ τῆ Τρίτου τ̃ τριῶν ἴσῃ τετραπλασίονα. ἡ δὲ ὑπὸ τῆ τρίτου, καὶ τῆ πρώτου τ̃ τριῶν ἴσῃ πενταπλασίονα. ἐπεὶ δὲ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν πρὸς τὸν ἐκ τ̃ Τριῶν λόγον ἔχει δεδομένον. ζητῶ πρότερον Τρεῖς ἀριθμοὺς, καὶ τυχόντα, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῶν πρὸς τὸν τυχόντα λόγον ἔχῃ τὸν δοθέντα. ἔστω ὁ τυχὼν μ̄ ᾱ. καὶ ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῆ πρώτου τυχόντος καὶ τῆ δευτέρᾳ τυχόντος ἔστι τριπλασίων τουτέστι τῆ ᾱ. ὁ ὑπὸ τῆ πρώτου, ἄρα καὶ τῆ δευτέρου ἔσται μ̄ ιη δυτικὸς ς̄ ᾱ. ὁ ἄρα πρώτος ἔσται ιη ς̄ ᾱ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῆ δευτέρου, τῆ τρίτου τῆ ᾱ. δέκα τετραπλασίων. ὁ ἄρα ὑπὸ τῆ δευτέρου, καὶ Τρίτου ἔσται μ̄ κ̄. ἔστι δὲ ὁ δευτερος ς̄ ᾱ. ὁ ἄρα Τρίτος ἔσται κ̄ ς̄ ᾱ. λοιπὸν δέκα καὶ ἡ ὑπὸ τῆ πρώτου, καὶ τῆ τρίτου ὃς ἐστὶ τ̃ δῡ ᾱ. ταῦτα τῆ ᾱ. ἵνα δὲ πενταπλάσια, γίνονται μ̄ τ̄. ἴσαι δῡ κᾱ. καὶ εἰ ἰω̄ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. λέλυμθαι αὐ ἰω̄ μοι τὸ ζητούμενον, ἀλλ' αἱ μ̄ τ̄. ὑπὸ τῆ ιη. ἔστι καὶ τῆ κᾱ. ἀλλ' αἱ ιη. τετραπλασίων δέκα τῆ ᾱ. ὁ ἄρα κ̄. τετραπλασίων δέκα ῑ. δέδομθαι οὖν τῆ τετραπλασίονος τῆ ῑ. δεῖ τὸν τετράπλασίονα τῆ ᾱ. πολλαπλασιασθέντος γθμόμθον πρὸς τὸν πενταπλασίονα τῆ ᾱ. λόγον ἔχειν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ὁ δὲ ᾱ. τυχών δέκα. ἀπῆκται οὖν μοι εἰς τὸ ζητεῖν τινα ἀριθμὸν ὅπως ὁ Τριπλασίων αὐτῆ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τετράπλασίονα αὐτῆ, καὶ ὁ γθμόμθος, πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτῆ, λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος ς̄ ᾱ. καὶ ὁ τριπλασίων αὐτῆ πολλαπλασιασθεὶς δέκα τὸν τετραπλασίονα αὐτῆ ποιεῖ δῡ ιβ̄. δεῖ τοίνυν ζῦζον πρὸς τὸν πενταπλασίονα αὐτῆ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον. δυτάμεις ἄρα ιβ̄. πρὸς ἀριθμὸν ῑ. ἰθέλομθμ εἶδ ἐν λόγῳ ὃν ἔχει τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὁ ἄρα ὑπ' αὐτῆ, καὶ αὐτὸς ἔσται τετράγωνος. κύβοι ἄρα ξ̄. ἵνα τετραγώνω δέκᾳ ἡ ἄρα ἔστω δῡ π̄. καὶ γίνῃ ὁ ς̄ μ̄ ιε̄. δέκα τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ ζητούμενος μ̄ ιε̄. τάττω οὖν αὐτὸν μ̄ ιε̄. ἔσται ἄρα ὁ ὑπὸ τῆ πρώτου, καὶ τῆ δευτέρου μ̄ με̄. καὶ ἔστι ὁ δευτερος ς̄ ᾱ. ὁ ἄρα πρῶτος ἔσται με̄ ς̄ ᾱ. ὁμοίως καὶ ὁ τρίτος ξ ς̄ ᾱ λοιπὸν δέκα τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ τρίτου δυτέστι βφ̄ δῡ ᾱ. ἧμ μ̄ ιε̄. καταπολάσας πενταπλασίονα, τὸ ἄρα βφ̄ δῡ ᾱ. ἴσον μ̄ οᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄

habeat rationem. Sit productus ex primo in secundum ad summam trium triplus; at productus ex secundo in tertium, sit summæ quadruplus. Denique productus ex tertio in primum, summæ omnium sit quincuplus. Quia igitur productus ex binorum mutua multiplicatione ad summam trium datam habet rationem. Quæro primùm tres numeros, & aliquem vt cumque adscitum, ad quem producti ex binorum mutuo ductu datas habeant rationes. Arbitrarius esto 5. Tunc quia productus ex primo in secundum triplus est arbitrarij numeri, nempe ipsius 5. vtique productus ex primo in secundum erit 15. esto secundus 1 N. ergo primus $\frac{15}{1}$. Rursus quia productus ex secundo in tertium est quadruplus ipsius 5. vtique productus ex secundo in tertium erit 20. At secundus est 1 N. ergo tertius erit $\frac{20}{1}$. Superest vt productus ex primo in tertium, nimirùm $\frac{15}{1}$. sit quincuplus ipsius 5. Proinde fiunt 300. æquales 25 Q. Hic si species ad speciem rationem haberet quæ est quadrati ad quadratum, soluta esset quæstio. Enim vero 300. orti sunt ex 15. in 20. At 15. triplum est ipsius 5. & 20. est eiusdem 5. quadruplum. Volumus ergo vt triplo ipsius 5. per quadruplum eiusdem multiplicato, producti ad quincuplum eiusdem 5. ratio sit quæ quadrati ad quadratum. Atqui 5. arbitrarius est. Hoc igitur mihi negotij incumbit, vt quæram numerum, cuius triplus & quadruplus inter se multiplicati numerum producant qui ad quincuplum eiusdem, rationem habeat quam habet quadratus ad quadratum. Esto qui quæritur 1 N. & triplus eius ductus in quadruplum facit 12 Q. Oportet igitur hunc ad quintuplum eiusdem rationem habere quæ est quadrati ad quadratum. Volumus ergo 12 Q ad 5 N. esse in ratione quadrati ad quadratum. Quamobrem altero in alterum ducto fiet quadratus. Proinde 60 C. æquantur quadrato, sit ille 900 Q. & fit 1 N. 15. Ad positiones, erit quæsitus 15. Pono ergo eum 15. Quare productus ex primo in secundum erit 45. Atqui secundus est 1 N. ergo primus erit $\frac{15}{1}$. similiter inuenietur tertius $\frac{20}{1}$. superest vt productus ex primo in ter-

tium

tium, hoc est $\frac{75}{15}$ ipsius 15. quincuplus reperiatur. Igitur $\frac{75}{15}$ æquatur 75. & fit 1 N. 6. Ad positiones. erit primus 7 $\frac{1}{2}$ secundus 6. tertius 10. Horum summa si foret 15. soluta planè esset quæstio. Statuo itaque summam trium 15 Q. Ipsos autem tres in numeris, quales eos inuenimus, primum scilicet 7 $\frac{1}{2}$ N. secundum 6 N. tertium 10 N. Supereſt igitur vt trium summa sit 15 Q. est autem 23 $\frac{1}{2}$ N. Quare 23 $\frac{1}{2}$ N. æquantur 15 Q. & fit 1 N. $\frac{11}{23}$ Ad positiones. Erit primus $\frac{172}{23}$ $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{132}{23}$. tertius $\frac{220}{23}$.

ς̄. ὅτι τοὺς ὑποκάτω ἴσαι ὁ πρῶτος μ^{ις} ζ̄. ᾱ ^{ς}. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ις} ϛ̄. ὁ δὲ τρίτος μ^{ις} ῑ. καὶ εἰ ἴω^{ς} ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τειῶν μ^{ος} ιη̄. λελειμμένοι ἴω^{ς} μοι τὸ ζητούμενον. τάσσω δὴ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν τειῶν ιη̄. αὐτοὺς δὲ τοὺς ξεῖς ἐν ἀριθμῷ, ὡς δεσμὸν τὸν μὲν πρῶτον ςξ̄ ζ̄. ᾱ ^{ς}. τὸν δὲ δεύτερον ςξ̄ ϛ̄. τὸν δὲ τρίτον ςξ̄ ῑ. καὶ λοιπὸν δεῖ τοὺς ξεῖς εἶ^{ν} δ^{ὰς} ιη̄. εἰσὶ δὲ οἱ τρεῖς ςξ̄ κγ̄. ᾱ ^{ς}. ἀριθμοὶ ἄρα κγ̄. ᾱ ^{ς}. ἴσοι δ^{ὰς} ιη̄. ἓ γίνεται ὁ ϛ̄ μ^{ις} μζ̄ ^{λς}. ὅτι τοὺς ὑποκάτω. ἴσαι ὁ μὲν πρῶτος τιβ̄ ^{λς}. ᾱ ^{ς}. ὁ δὲ δεύτερος σπβ̄ ^{λς}. ὁ δὲ τρίτος νο̄ ^{λς}.

IN QVAESTIONEM XLIII.

Hic restituto textu, vt fecimus, omnia sunt perspicua, nec maiore explicatione indigent: nonnulla etiam omiserat Xilander, quorum defectu res obscurabatur, vt videre est si versio illius cum nostra conferatur.

QVÆSTIO XLIV.

INvenire tres numeros, vt compositus ex tribus multiplicatus in primum faciat triangulum; in secundum, faciat quadratum, in tertium faciat cubum. Statuatur summa trium 1 Q. Primus autem fractio quadratica vnitatum triangularium, puta $\frac{1}{2}$. secundus fractio quadratica vnitatum quadratarum, vt $\frac{1}{4}$. Tertius denique fractio quadratica vnitatum cubicarum, nimirum $\frac{1}{8}$. & quidem 1 Q. multiplicatus in primum facit 6. qui est triangulus, & 1 Q. multiplicatus in secundum facit 4. qui est quadratus, & rursus 1 Q. multiplicatus in tertium facit 8. qui est cubus. Supereſt vt trium summa sit 1 Q. sed trium summa est $\frac{11}{8}$. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. multiplicentur, fit 1 QQ. æqualis 18. Oportet igitur 18. esse quadratoquadratum. Atqui 18. est compositus ex triangulo, quadrato, & cubo. Proinde reperiendus est quadratus, latus habens quadratum, & diuidendus in triangulum, quadratum, & cubum. Esto is 1 QQ. Quadratus autem 1. QQ. + 1 − 2 Q. si ergo de 1 QQ. abstulero 1 QQ. + 1 − 2 Q. relinquetur 2 Q. − 1. Hunc rursus oportet diuidere in cubum, & triangulum. Esto cubus 8. relinquitur ergo triangulus

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν τριῶν πολλαπλασιασθεὶς ὁμοῦ ὅτι μὲν τὸν πρῶτον ποιῇ τρίγωνον, ὅτι δὲ τὸν δεύτερον ποιῇ τετράγωνον, ὅτι δὲ τὸν τρίτον ποιῇ κύβον. τετάχθω δὴ οἱ τρεῖς δυνάμεως ᾱ. ὁ δὲ πρῶτος δυναμοστὸν μονάδων τριγωνικῶν, ἔστω ϛ̄ δ^{ὰς} ᾱ^{ς}. ὁ δὲ δεύτερος δυναμοστὸν μονάδων τετραγωνικῶν ἔστω δ^{ὰς} δ^{ὰς} ᾱ^{ς}. ὁ δὲ τρίτος δυναμοστὸν μονάδων κυβικῶν. ἔστω η̄ δ^{ὰς} ᾱ^{ς}. καὶ ἡ δύναμις μία πολλαπλασιασθεῖσα ὅτι μὲν τὸν πρῶτον ποιεῖ μ^{ις} ϛ̄. ὃς ἔστι τρίγωνος, ὅτι δὲ τὸν δεύτερον ποιεῖ μ^{ις} δ̄. ὃς ἔστι τετράγωνος, ὅτι δὲ τὸν τρίτον ποιεῖ μ^{ις} η̄. ὃς ἔστι κύβος. λοιπὸν ἔστι τοὺς τρεῖς εἶ^{ν} δ^{ὰς} ᾱ. ἀλλ' οἱ τρεῖς εἰσὶ ιη̄ δ^{ὰς} ᾱ^{ς}. ἴσοι δ^{ὰς} ᾱ. καὶ πάντα ὅτι δύναμιν μίαν, γίνεται δ^{ὰς} ᾱ. ἴσοι μ^{ις} ιη̄. δεῖ δὴ τὸν ιη̄. εἶ^{ν} δυναμοδύναμιν, ἀλλ' ὁ ιη̄. συνίστησι ἔστι τριγώνου, ἓ τετραγώνου, καὶ κύβου ἁπτηται δὴ μὲν δύο τῶν τετραγώνων πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, καὶ αὐτὸν διελεῖν εἰς τρίγωνον, ἓ τετράγωνον, καὶ κύβον. ἔστω δ^{ὰς} δ^{ὰς} ᾱ μ^{ις} ᾱ λείψει δ^{ὰς} β̄. ἐπεὶ οὖν ἄρα ὑπὸ δ^{ὰς} δ^{ὰς} μιᾶς ἄρα δ^{ὰς} δ^{ὰς} ᾱ. μ^{ις} ᾱ. λείψει δ^{ὰς} β̄. λοιπὸς καταλείπεται δ^{ὰς} β̄ λείψει μ^{ις} ᾱ. πάλιν ταῦτα δεῖ διαιρεθῆναι εἰς τε κύβον, καὶ τρίγωνον, καὶ ἔστω ὁ κύβος μ^{ις} η̄. λοιπὸν ἄρα ὁ τρίγωνος δ^{ὰς} β̄ λείψει μ^{ις} ϝ̄. πᾶς ἓ τρίγωνος ὀκτάκις γιγόμενος, ἓ ἀφαιλαθὲν μονάδα τε-

τράγωνος γίνεται. δυνάμεις ἄρα ις̄. λείψει μ̄ α̃. ἵσαι τετραγώνῳ. πλάσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ες̄ δ̄. λείψει μ̄ α̃. γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ϑ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν Τρίγωνος μ̄ ρν̄ϛ̄. ὁ δὲ τετράγωνος, ϛῡ. ὁ δὲ κύβος μ̄ η̄. ἔρχομαι εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ πάσαν τὴν ὑπ' αὐτῶν συγκείμενον τετράγωνον δῦ α̃. τὸν δὲ πρῶτον ρνγ δῦ. ᾱ. ἐπεισλὴ τρίγωνον γενέσθαι. τὸν δὲ δεύτερον ϛῡ δῦ. ᾱ. ἐπεισλὴ τετράγωνον γενέσθαι. τὸν δὲ Τρίτον η̄ δῦ. ᾱ. ἐπεισλὴ κύβον γενέσθαι. ἡ δὲ δύναμις α̃. τετράγωνος οὖσα, ἐφ' ὃν ἂν πολλαπλασιασθῇ ποιεῖ, ὃν μὲν Τρίγωνον, ὃν δὲ τετράγωνον, ὃν δὲ κύβον. δεῖ δὲ καὶ τὰς τρεῖς εἶναι δῦ α̃. εἰσὶ δὲ ϛφξα̃ δῦ. ᾱ. ἴσον δεῖ α̃. καὶ πάντα ὅτι δύναμιν. γίνεται δῦ δῦ α̃. ἴση μ̄ ϛφξα̃. καὶ ὅτι ὁ ς̄ μ̄ θ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔσαι ὁ μὲν πρῶτος ρνγ ᾱ. ὁ δὲ δεύτερος ϛῡ ᾱ. ὁ δὲ τρίτος η̄ ᾱ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.

2 Q. — 9. Porrò quiuis triangulus per 8. multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum. Proinde 16 Q. — 71. æquantur quadrato. Formo quadratum à 4 N. — 1. fit 1 N. 9. Ad positiones. Erit triangulus 153. quadratus 6400. cubus 8. Venio ad id quod initio propositum fuit & statuo compositum ex tribus quadratum 1 Q. Primum autem ιγ. vt fiat triangulus. Secundum ρξ. vt fiat quadratus. Tertium denique ϙ. vt fiat cubus. & 1 Q. cùm sit quadratus ductus in vnumquemque, facit primum triangulum, secundum quadratum, tertium cubum. Oportet autem tres simul esse 1 Q. sunt autem ρξγ. hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia in 1 Q. ducantur, fit 1 QQ. æqualis 6561. & fit 1 N. 9. Ad positiones. erit primus ιγ. secundus ρξ. tertius ϙ. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLIV.

HIc tota obscuritas nascitur ex fractionibus quadraticis, quæ vt iam sæpe monuimus semper ambiguè exprimuntur apud Diophantum. Deerant & nonnulla verba quæ reposuimus, ea more nostro virgulis includentes. Numerus triangulus dicitur summa progressionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, & per vnitatem progredientis, cuius vltimus terminus, qui & idem est cum numero qui exprimit multitudinem terminorum dicitur latus trianguli vt quinque terminorum 1. 2. 3. 4. 5. summa 15. est triangulus cuius latus 5. & sex terminorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. summa 21. est triangulus cuius latus 6. Quod fusius explicat Diophantus libro de numeris multangulis. Nos quoque in appendice ad eundem librum vniuersalissimè demonstrabimus Theorema quod de Numeris triangulis profert Diophantus. nimirum. Omnis triangulus per octo multiplicatus & adsciscens vnitatem quadratum facit. Interim tamen peculiari demonstratione libet id ostendere, supponendo modum illum communem inueniendi summam cuiuscunque progressionis arithmeticæ, ducendo scilicet summam extremorum in semissem numeri terminorum, quem etiam demonstrat Diophantus loco citato. Vnde infertur in progressione cuius summa est numerus triangulus, vbi primus terminus est 1. maximus verò æquatur numero terminorum, seu lateri trianguli, ipsum triangulum haberi si latus ipsius vnitate auctum ducatur in semissem eiusdem lateris. His positis, sic pronuncio.

Omnis numerus triangulus per octo multiplicatus, & adsciscens vnitatem, quadratum facit, cuius latus est duplum lateris ipsius trianguli vnitate auctum.

A 21.
B... C... D. E
F 168. G. 169.
1. *secundi* H ..... K. L

Sit numerus triangulus A cuius latus B D. cuius semissis B C. & sit vnitas D E. & octuplum ipsius A esto F cui addita vnitate fiat G. sumaturque H K duplum ipsius B D. cui addatur vnitas K L. dico G esse quadratum à latere H L. etenim ex suprà dictis constat triangulum A æquari producto ex B C. in totum B E. sed hic productus æquatur productis ex B C in B C. & in C D. & in D E. hoc est duplo quadrati ipsius B C & ipsi B C. semel. Quare octuplum ipsius A puta F. æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & octuplo ipsius B C. Ergo G continet sedecuplũ quadrati ipsius B C. octuplum ipsius B C & præterea vnitatẽ. Porro cùm B D sit duplus ad B C. & rursus H K sit duplus ad B D. patet H K esse quadruplum ipsius B C. ac proinde quadratus ipsius H K æquatur sedecuplo quadrati ipsius B C. & duplum ipsius H K æquatur octuplo eiusdem B C. Igitur G æquatur quadrato ipsius H K. & duplo ipsius H K. & vnitati. Sed & quadratus ipsius H L æquatur quadrato H K. & quadrato K L. hoc est vnitati, & duplo producti ex H K. in vnitatem K L. hoc est duplo ipsius H K. Ergo G æqualis est quadrato ipsius H L. Quod erat demonstrandum. Nec refert vtrum B D. secari possit bifariam indiuisa vnitate, necne, cùm hæc demonstratio nitatur solùm propositionibus libri secundi Euclidis, quæ abstruhunt ab integris & à fractis, vt manifestum est. Porro hinc euidenter colligitur omnem quadratum imparem vnitate multatum, esse multiplicem octonarij, nam metitur eum octonarius

4. *secundi.*

per numerum triangulum, cuius latus æquatur ſemiſſi lateris quadrati vnitate multati.

Diligenter autem attendenda eſt operatio Diophanti, qui poſitiones ſuas appoſitiſſimè inſtituit vt ſolutio contingat rationalis. Etenim cùm quærendus ſit quadratoquadratus conſtans ex triangulo, quadrato, & cubo, ponit eum 1 Q Q. Tum argutè quadratum ſtatuit 1 Q Q. + 1. − 2 Q. à latere 1 Q. − 1. quo ablato ab 1 Q Q. ſupereſt 2 Q. − 1. qui ex cubo & ex triangulo componi debet. Hinc ergò ſi auferatur cubus quilibet, puta 8. reſtat 2 Q. − 9. æquandus triangulo. Quamobrem oportet vt ductus in 8. & adſciſcens vnitatem, faciat quadratum per theorema ſuprà demonſtratum. Vnde fit 16 Q. − 71. æquandus quadrato. Hoc autem fieri minimè poſſet, niſi 16. quadratorum numerus, eſſet quadratus. Itaque.

Aduerte primò in quadrato detrahendo ab 1 Q Q. talem reperiri debere quadratorum numerum, vt is ad 8. habeat rationem quadrati ad quadratum, quales ſunt 1. 8. 32. &c. ſic poni poterat quadratus ille 1 Q Q. + 19 − 8 Q. à latere 1 Q. 4. vel etiam 1 Q Q. + 256 − 32 Q. à latere 1 Q. − 16. & ſic de aliis. Verbi gratia ſi ponatur quadratus 1 Q Q. + 16 − 8 Q. eo detracto ab 1 Q Q. reſtabit 8 Q. − 16. vnde ſi auferas cubum aliquem, puta 8. remanebit 8 Q. − 24. æquandus triangulo, ac proinde ducto eo in 8. & producto addendo vnitatem, fiet 64 Q. − 191. æquandus quadrato, cuius latus ſi fingas 8 N. − 1. fiet 1 N. 12. cuius quadratoquadratus optimè ſatisfacit propoſito.

Aduerte ſecundò, alium etiam quemlibet cubum quàm 8. ſumi poſſe, vt in hypotheſi Diophanti ſi ſumatur cubus 27. fiet 2 Q. − 28. æquandus triangulo, quem ſi ducas in 8. & producto addas 1. fiet 16. Q. − 223. æquandus quadrato, cuius latus ſi ponas 4 N. − 1. fiet 1 N. 28. cuius quadratoquadratus rurſus implet poſtulata.

Aduerte poſtremò in fingendo latere vltimi quadrati, talem adhibendam eſſe cautionem, vt valor Numeri reperiatur in integris numeris, cùm numerus triangulus non poſſit eſſe niſi integer. Id autem ſemper ſuccedet operando modo à Diophanto tradito, ſi quadrati latus fingatur à tot numeris qui ſint latus quadratorum in numero quadrato æquando contentorum − 1. Cæterùm vix aliter id fieri poſſe, ſatis experiendo deprehendes. Ex operatione autem Diophanti facilè eſt elicere Canonem ad inueniendum quadrato quadratum qui conſtet ex triangulo, quadrato, & cubo nimirum.

OBSERVATIO D. P. F.

EXperientiam non ſatis exactam fecit Bachetus. Sumatur quilibet cubus v.g. cuius latus multiplici ternarii ſuperaddat vnitatẽ. Erunt v.g. 2 Q − 344 æquando triangulo ergo 16. Q. − 2751 æquabuntur quadrato cuius latus finges ſi libet, 4 N − 3. &c. Nihil enim vetat quo minus generali methodo loco etiam ipſius 3. reliquos in infinitum impares vſurpemus, variando cubos.

Sume cubum quemlibet, & huic adde vnitatem, fiet latus quæſiti quadratoquadrati.

Quod ſi velis reperire quadratum, & cubum, & triangulum, ex quibus inuentus quadratoquadratus componitur. Adde 1. quadratoquadrato inuento, & hinc auſer duplum quadrati ab eodem latere profecti, relinquetur quadratus quæſitus. Cubus verò is eſt quem ab initio ſumpſiſti. Triangulus verò reperietur ſi ab inuento quadratoquadrato auferas compoſitum ex quadrato & cubo iam inuentis. Verbi gratia, ſume cubum 1. cui adde 1. fiet 2. latus quæſiti quadratoquadratis. Is ergo eſt 16. quem dico componi ex quadrato, cubo, & triangulo. Nam adde 1. ad 16. fit 17. vnde auſer duplum quadrati à latere 2. puta 8. remanet quæſitus quadratus 9. cubus verò eſt is quem ſumpſiſti ab initio, nempe 1. Quare à quadratoquadrato 16. auferendo 9. & 1. ſimul, remanet triangulus 6. ſed & quadratum ſic aliter inuenies, auſer 1. à quadrato ab eodem latere profecto, à quo proficiſcitur quadratoquadratus inuentus, reſiduum erit latus quæſiti quadrati, vt in eodem exemplo, cùm quadratus lateris 2. ſit 4. auſer hinc 1. remanet 3. latus quæſiti quadrati 9.

Rurſus aliter inuenietur triangulus hac arte. Cape duplum cubi ab initio ſumpti, & huic adde vnitatem, fiet latus quæſiti trianguli. Vt in eodem exemplo, duplo cubi 1. adde 1. fiet 3. latus trianguli 6.

Hoc verò lemmate ſoluto, ſoluetur & propoſita quæſtio huiuſmodi Capone.

Sume quadratoquadratum ex triangulo, quadrato, & cubo compoſitum. Tum diuide ſigillatim triangulum, quadratum & cubum, per quadratum à latere quadratoquadrati ſumpti, orientur quæſiti numeri.

Vt in noſtra hypotheſi, diuide ſigillatim 6. 9. 1. per 4. fient quæſiti numeri $\frac{6}{4}. \frac{9}{4}. \frac{1}{4}$. nam eorum ſumma eſt 4. qua ducta in primum fit triangulus 6. & eadem ducta in ſecundum 1. fit quadratus 9 & eadem ducta in tertium, fit cubus 1.

Dignum quoque animaduersione est, ex vi analyseos Diophantææ sequi, summam quæsitorum numerorum esse quadratum numerum, quoniam ponitur huiusmodi summa 1 Q. sic vides in illius hypothesi, summam numerorum esse 81. At in nostra 4. & sic de alijs.

Sed & operæ pretium fuerit adnotasse, quæstionem hanc eodem prorsus artificio extendi posse ad quoslibet polygonos & quaslibet potestates, dummodo iis adnumerentur quadratus & triangulus. verbi gratia.

Inueniantur quinque numeri, vt summa ipsorum ducta in primum, fiat triangulus, in secundum quadratus, in tertium cubus, in quartum Pentagonus, in quintum quadrato quadratus.

Hic euidens est reperiendum esse quadratoquadratum compositum ex triangulo, quadrato, cubo, pentagono, & quadratoquadrato. Is esto 1 Q Q. quadratus autem 1 Q Q + 1 − 2 Q. quo detracto ab 1 Q Q. remanet 2 Q. − 1. diuidendus in cubum, pentagonum, quadratoquadratum, & triangulum. Esto cubus 8. pentagonum 5. Quadratoquadratus 1. relinquitur ergo triangulus 2 Q. − 15. qui ductus in 8. & adsumens 1. facit 16 Q. − 119. æquandandum quadrato. Esto latus eius 4 N. − 1. fiet 1 N. 15. Est ergo triangulus 435. quadratus 50176. cubus 8. Pentagonus 5. Quadratoquadratus 1. Veniamus iam ad propositam quæstionem, & statuantur summa quæsitorum numerorum 1 Q. primus verò $\frac{435}{1 Q.}$. secundus $\frac{50176}{1 Q.}$. tertius $\frac{8}{1 Q.}$. quartus $\frac{5}{1 Q.}$ quintus $\frac{1}{1 Q.}$. Erit illorum summa $\frac{50625}{1 Q.}$. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. 15. Igitur primus est $\frac{435}{225}$. secundus $\frac{50176}{225}$. tertius $\frac{8}{225}$ quartus $\frac{5}{225}$. quintus $\frac{1}{225}$.

QVÆSTIO XLV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ποιῇ τὸν ὑπεροχὸν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλάσσονος λόγον ἔχοντα διπλασίονα. ἔστι δὲ καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ὑποτετάχθω δὲ τῶν ὑπεροχῶν τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἡ τριπλασίων. ἐπεὶ ἢ συναμφότερος ὁ μέσος καὶ ὁ ἐλάσσων ποιεῖ τετράγωνον, ποιείτω $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\delta}$. ὁ ἄρα μέσος μείζων ἐστὶ δυάδος. ἔστω ἀριθμοῦ $\overline{\alpha}$. $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\beta}$. ὁ ἄρα ἐλάχιστος ἔσται $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\beta}$. $\overline{\gamma}$ $\overline{\varsigma^{o}}$ $\overline{\alpha}$. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου $\overline{\varsigma\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\beta}$. ἡ ἄρα ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ἔσται $\overline{\varsigma\tilde{\varsigma}}$ $\overline{\varepsilon}$. καὶ ὁ μείζων ἄρα ἔσται $\overline{\varsigma\tilde{\varsigma}}$ $\overline{\zeta}$. $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\beta}$. λοιπὸν δεῖ δύο διπτάγματα, τότε συναμφότερον μὲν τὸν μείζονα, καὶ τὸν μέσον ποιεῖν τετράγωνον τότε δὲ μείζονα, καὶ δὲ ἐλάχιστον ποιεῖν τετράγωνον, καὶ γίνεταί μοι διπλῆ ἡ ἰσότης $\overline{\varsigma\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\eta}$ $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\delta}$. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ $\overline{\varsigma\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\varepsilon}$. $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\delta}$. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικὰς, δύνασθαι ἐστὶν ἡ ἴσωσις. πλάσω ἀριθμοὺς δύο, ἵνα τὸ ὑπὸ αὐτοῖν ᾖ $\overline{\varsigma\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\beta}$. καθὼς ἴσμεν διπλῆν ἰσότητα. ἔστωσαν $\overline{\varsigma^{o}}$ τὸ ἥμισυ, καὶ $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\delta}$. καὶ γίνεται ὁ $\overline{\varsigma^{o}}$ $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\rho\iota\beta}$. ἐλθὼν δεῖ τὰς ὑποστάσεις, ἃ δύναμαι ἀρχὴν ἀπὸ $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\beta}$. τὸν $\overline{\varsigma^{o}}$ $\overline{\alpha}$. τουτέστι τὰς $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\rho\iota\beta}$. θέλω οὖν τὸν $\overline{\varsigma^{o}}$ διῃρῆσθαι ἐλάττονα $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\beta}$. ὥστε καὶ $\overline{\varsigma\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\varsigma}$ $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\delta}$. ἐλάσσονες ἔσονται $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\iota\varsigma}$. ἐὰν γὰρ ἡ δυὰς δῶ τὰ $\overline{\varsigma\varsigma^{\alpha}}$ $\overline{\varsigma}$. γίνεται καὶ προσλάβῃ $\overline{\mu^{o}}$ $\overline{\delta}$.

INVENIRE tres numeros, vt interuallum maioris & medij, ad interuallum medij & minoris datam habeat rationem; sed & bini sumpti quadratum constituant. Imperetur vt interuallum maioris & medij, interualli medij & minimi sit triplum. Iam cùm summa medij & minimi sit quadratus, esto 4. ergo medius maior est binario. esto 1 N. + 2. Igitur minimus erit 2 − 1 N. & quoniam interuallum maximi & medij, est triplum interualli medij & minimi interuallum autem medij & minimi est 2 N. erit interuallum maximi & medij 6 N. Quamobrem maximus erit 7 N. + 2. Supersunt duo postulata, nimirum vt maximus cum medio faciat quadratum, & vt maximus cum minimo faciat quadratum, & occurrit duplicata æqualitas, nempè 8 N. + 4. æquales quadrato, & 6 N. + 4. æquales quadrato, & quia vnitates sunt quadratæ, expedita est æquationis ratio. Statuo duos numeros quorum mutuo ductu fiant 2 N. sicut nouimus in duplicata æqualitate faciendum. sunto $\frac{1}{2}$ N. & 4. fit 1 N. 112. At vbi me ad positiones confero, non possum de 2. auferre 1 N. nimirum 112. Volo igitur numerum inueniri minorem quàm 2. atque sic etiam 6 N. + 4. minores erunt quàm 16. nam binario in 6 N. multiplicato, & additis 4. fiunt 16. Quandoquidem ergo quæro 8 N. + 4. æquari quadrato,

& 6 N. + 4. æquari quadrato, ſed & à binario fit quadratus 4. ſunt tres quadrati 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & 4. & interuallum maximi & medij eſt triens interualli medij & minimi: eò res rediit vt inueniantur tres quadrati, vt interuallum maximi & medij, ſit triens interualli medij & minimi, ſed & minimus ſit 4. Medius autem minor quàm 16. Ponatur minimus 4. At medij latus 1 N. + 2. Ipſe igitur erit 1 Q. + 4 N. + 4. Quia ergo interuallum maximi & medij, eſt triens interualli medij & minimi, at interuallum medij & minimi eſt 1 Q. + 4 N. vtique maximi & medij interuallum erit $\frac{1}{3}$ Q. + 1$\frac{1}{3}$ N. At eſt medius 1 Q. + 4 N. + 4. Igitur maximus erit 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5$\frac{1}{3}$ N. + 4. æqualis quadrato. Omnia nouies. Ergo 12 Q. + 48 N. + 36. æquatur quadrato, & huius quadrans, nempè 3 Q. + 12 N. + 9. æquàtur quadrato. Atqui oportet & medium minorem eſſe quàm 16. Quare & latus minus eſſe oportet quàm 4. latus autem medij eſt 1 N. + 2. Proinde 1 N. + 2. minus ſunt quam 4. & ſublato vtrimque binario. 1 N. minor eſt quàm 2. volens itaque 3 Q. + 12 N. + 9. æquare quadrato, formo quadratum à 3. cum defectu aliquot numerorum, & fit 1 N. ex aliquo numero ſexies ſumpto, & adſciſcente 12. nimirum 12 N. æquationis, & diuiſo per interuallum quo numeri quadratus ſuperat quadratos qui ſunt in æquatione, nempè 3. Eò itaque deducta res eſt, vt inueniatur numerus qui ſexies ſumptus, & adſciſcens 12. diuiſuſque per interuallum quo ipſius quadratus excedit ternarium, quotientem binario minorem exhibeat. Eſto quæſitus 1 N. Hic ſexies ſumptus & adſciſcens 12. facit 6 N. + 12. Quadratus autem illius detracto ternario facit 1 Q. − 3. Volo ergo 6 N. + 12. diuidi per 1 Q. − 3. & facere quotientem minorem quam 2. Atqui 2. diuiſus per vnitatem, facit quotientem 2. Proinde 6 N. + 12. ad 1 Q. − 3. minorem habet rationem quàm 2. ad 1. Quare & planus plano inæqualis eſt. Igitur productus ex 6 N. + 12. in 1. minor eſt producto ex 2. in 1 Q. − 3. hoc eſt 6 N. + 12. minus ſunt quàm 2 Q. − 6. Adiiciantur

πειῶν μ^{ι} ις̄. ἐπὶ οὗ ζητῶ ϛϛ^{νι} ῆ. μ^{ι} δ̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ ϛϛ^{νι} ε̄. μ^{ι} δ̄. ἴσους πετραγώνῳ. ἀλλ' καὶ ὁ ἀπὸ τῆς δυάδος τουτέστι μ^{ι} δ̄. τετράγωνός ἐστι. γίνονται τρεῖς τετράγωνοι ις̄ ῆ. μ^{ι} δ̄. καὶ ϛϛ ε̄. μ^{ι} δ̄. καὶ μ^{ι} δ̄. καὶ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστίν. ἀπῆκται μὲν εἰς τὸ ἐυρεῖν τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ᾖ. ἔστι δ' ὁ μὲν ἐλάχιστος ᾖ μ^{ι} δ̄. ὁ δ' μέσος ἐλάσσων μ^{ι} ις̄. τετάχθω ὁ μὲν ἐλάχιστος μ^{ι} δ̄. ἡ δὲ τοῦ μέσου πλευρὰ ϛ^{ι} ᾱ. μ^{ι} β̄. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τριγώνου δ^{ου} α^{ν}. ϛϛ δ̄. μ^{ι} δ̄. ἐπὶ οὗ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τρίτον μέρος ἐστίν, καὶ ἔστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου δ^{ου} ᾱ. ϛϛ δ̄. ὥστε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μείζονος, καὶ τοῦ μέσου ἔσται δ^{ου} ᾱ ϡ^{ν}. ϛ^{ι} ᾱ. ᾱ ϡ^{ν}. καὶ ἔστι ὁ μέσος δ^{ου} ϛϛ δ̄. μ^{ι} δ̄. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται δ^{ου} ᾱ. ᾱ ϡ^{ν}. ϛϛ ε̄. ᾱ ϡ^{ν} μ^{ι} δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. πάντα ἐπιπέδοις δυνάμεις ἄρα ιβ̄. ϛϛ^{ιι} μη̄. μ^{ι} λε̄. ἴσαις τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον αὐτῶν δ^{ου} γ̄. ϛϛ^{ιι} ιβ̄. μ^{ι} ϟ̄. ἴσοι τετραγώνῳ, δεῖ δὴ καὶ τὸν μέσον ἐλάσσονα εἶναι μ^{ι} ις̄ καὶ τῶν πλευρὰν δηλαδὴ ἐλάσσονα εἶναι μ^{ι} δ̄. ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ μέσου ἐστὶν ϛ^{ι} ᾱ. μ^{ι} β̄. ἀριθμὸς ἄρα εἷς μ^{ι} β̄. ἐλάττονές εἰσι μ^{ι} δ̄. καὶ κοινὸν ἀφῃρήσθωσαν τὰ β̄ μ^{ι}. ὁ ϛ^{ι} ἔσται ἐλάσσων μ^{ι} β̄. γίγνονται οὖν μοι δ^{ου} γ̄. ϛϛ^{νι} ιβ̄. μ^{ι} θ̄. ἴσας πεῖσαι τετραγώνῳ. πλάσσω τετράγωνόν τινα ἀπὸ μ^{ι} γ̄. λοιπὰς ϛϛ^{νι} τινας, καὶ γίνεται ὁ ϛ^{ι} ἕκτινος ἀριθμὸς ἑξάκις ἡμιολίου, καὶ ἀφῃρημένος τὸν ιβ̄. ἵστησι δὲ ἰσώσεως τὰς ϛϛ^{νι} ιβ̄. καὶ μειζόνος εἰς τὴν ὑπεροχὴν, ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ϛ^{ι} τετράγωνος τῆς δυνάμεων τῆς ἐν τῇ ἰσώσει τετάρτης. ἀπῆκται δὴ μοι εἰς τὸ ἐυρεῖν πνα ϛ^{ι}. ὃς ἑξάκις ἡμιόλιος, καὶ ἀφῃρημένος μ^{ι} ιβ̄. μειζόμενος εἰς τὴν ὑπεροχὴν ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τετράγωνος, τετράδος, ποιεῖ τὴν ἀβδόμην ἐλάσσονα μ^{ι} β̄. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ^{ι} ᾱ. οὗτος ἑξάκις ἡμιόλιος, καὶ ἀφῃρημένος μ^{ι} ιβ̄. ποιεῖ ϛϛ^{νι} ε̄. μ^{ι} ιβ̄. ὁ δὲ ἀπ' ἀπὸ τετράγωνος λείψας μ^{ι} Γ̄. ποιεῖ δ^{ου} ᾱ. ϒ μ^{ι} Γ̄. πάλιν ἄρ ϛϛ^{νι} ε̄. μ^{ι} ιβ̄. μερίζεσθαι εἰς δ^{ου} ᾱ ϒ μ^{ι} γ̄. καὶ ποιεῖν τὴν ἀβδόμην ἐλάσσονα μ^{ι} β̄. καὶ ὁ β̄ μειζόμενος εἰς μονάδα μίαν ποιεῖ τὴν ἀβδόμην, δυάδα, ὥστε ϛϛ^{νι} ε̄ μ^{ι} ιβ̄ ἀφῃρ δύναμιν ᾱ

quæ desunt vtrimque vnitates, erunt 2 Q. maiores quam 6 N. + 18. In æquatione autem hac explicanda, dimidium numerorum in se ducimus, & fit 9. ducimus etiam quadratos in vnitates, & fiunt 36. & addito 9. fiunt 45. cuius latus non minus est 7. Adde semissem numerorum, & diuide per quadratos, fit 1 N. minor ς. Oportet igitur 3 + 12. N. + 9. æquare quadrato a latere 3 − 5 N. & fit 1 N. $\frac{8}{11}$ hoc est $\frac{8}{11}$. Posueram autem medij quadrati latus 1 N. + 2. erit ergo huiusmodi latus. $\frac{30}{11}$ ipse verò quadratus $\frac{900}{121}$. venio igitur ad primò propositum, & statuo $\frac{900}{121}$ qui est quadratus, æqualem 6 N. + 4. & omnia ducendo in 121. fit 1 N. $\frac{484}{900}$ minor vtique binario. Ad positiones quæstionis initio propositæ. Statueramus medium 1 N. + 2. minimum 2 − 1 N. Maximum verò 7 N. + 2. erit ergo maximus $\frac{1225}{726}$. secundus $\frac{605}{726}$. minimus seu tertius $\frac{121}{726}$. & quia denominator 726. non est quadratus sed eius sextans 121. est quadratus, omnium sextantes accipiamus, & erit similiter primus $\frac{225}{121}$. secundus $\frac{105}{121}$. tertius $\frac{21}{121}$. Quod si in integris hæc desideras, ne semissis intercurrat, omnia quadruplica, & erit primus $\frac{900}{121}$. secundus $\frac{420}{121}$. tertius $\frac{84}{121}$. & demonstratio manifesta.

IN QVAESTIONEM XLV.

PRÆCLARVM est hoc problema, & admirandæ subtilitatis, in quo etiam continetur nouus modus vtendi duplicata æqualitate omnium quos hactenus explicauimus, elegantissimus. Cùm ergo tres operationes instituat Diophantus, age singulas persequamur, vt multa dilucidentur, in quibus omnino cæcutiit Xilander.

In prima itaque operatione. Aduerte primò pro quadrato quem conficiunt medius & minimus sumi potuisse quemlibet vnitatum numerum quadratum. Author sumpsit 4. minimum scilicet more suo.

Aduerte secundo cur inferat medium maiorem esse debere binario, causam esse quia medius debet esse maior minimo. Quare posita summa medij & minimi 4. oportet medium excedere semissem ipsius 4.

Aduerte tertiò cùm æquandi sint quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. Diophantum indicare primùm, modum illum resoluendi duplicatam æqualitatem, quo sæpè in simili vsus est libro tertio. Quia enim vnitatum numerus vtrobique quadratus est, procedit æquatio, si sumantur duo numeri quorum mutuo ductu fiat interuallum 2 N. ita tamen vt in semisse summæ illorum contineatur 2. latus quadrati 4. tales sunt ; N. & 4. Quare si horum summæ semissis quadratus æquetur ipsi 8 N. + 4. vel si eorundem interualli semissis quadratus æquetur ipsi 6 N. + 4. fiet vtrobique 1 N. 312. Hinc autem hoc in commodi accidit, vt per hunc Numeri valorem resolui non possint hypostases.

Etenim cùm minimus positus sit 2 – 1 N. euidens est valorem Numeri debere esse minorem quàm 2. Proinde cùm hoc modo resoluendo duplicatam æqualitatem vnica solutio reperiri possit, qua fit 1 N. 1/2. patet eum hoc loco inutilem esse. Igitur.

Aduerte quartò aliud hic genus duplicatæ æqualitatis tradi à Diophanto, quo in data hypothesi, & alijs omnibus similibus infinitæ reperiri possunt solutiones, hac arte. Consideratis tribus numeris 8 N. + 4. 6 N. + 4. 4. Quorum minimus 4 est vnitatum numerus quadratus. At interuallum maiorum 2 N. est triens interualli minorum 6 N. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli quo minor illorum superabit 4. quales sunt 64. & 49. Tunc verò siue æques 64. & 8 N. + 4. siue 49. & 6 N. + 4. fiet vtrobique idem valor numeri 7 1/2. Hoc autem ita necessario inuenire, ac proinde modum istum resoluendi duplicatam æqualitatem esse legitimum, sic demonstrabitur. Sint tres numeri A. B C. & interuallum maiorum A B. esto D. interuallum minorum B C. esto E. Rursus sint tres F G H. & maiorum F G. interuallum esto K. minorum L. Ponaturque H æqualis ipsi C. & sic eadem ratio D ad E. quæ K ad L. dico si G fiat æqualis ipsi B. & ipsum F fore æqualem ipsi A. in quo consistit vis omnis duplicatæ æqualitatis. Etenim quia B G ponuntur æquales, si ab his demantur æquales C H. erunt & residui E L. æquales. Cùm ergo sit D ad E. vt K ad L. erunt & ipsi D K æquales. Quamobrem additis æqualibus D. K ad æquales B G. fient & toti A F æquales. Quod demonstrandum erat. Itaque vt reperiat quadratos quales sunt F. G. quorum scilicet interuallum sit triens interualli quo minor G. superat 4. secundam instituit operationem Diophantus.

D – E –
A – B – C –
F 64. G 49. H 4.
K 15. L 45.

In secunda operatione. Aduertè primò minoris quæsitorum quadratorum latus ritè poni 1/2 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. vt in eius quadrato 1 Q. + 4 N. + 4. vnitatum numerus æquetur ipsi 4. ac proinde excessus quadrati illius supra 4. nimirum 1 Q. + 4 N. constet ex solis quadratis & numeris, quorum triens cùm sit 1/2 Q. + 1 1/2 N. constans etiam ex solis quadratis & numeris, eo addito ad minorem quadratum, fit maior quadratus 1 1/2 Q. + 5 1/2 N. + 4. vbi vnitatum numerus reperitur idem quadratus 4. quod accidit quia is reperiebatur in minore quadrato, & vt dictum est, maior quadratus fit addendo minori solos quadratos & numeros, vnde vnitates manent immutatæ. Necesse autem fuit vnitatum numerum quæ sunt in maiori quadrato, quadratum fuisse, ad hoc vt latus eius fingi potuerit.

Aduerte secundò numerum quadrato æquandum, puta in 1/2 Q. + 5 1/2 N. + 4. duci in 9. ad tollendas fractiones, tum productum diuidi per 4. vt æquatio reducatur ad minimos numeros, vnde fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato. Nam vt alias sæpè monuimus tam quadrato in quadratum ducto, quàm per quadratum diuiso, producitur quadratus.

Aduerte tertiò numerum 3 Q. + 12 N. + 9. æquandum esse quadrato cum quadam Numeri determinatione. Etenim vt suprà ostensum est, 6 N. + 4. ita æquandus est quadrato, vt fiat 1 N. minor quàm 2. At si 1 N. sit minor quàm 2. erunt 6 N. minores quàm 12. Quare adiecto 4. erit 6 N. + 4. minor quàm 16. ac proinde latus quadrati cui æquandus est 6 N. + 4. debet esse minus quàm 4. Positum autem est latus illud 1 N. + 2. Igitur 1 N. + 2. minus est quàm 4. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. minor quàm 2. Rectè igitur concludit Diophantus numeri 3 Q. + 12 N. + 9. latus ita fingendum esse, vt fiat 1 N. minor quàm 2. Porro necesse est hoc latus fingi 3 – certo numero Numerorum, vnde patet fieri valorem Numeri, si per quadratum numeri Numerorum in latere positorum ternario multatum, diuidatur sextuplum eiusdem numeri Numerorum, auctum numero 12. Itaque benè infertur quærendum esse numerum cuius sextuplum auctum numero 12. & diuisum per quadratum quæsiti numeri, ternario multatum, det quotientem minorem quàm 2. Ad hunc ergo numerum inueniendum tertiam molitur operationem Diophantus.

In tertia operatione. Cùm 6 N. + 12. debeat diuidi per 1 Q. – 3. ita vt fiat quotiens minor binario, Diophantus ita ratiocinatur. Quouis numero per alium diuiso, quotiens est denominator proportionis diuisi ad diuisorem, qui denominator eò maior est, quo maior est proportio, & contrà. Cùm igitur binario per 1. diuiso fiat quotiès 2. & diuiso 6 N. + 12 per 1 Q. – 3. debeat fieri minus quàm 2. sequitur 6 N. + 12. ad 1 Q. – 3. minorem habere rationem, quam 2. ad 1. Datis igitur quatuor numeris 6 N. + 12. 1 Q. – 3. 2. 1. Cùm minor sit ratio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, sequitur ex primo in quartum produci minorem numerum, quàm ex secundo in tertium, vt demonstrauit Clauius ad decimam nonam septimi. Rectè igitur infert Diophantus 6 N. + 12. minus esse quàm 2 Q. – 6. & adiectis æqualibus 6 N. + 18. minus esse quam 2 Q. Hoc autem vt sit, oportet vtique 2 Q. æquari numero alicui maiori quàm 6 N. + 18. Quod vt præstet considerat primùm Diophantus qualis fiat valor Numeri si 2 Q. ponantur æquales 6 N. + 18. quæ est secunda regula compositarum, quamque modo sibi familiari resoluit, ducendo scilicet numerum quadratorum 2. in vnitates 18. vnde fit 36. cui addit quadratum semissis numeri Numerorum, puta 9. & fit 45. cuius lateri si addatur 3. semissis numeri Numerorum, & summa diuidatur per numerum Quadratorum 2. fit valor Numeri. Sed hæc æquatio solutionem dat irrationalem, quia 45. non habet latus quadratum. Sumitur ergo loco 45. proximè maior quadratus 49. cuius lateri 7. addendo 3. fit 10 quo diuiso

per 2. prodit 5 valor numeri. In hac autem æquatione 6 N. + 18. ponitur minor quàm 2 Q. Quia 2 Q. fiunt æquales 6 N. + 20. Eadem de causa statui potest valor Numeri quilibet numerus major quàm 5. puta 6. 7. 8. &c. Tunc enim semper 2 Q. fient æquales alicui numero maiori quàm 6 N. + 18.

Hæc quidem ad perfectam Diophantæi Problematis explicationem satis superque sufficiunt. Quoniam verò hic vtitur author elegantissimè duplicata æqualitate, vnde re subtilius considerata modos aliquot adinuenimus eadem vtendi, etiam in dissimili casu, quibus sanè difficillima pulcherrimáque problemata feliciter explicari possunt, minimè pigebit non vulgare inuentum curioso lectori tradere vt illo perfruatur. Quemadmodum ergo in hac quæstione Diophantus docet modum quo duo numeri simul æquentur quadrato, cùm vterque componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum, numeri autem vnitatem sunt inæquales & quadrati: sic aio modum dari posse resoluendi duplicatam æqualitatem, cum vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum, componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent rationem quadrati ad quadratum; sed & numeri vnitatum inæquales sunt, siue quadrati sint, siue non. Id autem præstabimus in duplici casu.

Primus casus est, cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, supersit vnitatum numerus solus quadratus. verbi gratia. Propositi sint quadrato æquandi 3 N. + 13. & 1 N. + 7. quia horum interuallum est 2 N. + 6. quo diuiso per 2. fit quotiens 1 N. + 3. quo ablato de 1 N. + 7. supereſt quadratus 4. explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 3 N. + 13. 1 N. + 7. & 4. cùm maiorum interuallum, puta 2 N. + 6. duplus sit interualli minorum, puta 1 N. + 3. Quærendi sunt duo quadrati; quorum interuallum sit duplum interualli, quo minor illorum superat 4. Quod facilè fiet, infinitisque modis insistendo vestigiis Diophanti. Esto enim latus minoris 1 N. + latere quadrati 4. puta 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. cuius excessus supra 4. est 1 Q. + 4 N. cuius duplum 2 Q. + 8 N. quo addito ad minorem quadratum, fiet maior 3 Q. + 12 N. + 4. hic ergo æquandus est quadrato, sed prius determinandum est de valore Numeri. Quia enim minor numerorum quadrato æquandorum est 1 N. + 7. patet talem ei quadratum æquari debere, qui sit maior quàm 7. Quare cùm latus proximum ipsius 7. sit 2 $\frac{1}{4}$. debet & latus quadrati maius esse quàm 2 $\frac{1}{2}$. At latus huius quadrati supra positum est 1 N. + 2. hoc ergo maius fu oportet, quàm 2 $\frac{1}{2}$. & auferendo vtrimque 2. manet 1 N. maior quàm $\frac{1}{2}$. Quoniam igitur vt æquemus quadrato 3 Q. + 12 N. + 4. latus eius ponendum est 2. — certo numerorum numero, vnde fiet valor Numeri diuidendo quadruplum numeri Numerorum auctum numero 12. per quadratum eiusdem numeri numerorum multatum ternario. Euidens est quærendum esse numerum, cuius quadruplum auctum numero 13. & diuisum per quadratum quæsiti numeri multatum ternario, det quotientem maiorem quàm $\frac{1}{4}$. Ponatur quæsitus numerus 1 N. ergo $\frac{4N+13}{1Q+9}$ maior est quàm $\frac{1}{4}$. & omnia ducendo in 1 Q. — 3. fit 4 N. + 12. maior quàm $\frac{1}{4}$ Q. — $\frac{3}{4}$. additoque defectu, & omnia per 4. multiplicando, fit 16 N. + 57. maior quàm 3 Q. Quamobrem æquando 3 Q. numero alicui minori quàm 16 N. + 57. puta 16 N. + 53 $\frac{1}{2}$ cùm fiat 1 N. 7 $\frac{1}{2}$ pronuncio quæsitum numerum sumendum esse minorem quàm 7 $\frac{1}{2}$. talem tamen vt eius quadratus excedat 3. sumatur 3. Igitur numeri 3 Q. + 12 N. + 4. fingo latus 2 — 3 N. & fit 1 N. 4. & sunt quæsiti quadrati 100. & 36. Nam siue æques 100. & 3 N. + 13. siue 36. & 1 N. + 7. fit vtrobique idem valor Numeri 29. Quod erat propositum.

Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis. Oportet vt interualli propositorum numerorum diuidendo Numeros per Numeros minoris numeri, vel contrà; & per quotientem diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus quo detracto ab vnitatibus minoris numeri, supersit quadratus. Vt in exemplo allato vbi interuallum est 2 N. + 6. minor numerus 1 N. + 7. quia diuidendo 2 N. per 1 N. & per quotientem 2. diuidendo vnitates 6. fit 3. quo detracto de 7. remanet quadratus 4. ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 8 N. + 25. & 6 N. + 21. quorum interuallum 2 N. + 4. Quia diuidendo 6 N. per 2 N. & per quotientem 3. multiplicando vnitates interualli 4. fit 12. quo ablato de 21. remanet quadratus 9. ideo poterit explicari æquatio, quærendo duos quadratos quorum interuallum sit triens interualli, quo minor superat 9. Ponatur latus minoris 1 N. + 3. erit ipse 1 Q. + 6 N. + 9. & excessus eius super 9. erit $\frac{1}{3}$ Q. + 2 N. quo ipsi minori quadrato addito, fiet maior 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 8 N. + 9. & omnia ducendo in 9. fiet 12 Q. + 72 N. + 81. æquandus quadrato, & si Numeri determinationem inuestiges, inuenies quadrati latus fingendum esse 9 — tot numeris qui non excedant 14. sed quorum quadratus excedat 12. Ponatur 9 — 4 N. fiet 1 N. 36. & erunt quæsiti quadrati 2025. & 1521. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 250.

Secundus casus est. Cùm numerorum quadrato æquandorum interuallum tale est, vt eo per aliquem vnitatum numerum multiplicato, vel diuiso, & producto vel quotiente à minore propositorum numerorum detracto, deficiat vnitatum numerus solus, qui ad multiplicatorem vel diuisorem.

rationem

rationem habeat quadrati ad quadratum. Vt si proponantur æquandi quadrato 6 N. + 25. & 2 N. + 3. quorum interuallum 4 N. + 22. quia hoc diuiso per 2. fit 2 N. + 11. quo detracto à minore numero supereſt − 8. & numerus 8. ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 6 N. + 25. 2 N. + 3. & − 8. quoniam maiorum interuallum, puta 4 N. + 22. duplum est interualli minorum, quod est 2 N. + 11. Quæram duos quadratos, quorum interuallum sit duplum interualli quo minor superat − 8 Ponatur minor 1 Q. huius interuallum suprà − 8 est 1 Q. + 8. cuius duplum 2 Q. + 16. quo addito ad minorem quadratum, fit maior 3 Q. + 16. Hoc ergo vt æques aptè quadrato, si quæras Numeri determinationem, inuenies latus ponendum esse 4 − tot numeris qui non excedant 4 $\frac{1}{3}$. & quorum quadratus superet 3. Ponatur ergo latus illud 4 − 3 N. fiet 1 N. 4. & erunt quæsiti quadrati 64. & 16. Nam sive æques 64. & 6 N. + 25. sive 16. & 2 N. + 3. fit vtrobique 1 N. 6 $\frac{1}{3}$. Itaque in hoc casu, vt æquatio sit explicabilis, oportet vt interualli propositorum numerorũ diuidendo Numeros per Numeros minoris, vel contra, & per quotientem hunc primum diuidendo, vel multiplicando vnitates interualli, fiat quotiens vel productus, à quo detrahendo vnitates minoris numeri, supersit numerus qui ad primum quotientem habeat rationem quadrati ad quadratum. Vt in allato exemplo, vbi interuallum est 4 N. + 22. minor numerus 2 N. + 3. quia diuidendo 4 N. per 2 N. & per quotientem 2. diuidendo 22. vnitates interualli fit 11. à quo auferendo 3. vnitates minoris numeri, supereſt 8. qui ad quotientem 2. habet rationem quadrato numero expressam, ideo æquatio potuit explicari. Quod si proponantur quadrato æquandi 15 N. + 39. & 12 N. + 31. quorum interuallum 3 N. + 8. quia diuidendo 12 N. per 3 N. fit quotiens 4. Quo ducto in 8. fit 32. à quo auferendo 31. supereſt 1. qui ad quotientem 4. habet rationem quadrati ad quadratum, ideo explicabitur æquatio hac arte. Consideratis tribus numeris 15 N. + 39. 12 N. + 31. & − 1. quia maiorum interuallum 3 N. + 8. est quadrans interualli minorum quod est 12 N. + 32. Quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit quadrans interualli quo minor superat − 1. esto minor 1 Q. erit maior $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{4}$ æquandus quadrato, omnia in 4. fit 5 Q. + 4. æqualis quadrato, & si quæras Numeri determinationem. Inuenies latus eius ponendum 2 − certo numero vnitatum qui non sit maior quàm 2 $\frac{1}{5}$. nec minor quàm 2 $\frac{1}{6}$. Ponatur ergo 2 − 2 $\frac{1}{5}$ N. fiet 1 N. 144. & erunt quæsiti quadrati 25920 $\frac{1}{25}$ & 20736. quos si æques propositis numeris, maiorem maiori, & minorem minori, fiet vtrobique 1 N. 1725 $\frac{1}{11}$.

Hac arte in æquatione quam resoluit Diophantus propositione 17. lib. 3. æquans quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. Cùm ille vnicam solutionem reperire possit, nos infinitas dabimus. Etenim quia interuallum est 5 N. + 5. & diuidendo 5 N. per 5 N. fit 1. per quem diuidendo vnitates 5. fit quotiens 5. à quo auferendo 4. supereſt 1. qui ad priorem quotientem 1. habet rationem quadrati ad quadratum, puta æqualitatis, ideo explicabitur æquatio si quærantur duo quadrati, quorum interuallum sit æquale interuallo quo minor superat − 1. sit minor 1 Q. erit maior 2 Q. + 1. quadrato æquandus, sed si quæras Numeri determinationem inuenies latus fingendum esse 1 − tot numeris qui sint minus quàm 2. & quorum quadratus excedat 2. fingatur 1 − 1 $\frac{1}{3}$ N. fiet 1 N. 28. vt apud Diophantum. Rursus fingatur 1 − $\frac{1}{3}$ N. het 1 N. $\frac{24}{49}$ eruntque quæsiti quadrati $\frac{1176}{2401}$ $\frac{1008}{2401}$. & primum si æques 10 N. + 9. secundum 5 N. + 4. fiet 1 N. vtrobique $\frac{204}{241}$.

Porrò vtraque regula suam vim obtinet qualicunque signo afficiantur numeri quadrato æquandi, vt constat ex sequentibus exemplis.

Sint quadrato æquandi 24. − 8 N. & 9 − 2 N. quia horum interuallum est 15 − 6 N. quo diuiso per 3. fit 5 − 2 N. quo detracto à minore supereſt 4. quadratus numerus, resoluetur æquatio per primam regulam; sit minoris quadrati latus 1 N. + 2. erit ipse 1 Q. + 4 N. + 4. Ergo maior 4 Q. + 16 N. + 4. cuius latus si ponas 2. − 8 N. fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. & quæsiti quadrati $\frac{81}{121}$. & $\frac{49}{121}$. quos si æques propositis numeris, fiet vtrobique idem valor Numeri $\frac{72}{11}$.

Rursus sint quadrato æquandi 30 N. − 17. & 10 N. − 11. quia horum interuallum est 20 N. − 6. quo diuiso per 2. fit 10 N. − 3. quo detracto de minore supereſt − 8. qui ad diuisorem 2. habet rationem quadrati ad quadratum, resoluetur æquatio per secundam regulam. Sit minor quadratus 1 Q. erit maior 3 Q. + 16. cuius latus esto 4 + 1 N. fiet 1 N. 4. Erunt ergo quadrati 64. & 16. qui si æquentur propositis numeris, fiet vtrobique valor Numeri $\frac{52}{10}$.

Rursus sint æquandi quadrato 24 N. − 2 & 8 + 10. cùm horum interuallum sit 16 N. − 12. quo diuiso per 2. fit 8 N − 6. quo detracto à minore supereſt 16. quadratus. Explicabitur æquatio per primam regulam. Sit minoris quadrati latus 4 + 1 N. erit ipse 16 + 8 N. + 1 Q. ergo maior erit 16 + 24 N. + 3 Q. cuius latus esto 4 + 2 N. fiet 1 N. 8. ergo quæsiti quadrati sunt 400. & 144. qui si æquentur propositis numeris, fit vtrobique valor Numeri $\frac{47}{4}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Sed proponatur si placet hac duplicata æqualitas nempè 2 N. + 5. & 6 N. + 3. æquandi quadrato. Quadratus æquãdus 2 N. + 5. erit 16 & quadratus æquandus 6

N.+ 3.erit 36. & inuenientur alij in infinitum quæstioni satisfacientes, nec difficile est regulam generalem ad huiusmodi quæstionum solutionem proponere, vt vix Ismitatio ista Bacheti sit tanto viro digna, cum ad infinitos casus extendi, quod in duobus tantum adinuenit, facillime possit, imo & ad casus omnes possibiles.

QVÆSTIO XLVI.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὺς, ὅπως ἡ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, λόγον ἔχῃ διδομένον, ἔτι δὲ σὺν δύο λαμβανομένοις, ποιῶσι τετράγωνον. ἡ δὲ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου, τριπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς ἣν ὑπερέχει ὁ μέσος τοῦ ἐλαχίστου, ἴσος τετραπλασίων. ἐστὶ δὲ ὁ μεγίστος, καὶ ὁ μέσος ποιῆσαι τετράγωνον, ποιείτωσαν δ̄ ις̄. ὁ ἄρα μέγιστος ἔσται μείζων δ̄ ῑ. ἔστω δ̄ ῑ. μ̄ β̄. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος, μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ μεγίστου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου, καὶ ἐστὶ συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δυνάμεις ις̄. συναμφότερος ἄρα ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος, ἐλάσσων μιᾷ ἐστὶ δυνάμεων ις̄. μείζων δὲ δυνάμεων ῑ. ἔστω οὖν συναμφότερος ὁ μέγιστος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δυνάμεις ϑ̄. ἔστι καὶ ὁ μέγιστος, καὶ ὁ μέσος δ̄ ις̄. ὧν ὁ μέγιστός ἐστι δ̄ ῑ. μ̄ β̄. ἔσται ἄρα καὶ ὁ μέσος δ̄ ῑ. λείψει μ̄ β̄. ὁ δὲ τρίτος δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ β̄. καὶ ἐπεὶ θέλω τὴν ὑπεροχὴν ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τὸν ἀπὸ τοῦ μέσου, τῆς ὑπεροχῆς τοῦ μέσου, καὶ τοῦ ἐλαχίστου τριπλασίονα. ἀλλὰ ἡ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ ἀπὸ τοῦ μεγίστου τετράγωνος, τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνου ἐστὶ δ̄ ξδ̄. ἡ δὲ ὑπεροχὴ, τοῦ μέσου καὶ τοῦ ἐλαχίστου ἐστὶ δ̄ ζ̄. καὶ θέλωμεν τὰς δυνάμεις ξδ̄. τ̄ δ̄ ζ̄. τριπλασίονα. ἀλλ' αἱ δ̄ ζ̄. τριπλασίονα γίνονται ποιῶσι δ̄ κᾱ. ἀλλ' αἱ δυνάμεις ξδ̄. ἐν τῷ τεσσαρακοντάκις καὶ δίς ἐστι τῷ μ̄ β̄. γίνεται οὖν μοι εὑρεῖν τινα ἀριθμὸν, ὃς τεσσαρακοντάκις, καὶ δὶς γινόμενος ποιῇ μ̄ κᾱ. ἔστι δὲ τὰ κᾱ λς̄. τάσσω οὖν τὸν μὲν ἕνα δ̄ ῑ. μ̄ κᾱ λς̄. τὸν δὲ μέσον δ̄ ῑ. λείψει μ̄ κᾱ. λς̄. καὶ λοιπόν ἐστιν ἓν ὑπόταγμα, συναμφότερος τὸν μέσον, καὶ τὸν ἐλάσσονα τριπλάσιος τοῦ μέσου, ἴσος ᾗ ὁ μέσος, καὶ ὁ ἐλάχιστος δ̄ ϛ̄. λείψει μ̄ μβ̄ λς̄. ἵσται τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς ἧς γ̄. λείψει μ̄ ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄. φ̄ ζ̄ ϙε̄. ὅλαι τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος τϛ̄. ϛ̄ λς̄. ᾱ ψ̄ ϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος σξγ̄. γφμδ̄. λς̄. ᾱ ψ̄ ϛ̄. ὁ δὲ τρίτος ιγ̄. ηχπᾱ λς̄. ᾱ ψ̄ ϛ̄.

INVENIRE tres numeros, vt excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad interuallum medij & minimi, datam habeat rationem, sed & bini sumpti faciant quadratum. Porrò excessus quo quadratus mixtini superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum sit triplus. Quandoquidem maximus & medius faciunt quadratum, faciant 16 Q. ergo maximus est maior quàm 8 Q. esto 8 Q. + 2. & quando maximus & medius coniuncti superant summam maximi & minimi, at maximus & medius simul sunt 16 Q. erit vtique summa maximi & minimi minor quidem quàm 16 Q. sed maior quàm 8 Q. Igitur summa maximi & minimi esto 9 Q. Atqui summa maximi & medij est 16 Q. quorum maximus est 8 Q. + 2. erit ergo medius 8 Q. − 2. Tertius verò 1 Q. − 2. & quia volo excessum quo quadratus maximi superat quadratum medij, ad excessum medij supra minimum esse triplum, sed excessus quo quadratus maximi superat quadratum medij est 64 Q. At interuallum medij & minimi est 7 Q. cuius triplum est 21 Q. Porro 64 Q. fiunt ex 32. in 2. ducto: incumbit ergo mihi vt numerum aliquem inueniam, qui per 32 multiplicatus faciat 21. est autem $\frac{21}{32}$. Pono igitur primum 8 Q. + $\frac{21}{32}$. Medium 8 Q. − $\frac{21}{32}$. tertium 1 Q. − $\frac{21}{32}$. & restat implendum vnum postulatorum, nimirum vt summa medij & minimi sit quadratus numerus. est autem hæc summa 9 Q. − $\frac{21}{32}$. hoc ergo æquatur quadrato à latere 3 N. − 6. & fit 1 N. $\frac{135}{192}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1215}{1156}$. secundus $\frac{1161}{1156}$ tertius $\frac{1161}{1156}$.

IN QVAESTIONEM XLVI.

Hic quatuor præſtanda ſunt. Primo ſumma maximi & medij debet eſſe quadratus, ideo ſtatuitur 16 Q. & poni poterat quilibet alius quadratorum numerus quadratus. Quia verò ex duobus inæqualibus numeris, patet maiorem illorum excedere ſemiſſem ſummæ ipſorum eodem numero, quo minor deficit ab eodem ſemiſſe, ideo poſito maximo 8 Q. + 2. ſequitur medium eſſe 8 Q. − 2.

Secundò ſumma maximi & minimi debet quoque eſſe quadratus, ſed quia ſumma maximi & minimi, minor eſt ſumma maximi & medij eodem numero quo medius ſuperat minimum, ideò cùm poſita ſit ſumma maximi & medij 16 Q. oportet vtique ſummam maximi & minimi minorem eſſe quàm 16 Q. Quia verò, vt dictum eſt, ipſe maximus maior eſt quàm 8 Q. multò magis ſumma maximi & minimi, maior erit quam 8 Q. quare rectè concludit Diophantus, pro ſumma maximi & minimi ſumendum eſſe quadratum minorem quàm 16 Q. maiorem quàm 8 Q. puta 9 Q. vnde ſi auferatur maximus qui poſitus eſt 8 Q. + 2. reſtat minimus 1 Q. − 2.

Tertiò exceſſus quadrati maximi ſuper quadratum medij ad exceſſum medij ſupra minimum, datam rationem habere debet, putà triplam. Quia verò maximus eſt binomium conſtans ex quadratis & vnitatibus, puta 8 Q. + 2. At minimus eſt reſiduum eiuſdem binomij, puta 8 Q. − 2. Quadratus autem binomij excedit quadratum ſui reſidui, quadruplo plani ſub partibus comprehenſi, vt conſtat ex geneſi quadrati per quartam ſecundi Euclidis, cùm quadrati partium ſint iidem tam in binimio quàm in reſiduo, ideo ſequitur interuallum quadratorum maximi & medij eſſe quadruplum producti ex 8 Q. in 2. nimirum 64 Q. At interuallum medij & minimi eſt 7 Q. cuius triplum 21 Q. æquari deberet 64 Q. Hoc ergo vt per ipſas poſitiones conſequamur, quærendus eſt numerus loco ipſius 2. qui quater ductus in 8. ſeu in 32. ſemel, efficiat 21. hoc habetur diuidendo 21. per 32. eſtque $\frac{21}{32}$. Hunc igitur ſumentes loco ipſius 2. erit maximus 8 Q. + $\frac{21}{32}$. medius 8 Q. − $\frac{21}{32}$. Minimus 1 Q. $\frac{21}{32}$. & ſic per ipſas poſitiones tribus poſtulati partibus eſt ſatisfactum.

Quartò reſtat vt ſumma medij & minimi ſit quadratus. Quare 9 Q. − $\frac{21}{32}$ æquandus eſt quadrato, cuius latus ponitur à Diophanto 3 N. − 6. non abſque cautione aliqua. Etenim talis inueniri debet valor Numeri, vt 1 Q. ſit maior quàm $\frac{21}{32}$. quia ſcilicet minimus numerus poſitus eſt 1 Q. − $\frac{21}{32}$. At 1 Q. maior erit quàm $\frac{21}{32}$. ſi ſit maior vnitate, & ſi 1 Q. maior ſit vnitate, erit & 1 N. maior vnitate. Itaque cùm fiat valor Numeri ex quodam quadrato adſciſcente $\frac{21}{32}$. & ſic diuiſo per ſextuplum ſui lateris, vt autem fiat quotiens maior vnitate, oportet diuiſum numerum eſſe maiorem diuiſore, quærendus eſt numerus cuius quadratus adſciſcens $\frac{21}{32}$ ſit maior ſextuplo ipſius numeri. Porro talis eſt 6. & omnis numerus ſuprà 6. Quia enim quadratus ipſius 6. æquatur ſextuplo ſui lateris, & quadratus cuiuſlibet numeri ſupra 6. eſt maior ſextuplo ſui lateris, patet addendo $\frac{21}{32}$. ad huiuſmodi quadratum fieri ſemper numerum maiorem ſextuplo lateris. Ideo numeri 9 Q. − $\frac{21}{32}$. latus ritè ponetur 3 N. − 6. vel 3 N. − 7. vel 3 N. − 8. & ſic in infinitum.

Cæterùm eodem prorſus artificio ſoluetur huiuſmodi quæſtio.

Inuenire tres numeros, vt exceſſus quadrati medij ſupra quadratum minimi ad interuallum, quo maximus ſuperat medium datam, habeat rationem. Sed & bin ſumpti faciat quadratum. Sit data ratio tripla.

Ponatur ſumma minimi & medij 4 Q. & eſto medius 2 Q. + 1. minimus 2 Q. − 1. Tum ponatur ſumma minimi & maximi quilibet quadratus maior quàm 4 Q. puta 9 Q. erit ergo maximus 7 Q. + 1. Eſt porro interuallum quadratorum minorum 8 Q. At interuallum maiorum 5 Q. cuius triplum 15 Q. æquari deberet 8 Q. fit autem 8 Q. ex 2 Q. quater in vnitatem. Itaque quærendus eſt numerus loco vnitatis, qui ductus in 2. quater, ſeu qui ductus in 8. ſemel, efficiat 15. is eſt $\frac{15}{8}$. hunc ergo ſumentes loco vnitatis ponemus minimum 2 Q. − $\frac{15}{8}$. medium 2 Q. + $\frac{15}{8}$. maximum 7 Q. $\frac{15}{8}$. Supereſt vt ſumma medij & maximi æquetur quadrato, fit ergo 9 Q. + $\frac{15}{4}$ æqualis quadrato, cuius latus ita fingendum eſt vt fiat valor Numeri maior vnitate, quia minimus poſitus eſt 2 Q. − $\frac{15}{8}$. Quare oportet vt 1 Q. ſit maior quàm $\frac{15}{32}$. quod accidit ſi ſit maior vnitate. Porrò fiet valor numeri ex quodam quadrato multato numero $\frac{15}{4}$. & diuiſo per ſextuplum ſui lateris. Quare vt hac diuiſione prodeat quotiens maior vnitate, oportet 1 Q. − $\frac{15}{4}$ maiorem eſſe quàm 6 N. vnde tandem fit 1 Q. maior quàm 6 N. + $\frac{15}{4}$. qua æquatione reſoluta fit 1 N. maior quàm 7. Igitur numeri 9 Q. + $\frac{15}{4}$ latus fingemus 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ ſuperent 7. Ponatur 3 N. − 10. fiet 1 N. $\frac{25}{40}$. eruntque quæſiti numeri $\frac{1225}{1600}$. $\frac{1225}{1600}$. $\frac{4225}{1600}$. qui ſatisfaciunt poſtulatis, nam bini faciunt quadratos $\frac{2450}{1600}$. $\frac{5550}{1600}$. $\frac{5450}{1600}$. quorum latera $\frac{35}{40}$. $\frac{55}{40}$. $\frac{65}{40}$. interuallum verò quadratorum primi & ſecundi eſt $\frac{3025}{1600}$. ſeu $\frac{189}{100}$. triplus vtique interualli ſecundi & tertij quod eſt $\frac{1225}{1600}$.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER QVINTVS.

QVÆSTIO I.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ιβ̄. γεωμετρικὴ δέ ἐστι ἀναλογία, ὅταν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἀριθμὸς πλευρὰν ἔχῃ τὸν μέσον. ζητῶ πρότερον τοὺς τετραγώνους λείψει μ̄ ιβ̄ ποιεῖ τετράγωνον. ὅτι δὲ τοῦτο ῥᾴδιον, καὶ ἔστιν ὁ μβ̄. α̅ ϛ̅. πάσῳ δὴ ἵνα τῶν ἄκρων μ̄ μβ̄. α̅ ϛ̅. ἡ ἡ ὑπεροχὴ δ̄ α̅. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςς̄ ς̄ α̅ ϛ̅. λοιπόν ἐστιν ἐκάτερον τῶν λοιπῶν τ μ̄ ιβ̄ ποιῶν τετράγωνον. καὶ ἔστι δ̄ α̅ λείψει μ̄ ιβ̄ ἵνα τετραγώνῳ. καὶ ςς̄ ς̄ α̅ ϛ̅ λείψει μ̄ ιβ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. ἡ τοίνυν ὑποχὴ ἔστιν δ̄ α̅ τ ςς̄ ς̄. α̅ ϛ̅. ἡ μέτρησις, μετρεῖ ς̄ α̅ καὶ ς̄ α̅ τ μ̄ ς̄. α̅ ϛ̅. τοῦ ὑποχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ἔστι μ̄ ρξθ̄ ιϛ̅. ταῦτα ἴσα τῷ ἐλάσσονι, τουτέστι, ςς̄ ς̄. α̅ ϛ̅. λείψει μ̄ ιβ̄. καὶ ἔσται ὁ ἀριθμὸς μ̄ τξα̅ ιϛ̅. δεῖ τὰς ὑποτάσεις. ἔσται ὁ εἷς τρεπὸς μ̄ μβ̄. α̅ ϛ̅. ὁ ἢ δεύτερος βτμς̄ ιϛ̅. α̅ ϛ̅. ὁ ἢ τρίτος ιη̄. τκα̅. ϛ̅.

IN VENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quiuis eorum detracto dato numero faciat quadratum. Esto datus 12. Est autem geometrica proportionalitas, cùm numerus sub extremis contentus habet medium pro latere quadrato. Quæro primùm quis quadratus, detractis 12. faciat quadratum, hoc autem facilè fit & est 42 ¼. Pono ergo alterum extremorum 42 ¼. alterum 1 Q. Igitur medius erit 6 ½ N. Restat vt horum vterque demptis 12. faciat quadratum. Proinde 1 Q. — 12. æquatur quadrato, & quadrato, & 6 ½ N. — 12. æquatur quadrato horum interuallum est 1 Q. — 6 ½ N. mensuratio. Metitur 1 N. per 1 N. — 6. ½ horum interualli semissis in se, facit $\frac{49}{144}$. hoc æquatur minori, seu 6 ½ N. — 12. & fit 1 N. $\frac{161}{168}$. Ad positiones. Erit primus 42 ¼ secundus $\frac{2465}{1176}$. tertius $\frac{1300321}{1370736}$.

In V. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM PRIMAM.

RESTITVTO textu, nihil hîc supereſt difficultatis. Quadratum qui detracto 12. relinquat quadratum, inuenit Diophantus per vndecimam secundi, vt benè monet Xilander, cùm hoc nihil aliud sit quàm quærere duos quadratos interuallo 12. differentes. Cæterùm cùm ex duobus numeris quadrato æquandis 1 Q. — 12. & 6 ½ N. — 12. non constet quisnam sit maior altero, potest eorum interuallum statim 1 Q. — 6 ½ N. vt fecit Diophantus, vel etiam 6 ½ N. — 1 Q. supponendo scilicet 6 ½ N. — 12. esse maiorem, & eadem nihilominus inuenietur solutio. Nam metientes erunt 6 ½ — 1 N. & 1 N. quorum summæ semissis quadratus $\frac{169}{144}$ æquatur maiori, putà 6 ½ N. — 12. vt prius. Hinc etiam facilè Canonem fabricabimur.

Sume pro primo quæsitorum, quemlibet quadratum, qui detracto dato numero quadratum relinquat. Huius quadranti adde datum numerum, fiet secundus. Hunc diuide per latus primi, orietur latus tertij.

Sic ponendo primum 42 ½ cum Diophanto, cùm eius quadrans sit 10 ⅜. & addendo 12. fiat 22. ⅜. seu ⅜. tantus erit secundus. Quo diuiso per 6 ½. quod est latus primi, fit latus tertij ⁹⁄₁₆. & ipse tertius ⁸¹⁄₂₅₆. Diophantus loco ⁹⁄₁₆ posuit secundum more suo ¹⁴⁴⁄₂₅₆ exprimens eum per partes à numero 104. denominatas.

QVÆSTIO II.

INVENIRE tres numeros in geometrica proportionalitate, vt quilibet ipsorum adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 20. Rursus quæro quis quadratus adscito 20. faciat quadratum; est autem 16. Pono ergo alterum extremorum 16. alterum verò 1 Q. Igitur medius erit 4 N. Proinde ob ea quæ in præcedente dicta sunt, restat 4 N. + 20. æquari quadrato, & 1 Q. + 20. æquari quadrato, & est horum interuallum 1 Q. — 4 N. Mensuratio metitur 1 N. per 1 N. — 4. horum interualli semissis in se facit 4. æqualem minori seu 4. N. + 20. Quod est absurdum. Oporteret enim 4 maiorem esse quàm 20. sed vnitates 4. sunt quadrans de 16. Porrò 16. non est casu oblatus. Sed est quadratus qui adsciscens 20. facit quadratum. Eò igitur deuentum est vt quæratur quadratus, cuius quadrans sit maior quàm 20. & adsumens 20. faciat quadratum. Vtique quadratus hic maior erit quàm 80. At 81. est quadratus maior quàm 80. Ergo si latus quadrati quem quærimus statuimus 1 N. + 9. erit ipse quadratus 1 Q. + 18 N. + 81. hunc oportet additis 20. facere quadratum. Proinde 1 Q. + 18 N. + 101. æquantur quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. — 11. Erit ergo quadratus 1 Q. + 121. — 22 N. Hæc æquantur 1 Q. + 18 N. + 101. & fit 1 N. ½. Erat autem quæsiti quadrati latus 1 N. + 9. Erit ergo quadratus 90 ¼. Recurro nunc ad id quod initio proponebatur, & statuo primum 90 ¼. tertium 1 Q. medius ergo erit 9 ½ N. & eo ventum est vt quæram quo pacto & 1 Q. + 20. & 9 ½ N. + 20. æquentur quadrato. Interualli semissis in se facit ¼ quod æquatur minori, hoc est 9 ½ N. + 20. & fit 1 N. ⅛. Ad positiones. Erit primus 90 ¼. secundus ⅛. tertius ¹⁄₆₄. ᾱ ς͞ν. τῆς ὑποβοχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ὄζει τξᾱ ι͞ν. ἴσα τοῖς ἐλάσσοσι, τουτέστι ςι͞ς θ͞. ᾱ ς͞ν. μ͂ι. χ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μᾱ ι͞ς͞ν. ὅπερ τοῖς ὑποκάτω. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ξ͞ ᾱ ι͞ν. ὁ δεύτερος τπϑ͞, ᾱ ς͞ν. ὁ τρίτος ᾱχπᾱ ς͞ν. ϡιϛ͞ν.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἐν τῇ γωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν πρόσλαβὼν τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ἡ τὸν κ̄. πάλιν ζητῶ τὶς τετράγωνος πρόσλαβὼν μ̄ι κ̄. ποιεῖ τετράγωνον, ἔστι ἡ ὁ ις̄. τάσσω ζίνων ἵνα τ̄ ἄκρων μ̄ι ις̄. τὸν ἡ ἴσιες τῷ ἄκρων δ͞ᵒ ᾱ. ὁ ἄρα ϑσος ἔσται ςξ̄ δ͞. καὶ κ̄ τὼ προτέρω λοιπὸν γίνεται ζητῶν ςξ͞ᵒ δ͞ μ̄ι κ̄. ἴσοις τετραγώνῳ. καὶ δ͞ᵒ ᾱ. μ̄ι κ̄. ἴσοις τετραγώνῳ, καὶ ἔστι αὐτῷ ἡ ὑποβοχὴ δ͞ᵒ ᾱ. λείψει ςξ̄ δ͞. ἡ μίτρησις, μετρεῖ ς̄ ᾱ. κ̄ ς̄ ᾱ. λείψει μ̄ι δ͞. τῆς ὑποβοχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιεῖ μ̄ι δ͞. ἴσας τῷ ἐλάσσονι ςξ͞ᵒ δ͞, μ̄ι κ̄. ὅπερ ἄτοπον. δεῖ γὸ τέσσαρας μονάδας μὴ ἐλάσσονας εἶ μ̄ι κ̄. ἀλλ' αἱ μ̄ι δ͞. τέταρτόν εἰσι τῷ ις̄. αἱ δὲ μ̄ι ις̄. οὐκ εἰσὶν αἱ τυχοῦσαι. ἀλλ' ὁ τετράγωνός ἐστιν ὁ πρόσλαβὼν μ̄ι κ̄. καὶ ποιῶν τετράγωνον. ἀπῆκται οὖν μοι ζητῆσαι τὶς τετράγωνος ἔχει μέρος τέταρτον, ὃ μεῖζον ὄζει μ̄ι κ̄. πρόσλαβὼν δὲ μ̄ι κ̄. ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε ὁ τετράγωνος γίνεται μείζων μ̄ι π̄. ἔστι δὲ ὁ πᾶ τετράγωνος μείζων π̄. ἐὰν ἄρα τὼ τῆ ζητουμένου τετραγώνα πλευρὰ καταπολάσωμεν ἀπὸ ς̄ ᾱ. μ̄ι δ͞. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος δ͞ᵒ ᾱ. ςξ̄ ιπ̄. μ̄ι πᾱ. δεῖ δὴ μ̄ι κ̄. ὀφείλει γὰρ εἶναι τετράγωνος. ἔστω ἄρα δ͞ᵒ ᾱ. ς̄ι ιπ̄. μ̄ι ρᾱ. ἵσαι τετραγώνῳ ἔστω ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ ᾱ. λείψει μ̄ι ιᾱ. ὁ ἄρα τετράγωνος ἔσται δ͞ᵒ ᾱ. μ̄ι ρκᾱ. λείψει ςξ̄ κβ̄. ταῦτα ἴσα δ͞ᵒ ᾱ. ς̄ς͞ιε ιπ̄. μ̄ι ρᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μονάδος ἡμίσεως. ἰω̄ δὲ ἡ τῆ ζητουμένου τετραγώνου πλευρὰ ς̄ ᾱ. μ̄ι δ͞. ἔσται ἄρα ὁ τετράγωνος μ̄ι ζ̄. ᾱ ι͞ν. νῦν ἀνατρέχω ὅθεν τὸ ὀξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω πρῶτον τῆ ἄκρων μ̄ι ζ̄. ᾱ ι͞ν. τὸν δὲ τρίτον δ͞ᵒ ᾱ. ὁ ἄρα μέσος ἔσται ςξ̄ θ͞. ᾱ ς͞ν. καὶ ἔρχομαι εἰς τὸ ζητεῖν δ͞ᵒ ᾱ. μ̄ι κ̄. ἴσας τετραγώνῳ. καὶ ςξ͞ᵒ θ͞. ᾱ ς͞ν. μ̄ι κ. ἴσοις τετραγώνῳ, καὶ ἔστι ἡ ὑποβοχὴ δ͞ᵒ ᾱ. λείψει ςξ̄ θ͞. ᾱ ς͞ν. μετρεῖ ς̄ ᾱ κ̄ ς̄ ᾱ. λείψει μ̄ι θ̄.

IN QVAESTIONEM II.

IN prima operatione occurrunt quadrato æquandi 4 N. + 20. & 1 Q. + 20. sed explicari non potest huiusmodi æquatio, quia horum interuallum est 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1. N. − 4 quorum interuallum 4. cuius semissis quadratus 4. æquari debet minori, putà 4 N. + 20. quod est impossibile, quia 4. non est maior quàm 20. Considerat ergo Diophantus vnde 4. prouenerit, est autem quadratus semissis numeri Numerorum 4. pro secundo positi. At secundus statuitur numerus Numerorum qui latus est quadrati pro primo positi, quia enim primus positus est 16. fit secundus 4. N. Quoniam ergo quadratus semissis cuiuslibet numeri, est quadrans quadrati totius numeri, eò quod quadrati sunt in ratione duplicata laterum, rectè concludit Diophantus quadratum 4. esse quadrantem quadrati 16. Quare eò deuentum est, vt loco 16. statuamus pro primo aliquem alium quadratum, qui adscito 20. faciat quadratum, & cuius quadrans sit maior quàm 20. Reliqua plana sunt, nec maiore explicatione indigent. Sed ex ipsa operatione talis Canon elici potest.

Sume pro primo quemlibet quadratum, qui adscito dato numero quadratum faciat, & cuius quadrans excedat datum numerum. Ab huius quadrante aufer datum numerum, relinquetur secundus: quem diuide per latus primi, orietur latus tertij.

vt. editum.

QVÆSTIO III.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ προσθεῖναι τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἑκάστου τινὸς αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν ἓν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ τὸν ε̄. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἑκάτερός τε καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τοῦ αὐτοῖς δοθέντος ποιῇ τετράγωνον. γεγόνασιν ἀπὸ δύο τετραγώνων τῆς κ̄ τὸ ἐξῆς. ἐκτίθεμαι οὖν δύο τετράγωνους τῆς κ̄ τὸ ἐξῆς, ὧν μιᾶς ἀπὸ ς̄ ᾱ. ᾱ. μ̄ γ̄. ὧν δὲ ἀπὸ ς̄ μ̄ δ̄ καὶ γίνου οἱ τετράγωνοι ὧν μιᾶς δ̄ ᾱ ις̄ ē. μ̄ ϑ̄. ὧν ὁ δ̄ ᾱ. ις̄ ῑ. μ̄ ις̄. ἄφελε ἀπὸ ἑκάστου μ̄ ε̄. καὶ τάσσω ὧν μιᾶς δ̄ ᾱ. ις̄ ē. μ̄ δ̄. ὧν ὁ δ̄ ᾱ. ις̄ ῑ. μ̄ ιᾱ. ἢ ὁ τρίτην ἢ συναμφοτέρων δὶς πολλαπλασίαν, τουτέστι δ̄ δ̄. ις̄ κθ̄. μ̄ χδ̄. λοιπὸν ἄφελε καὶ τὸν μ̄ μ̄ ε̄. πλεῖν τετράγωνον. δυνάμεις ἄφελε δ̄. ις̄ κθ̄. μ̄ λδ̄. ἵσην τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ις̄ β̄. λείψει μ̄ ē. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος. δ̄ δ̄. μ̄ λē. λείψει ις̄ κδ̄. ἴσων δυνάμεσι δ̄. ις̄ κθ̄. μ̄ λδ̄. καὶ γίνεται ὁ ē μ̄ ᾱ ᵡᵉ. δεῖ τὰς ὑποτάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος βωξα ᵡᵉ. ὁ δὲ δεύτερος ζχμε ᵡᵉ. ὁ δὲ τρίτος β̄. τλē ᵡᵉ.

DATO numero apponere tres numeros, vt quilibet ipsorum, & qui à binis producitur quibusuis datum adsumens numerum, faciat quadratum. Datus esto 5. Quoniam habemus in porismatibus; si duo sint numeri, quorum tam vterque, quam productus eorum multiplicatione eodem dato numero adscito faciat quadratum, oriuntur à duobus quadratis continenter proximis. Expono duos huiusmodi quadratos, alterum à latere 1 N. + 3. alterum à latere 1 N. + 4. & fiunt quadrati, alter quidem 1 Q. + 6 N. + 9. alter verò 1 Q. + 8 N. + 16. Aufero ab vtroque 5. & statuo alterum 1 Q. + 6 N. + 4. alterum 1 Q. + 8 N. + 11. tertium autem duplum summæ horum dempta vnitate, hoc est 4 Q. + 28 N. + 29. Restat ergo vt & hic adsumpto 5. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 28 N. + 34. æquantur quadrato, à latere scilicet 2 N. + 6. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 28 N. + 34. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{121}{196}$. secundus $\frac{225}{196}$. tertius $\frac{1681}{196}$.

IN QVAESTIONEM III.

PORISMA quod assumit Diophantus, vniuersalius propositum, demonstrauimus propositione decima tertia libri secundi porismatum. Nam propositio illa hic facilè applicatur, si quod ibi vniuersaliter demonstratur de quibuscumque quadratis, adaptetur quadratis continenter proximis. Etenim cùm laterum interuallum sit vnitas, quæ numeros quos diuidit non immutat, patet quadratos multatos dato numero, vnà cum duplo summæ illorum, vnitate multato, præstare quod ait Diophantus, & reliqua plana sunt.

Porrò vsus erit huius porismatis, quare demonstratum est loco citato, si proponatur huiusmodi quæstio.

Inuenire tres numeros, vt quem bini producunt adscito dato numero quadratum faciat, sed & quilibet in eundem aliquem numerum ductus, & assumens eundem datum numerum, fiat quadratus.

Datus esto 5. & quilibet ductus in 2. & adsumens eundem 5. fiat quadratus. Exponantur duo quadrati, quorum interuallum sit 2. sintque eorum latera 1 N. + 3. & 1 N. + 5. erunt ipsi quadrati 1 Q. + 6 N. + 9. & 1 Q. + 10 N. + 25. aufer ab vtroque 5. & residua diuide per interuallum laterum 2. fient $\frac{1}{2}$ Q + 3 N + 2. & $\frac{1}{2}$ Q. + 5 N. + 10. primus & secundus quæsitorum, tertius autem erit duplum summæ illorum multatum eodem interuallo laterum 2. putà 2 Q. + 16 N. + 22. Restat vt & huius duplum adscito 5. quadratum faciat. Igitur 4 Q. + 32 N. + 49. æquatur quadrato, esto latus eius 2 N. − 17. fiet 1 N. $\frac{17}{4}$. Sunt ergo quæsiti numeri $\frac{1445}{144}$. $\frac{1517}{144}$. $\frac{1445}{72}$. qui satisfaciunt proposito.

OBSERVATIO D. P. F.

EX hac propositione facilè deducetur sequens quæstio. Inuenire 4. numeros eâ conditione, vt quod sub binis producitur, adscito dato numero faciat quadratum. Inueniantur tres quæstioni satisfacientes ita vt singuli dato numero aucti conficiant quadratos iuxta hanc propositionem. Ponatur quartus inueniendus esse 1 N. + 1 orietur triplicata æqualitas cuius solutio nostræ methodi beneficio erit in promptu. Vide adnotata ad 24. quæstionem lib. 6. soluetur itaque quæstio quam proposuit Bachetus ad quæstionem 12. lib. 3. per hanc methodum quæ cum multò sit generalior, hoc præterea amplius habet quam methodus Bacheti quod tres priores numeri aucti dato numero conficiant quadratos in nostrâ solutione. An verò ita solui possit quæstio vt etiam quartus auctus dato numerò conficiat quadratum, Hoc sanè hactenus ignoramus. Inquiratur itaque vlterius.

QVÆSTIO IV.

DATO numero, innenire alios tres, vt quiuis ipsorum, & qui ex binis quibusque fit, multatus dato numero faciat quadratum. Esto datus 6. Rursum similiter expono duos quadratos continenter proximos, alterum 1 Q. alterum 1 Q. + 2 N. + 1. & his adiicio datum numerum, & statuo primum 1 Q. + 6. secundum 1 Q. + 2 N. + 7. tertium similiter duplum amborum dempta vnitate, hoc est 4 Q. + 4 N. + 25. Restat vt & is detracto 6. faciat quadratum. Proinde 4 Q. + 4 N. + 19. æquantur quadrato, esto latus eius 2 N. 5. & fit quadratus 4 Q. + 36 − 24 N. æqualis 4 Q. + 4 N. + 19. & fit 1 N. $\frac{17}{28}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{2023}{784}$. secundus $\frac{2737}{784}$. tertius $\frac{3451}{784}$.

ΔΟΘΕΝΤΙ ἀριθμῷ ἄραι τρεῖς ἀριθμούς, ὅπως ἑκάτερός τε αὐτῶν, καὶ ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας τὸν δοθέντα ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ε̄. πάλιν δὴ ὁμοίως ἐκτίθεμαι δύο τετραγώνους τοὺς κϛ̄ τὸ ἐξῆς ὄντας, ὧν μὲν δ̄ ᾱ. ὧν δὲ δ̄ ᾱ. ις̄ β̄. μ̄ ᾱ. καὶ τούτοις προστίθημι τὸν δοθέντα, καὶ τάσσω μὲν τὸν πρῶτον δ̄ ᾱ μ̄ ε̄. τὸν δὲ δεύτερον δ̄ ᾱ ις̄ β̄ μ̄ ζ̄. τὸν δὲ τρίτον ὁμοίως τῷ διπλασίονος συναμφοτέρου ὑπερέχοντα μονάδι ᾱ. τουτέστι δ̄ δ̄. ις̄ δ̄. μ̄ κᾱ. λοιπὸν ἄρα καὶ τοῦτον λείψαντα μ̄ ε̄. ποιεῖν τετράγωνον. δ̄ ἄρα δ̄. ις̄ δ̄. μ̄ ιθ̄. ἵνα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ις̄ β̄. ϛ̄ μ̄ ε̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ δϛ̄ μ̄ λϛ̄. λείψει ις̄ κδ̄. ἔσται δ̄ δ̄. ις̄ δ̄. μ̄ ιθ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ιζ̄ ϟ̄ϛ̄. ὅθεν αἱ τοῦ τάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος δπϛ̄ ϟ̄ϛ̄. ὁ δὲ δεύτερος ,ϛφλθ̄ ϟ̄ϛ̄ ϟ̄. ὁ δὲ τρίτος β̄. ,βχξ̄ ϟ̄ϛ̄ ϟ̄.

IN QVAESTIONEM IV.

PORISMA quoque quod hîc assumitur, demonstratum est à nobis propositione decimaquarta libri secundi porismatum, sed vniuersalius, cuius etiam vsus ampliari potest, eodem prorsus modo, quo ad præcedentem docuimus id fieri posse in simili porismate.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῦν ἑαυτῶ προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτῶ λοιπὸν ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἔχομεν πάλιν ἐν τοῖς πορίσμασιν. ὅτι παῦσι δύο τετραγώνοις τοῖς κατὰ τὸ ἑξῆς προσαρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς ὃς ὢν διπλασίων σωαμφοτέρου τῷ δυάδι μείζων, ξεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἑαυτῶ προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτῶ λοιπὸν ποιεῖ τετράγωνον. τάσσωμεν οὖν τῶν ζητουμένων τριῶν τετράγωνον. ὧν μὲν δ^{ος} ᾱ. ες β. μ^{ος} ᾱ. ὧν δὲ ὁ δ^{ος} ᾱ. ες δ. μ^{ος} δ. τὸν δὲ τρίτον δ^{ον} δ. ες ιβ. μ^{ος} ιβ. λοιπὸν δεῖ κατασκευάσαι τὸν τρίτον, τουτέστι δ^{ον} δ. ἀριθμοῦ ιβ. μ^{ος} ιβ. ἵνα τετραγώνῳ, καὶ ἐκείνου τὸ τέταρτον γίνεται δύναμις ᾱ. ἀριθμοὶ γ. μ^{ος} γ. ἵσα τετραγώνῳ. πλάσω τὸν πλευρὰν ἀπὸ ς^{ων} ᾱ. ϛ μ^{ος} Γ. αὐτὸς ἄρα ἔσται ὁ τετράγωνος. δ^{ος} ᾱ. μ^{ος} θ. ϛ ες ϛ. ἴσα δ^{ος} ᾱ. ες^{ους} γ. μ^{ος} γ. καὶ γίνεται ὁ ς^{ος} μ^{ος} β $\overline{\gamma}$. ὅτι τοὺς ἀπὸ ς^{ων} ἴσους ἀσσς. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος κα $\overline{\delta}$, ὁ δὲ τρίτος ρμς $\overline{\delta}$.

INVENIRE tres quadratos, vt quem bini faciunt planum, siue adsciscat amborum summam, siue reliquum, faciat quadratum. Habemus rursum in porismatibus. Quod duobus quibúsque quadratis continenter proximis adinueniri potest alius numerus, qui cum sit summæ illorum duplus, & binario ampliot, tres facit numeros, quorum bini quem producunt, siue adsciscat amborum summam, siue reliquum, faciat quadratum. Statuo igitur trium quæsitorum quadratorum, alterum 1 Q. + 2 N. + 1. alterum 1 Q. + 4 N. + 4. tertium 4 Q. + 12 N. + 12. Restat vt tertiũ, nempè 4 Q. + 12 N. + 12. æquemus quadrato, sed & huius quadrans sit 1 Q. + 3 N. + 3. æqualis quadrato. Formo quadratum ab 1 N. − 3. est ergo quadratus ipse 1 Q. + 9 − 6 N. æqualis 1 Q. + 3 N. + 3. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{1}{9}$. secundus $\frac{49}{9}$. tertius $\frac{169}{9}$.

IN QVAESTIONEM V.

Hic codex manu exaratus porismatis explicationem sic exhibet. ὅτι παῦσι δύο τετραγώνοις τοῖς καθ' τὸ ἑξῆς, προσαρίσκεται ἕτερος ἀριθμὸς, ὃς ὢν διπλασίων σωαμφοτέρου τῷ δυάδι μείζων, ὅς πε τὸν ἐκ τριάδικα μείζονα, ξεῖς ἀριθμοὺς ποιεῖ, ὧν ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνῦν, ἑαυτῶ τε προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτῶ τε λοιπὸν, ποιεῖ τετράγωνον. Vnde nos, tanquam subreptitia, expunximus verba illa, ὅς πε τὸν ἐκ τριάδικα μείζονα. Ipsum verò porisma demonstrauimus vniuersalissimè propositione decimasexta libri secundi porismatum. Itaque nihil hîc supereſt difficultatis.

QVAESTIO VI.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν λείψας δυάδα ποιῇ τετράγωνον, ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνῦν ἑαυτῶ λείψῃ σωαμφότερον, ἑαυτῶ λοιπὸν, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἑκάστῳ τῶν ἐν τοῖς προτεθεῖσιν εὑρεθέντων ἀριθμῶν, προστῶ δυάδα, οἱ γενόμενοι ποιοῦσι τὸ προκείμενον. τὸ δὲ γενόμενον ἑαυτοῦ ἐστι. τάσσωμεν γὰρ ὧν ἐζητουμένων δ^{ος} ᾱ. μ^{ος} β. τὸν δὲ ἕτερον δ^{ος} ᾱ. ες^{ους} β. μ^{ος} γ. τὸν δὲ τρίτον δ^{ος} δ. ες^{ους} δ. μ^{ος} ϛ. καὶ μένει τὰ ὑποτεταγμένα. λοιπὸν ἐστι δ^{ος} δ. ες^{ους} δ. μ^{ος} δ. ἰσῶσαι τετραγώνῳ, καὶ τὸ τέταρτον, ὅστε καὶ δύναμιν ᾱ. ς^{ων} ᾱ. μ^{ος} ᾱ. ἵσους ἓξ τετραγώνῳ, καὶ ἐπὶ τάξωμεν τῆς τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ

INVENIRE tres numeros, vt quiuis eorum binario multatus faciat quadratum, & qui fit ex binorum mutuo ductu, siue amborum summam abiiciat, siue reliquum, fiat quadratus. Si cuiuis superiore quæstione inuentorum numerorum adiicio 2. sic confecti satisfaciunt postulatis. Quod itaque dicitur tale est. Ponimus vnum eorum qui quæruntur 1 Q. + 2. Alterum 1 Q. + 2 N. + 3. tertium 4 Q. + 4 N. + 6. & fit quod iubetur. Restat vt 4 Q. + 4 N. + 4. æquetur quadrato. Proinde & quadrans eius æquatur quadrato, nempè 1 Q. + 1 N. + 1. Quod si latus quadrati ponamus à differentia, erit

1 N − 2. fit quadratus 1 Q + 4 − 4 N. æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{5}{4}$. Ad positiones. Erit primus $\frac{25}{16}$. secundus $\frac{125}{16}$. tertius $\frac{625}{16}$. & euidens est demonstratio.

διαφορᾶς. ἔστω δοθὲ ς^{ις} α^{ᾶ} ↓ μ^{ις} β^{ᾶ}. γίνεται ὁ τετράγωνος. δ^{ις} α^{ᾶ}. μ^{ις} δ^{ᾶ}. ↑ ς^{ις} δ^{ᾶ}. ἴσος δ^{ις} α^{ᾶ}. ς^{ις} α^{ᾶ}. μ^{ις} α^{ᾶ}. καὶ γίνεται ὁ ς^{ᾶ} ιϛ^{ᾶ}. δεῖ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος ιθ^{ᾶ} ιϛ^{ᾶ}. ὁ δὲ δεύτερος ριδ^{ᾶ} ιϛ^{ᾶ}. ὁ δὲ τρίτος σμς^{ᾶ} ιϛ^{ᾶ}. ἡ δὲ δόσις φανερά.

IN QVAESTIONEM VI.

IN huius quæstionis propositione, habet codex manuscriptus. ὁ δὲ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἑαυτῷ προσλάβῃ σωαμφότερον, ἑαυτῷ τὸν ὅλον, ποιῇ τετράγωνον, pro quo reposuimus, ἑαυτῷ λείψῃ σωαμφότερον, ἑαυτῷ λοιπὸν, &c.

Porrò duplicem modum tangit Diophantus, soluendi quæstionem istam. Primus est addendo binarium tribus numeris præcedentem soluentibus, vbi nulla opus est operatione Algebræ. Secundus est per operationem Algebræ supponendo porisma quod ostendimus propositione decima septima libri secundi. Nimirum. Si sumantur duo quadrati, itemque duplum summæ illorum & quadrati interualli laterum, fient tres numeri, quibus si addatur sigillatim duplum quadrati interualli laterum, fient tres alij, quorum bini quem producent mutuo ductu, is, siue multetur amborum summa, siue reliquo, fiet quadratus. Vnde sanè operatio Diophanti manifestè pendet, sed & primus modus hinc suam mutuatur demonstrationem, vt luce clarius est.

Huc pertinet quæstio quam tradidit Vieta Zetetico duodecimo libri quinti. Quamuis eam imperfectè tractauerit, omittens alteram illius partem, eò quod Porismatum quæ demonstrauimus propositione decimasexta, & decimaseptima libri secundi perfectam cognitionem non habuit. Nos vniuersalissimè proponemus hoc pacto.

Inueniantur tres quadrati, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, additus ei qui fit ex quadrato dato, siue in amborum summam, siue in reliquum, conficiat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Ponatur primi latus 1 N. secundi 1 N. + 3. erunt quadrati 1 Q & 1 Q + 6 N. + 9. & sit tertius duplum primi & secundi, & quadrati interualli laterum, seu ipsius 9 puta 4 Q. + 12 N. + 36. Constat ergo per decimamsextam secundi porismatum productum ex binorum mutuo ductu adscito producto ex quadrato 9. siue in amborum summam, siue in reliquum, facere quadratum. Restat vt tertius sit quadratus. Ergo 4 Q + 12 N. + 36. æquandus est quadrato, cuius latus esto 2 N. + 4. fiet 1 N. 5. Erunt ergo quæsiti quadrati 25. 64. 196. & satisfaciunt proposito.

Rursus.

Inueniantur tres numeri, vt quiuis eorum multatus duplo dati quadrati, faciat quadratum; & productus ex binorum mutuo ductu, detracto eo qui fit ex dato quadrato, siue in summam amborum, siue in reliquum, relinquat quadratum.

Datus quadratus esto 9.

Si tribus per præcedentem inuentis quadratis addas duplum dati quadrati, puta 18. fient quæsiti numeri 43. 82. 214. qui satisfaciunt postulatis, vt constat ex decimaseptima secundi porismatum. Itaque non satis feliciter quæstiones istas explicauit Franciscus Vieta loco citato, cùm numerorum quos inuenit proprietates penitus perspectas non habuerit.

QVÆSTIO VII.

Lemma ad id quod sequitur. Λῆμμα εἰς τὸ ἑξῆς.

INVENIRE duos numeros, vt productus eorum multiplicatione addito vtriusque quadrato, summam faciat quadratum. Esto primus 1 N. secundus vnitatum quotlibet, puta 1. & est productus eorum multiplicatione 1 N. summa verò quadratorum est 1 Q. + 1 adde 1 N. fit 1 Q. + 1 N. + 1 æqualis quadrato. Esto latus eius 1 N. − 2. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N.

ΕΤΡΕΙΝ δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν προσλαβὼν τοὺς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετραγώνους τὸν συνάμφω ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ πρῶτος ς^{ις} α^{ᾶ}. ὁ δεύτερος μ^{ις} ὅσων θέλεις. ἔστω μ^{ις} α^{ᾶ}. καὶ γίνεται ὁ μὲν ὑπὸ αὐτῶν ς^{ις} α^{ᾶ}. ὁ δὲ ἀπὸ ἑκάτερον αὐτῶν τετράγωνος ποιεῖ δ^{ις} α^{ᾶ}. μ^{ις} α^{ᾶ}. μῆ πω ς^{ις} α^{ᾶ}. γίνεται δ^{ις} α^{ᾶ}. ς^{ις} α^{ᾶ}. μ^{ις} α^{ᾶ}. ἴσοι τετραγώνῳ. ἔστω ἧ πλευρὰ ἀπὸ πλευρᾶς ς^{ις} α^{ᾶ}. λείψει μ^{ις} β^{ᾶ}. γίνεται ὁ τετράγωνος δ^{ις}

ἄ. μὶ δ̄. λείψει ϛ̄ δ̄. ἴσον δι᾽ α̅. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ γ̄ ιϛ̅. ὅπερ τὰς ὑποσάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος γ̄ ιϛ̅. ὁ δὲ δεύτερος ε̄ ιϛ̅. ϗ ἀριθμὸς τῶν μερίων. ἔσται ὁμοίως πρῶτος μ̄ ϛ̅. ὁ δεύτερος ε̄. καὶ ποιῶσι τὸ προκείμενον. ὁ γὰρ ὑπ᾽ αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν ποιεῖ τρίγωνον. ὁσάκις δὲ ἐὰν θέλῃς τὸν γ̄. ϗ τ̄ ε̄. ποιήσουσι οἱ γενόμενοι ἀριθμοὶ τὸ ὑπόταγμα.

æqualis 1 Q. + 1 N. + 1. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. erit primus $\frac{1}{2}$. secundus $\frac{1}{2}$. & abiecto denominatore, erit primus 3. secundus 5. & postulatis respondent, nam productus eorum multiplicatione cum summa quadratorum, facit quadratum. Quotiescunque autem voles ternarium & quinarium sumere, facient numeri qui nascuntur, id quod iuberis.

IN QVAESTIONEM VII.

Hîc triplex varietas contingere potest. Primo enim posito altero 1 N. alter statui potest quotlibet vnitatum. Deinde primus etiam poni potest quilibet Numerorum numerus. Denique latus numeri quadrato æquandi diuersimodè fingi potest.

Restat probandum quod ait Diophantus, nimirum. Si dentur duo numeri quæstioni satisfacientes, duo alij quicunque in eadem ratione sumpti, soluent quæstionem. Sint A B propositum implentes, sint videlicet eorum quadrati C D. & productus multiplicationis E. & summa C E D. sit F. quadratus numerus. Tum sumantur G H in ratione ipsorum A B. & sint eorum quadrati K M, & productus L, & ipsorum K L M. summa sit N. Dico N. esse quadratum. Quia enim vt constat ex constructione vndecimæ octaui est C ad E. & E ad D. sicut A ad B, & similiter est K ad L. & L ad M. sicut G ad H. cùm sit A ad B. vt G ad H ex hypothesi, erit & C ad E. & E ad D, sicut

A 3. B 5. F. 49.
C 9. E 15. D 25.
G 6. H 10. N 196.
K 36. L 60. M 100.

11. *septimi.* K ad L. & L ad M. & permutando erit C ad K. vt E ad L. & vt D ad M. ' Quare & antecedentium summa, puta F ad summam consequentium, puta ad N. est vt vnus antecedens C ad vnum consequentem K. Sed vterque C & K quadratus est. Ergo F ad N. rationem habet quadrati ad quadratum.

14. *octaui.* Ac proinde cùm F sit quadratus ' & N. quadratus erit. Quod demonstrandum erat.

Ex ipsa autem operatione formatur huiusmodi Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate auctum, duo numeri quicunque in ratione quotientis ad vnitatem, satisfacient proposito.

Cæterùm eadem arte soluetur hæc quæstio.

Inuenire duos numeros, vt summa quadratorum, detracto producto relinquat quadratum.

Esto primus 1 N. secundus 1. fit productus 1 N. summa quadratorum 1 Q. + 1. vnde auferendo 1 N. manet 1 Q. + 1 − 1 N. æquandus quadrato. Esto latus 1 N. − 3. fit 1 N. $\frac{1}{2}$. est ergo primus $\frac{1}{2}$ secundus $\frac{1}{2}$. & abiecto denominatore, fit primus 8. secundus 5. & satisfaciunt postulatis. Hinc etiam elicietur iste Canon.

Diuide quadratum quemlibet vnitate multatum, per duplum sui lateris vnitate multatum, quotiens ad vnitatem habebit rationem quæsitorum numerorum.

Vbi hoc animaduersione dignum occurrit, si sumantur duo numeri huic quæstioni satisfacientes, maior quoque illorum & eorum interuallum quæstionem soluunt. At minor illorum & interuallum, soluunt quæstionem Diophanti. Contrà, si duo numeri soluant quæstionem Diophanti, summa ipsorum, & alteruter eorundem, nostram hanc quæstionem soluunt. Sic sumptis 8. & 5. nostram quæstionem soluentibus (nam summa quadratorum detracto producto, facit quadratum 49.) maior 8. & interuallum 3. eandem soluunt quæstionem; nam rursus summa quadratorum detracto producto facit 49. At minor 5. & interuallum 3. soluunt quæstionem Diophanti, cùm summa quadratorum adsumpto producto, rursus faciat 49. Huius rei demonstratio, ab huiusmodi theoremate pendet.

Si numerus secetur in duas partes, quadrati partium, vnà cum producto multiplicationis earundem, æquantur quadratis à toto & à qualibet parte, multatis producto multiplicationis ex toto in eandem partem.

A..... B...C

Sit numerus A C. sectus in A B B C. dico quadratos ex A B. B C. vnà cum producto ex A B in B C. æquari quadratis ex A C. A B multatis producto ex A C in A B. Itemque quadratis ex A C. B C. multatis producto ex A C in B C. Quia enim quadratus ex

4. *secundi.* A C. ' æquatur quadratis ipsorum A B. B C. & duplo producti ex A B. in B C. addito quadrato ex A B. erit summa quadratorum ex A C. A B. æqualis quadrato ex A B. bis, ex B C semel, & duplo

3. *secundi.* producti ex A B in B C. At quadratus ex A B cum producto ex A B in B C. ' æquatur producto ex A C in A B. Quare auferendo à summa quadratorum ex A C.

ſit AB. productum ex AC in AB, ſeu quod idem eſt, quadratum ex AB & productum ex AB in BC, remanent quadrati ex AB. BC, vnà cum producto ex AB in BC. Eadem prorſus ratione oſtendemus auferendo à quadratis ex AC. BC. productum ex AC in BC. remanere quadratos ex AB BC. vnà cum producto ex AC. in BC. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE tria triangula rectangula, quorum areæ ſint æquales. Primùm oportet quærere duos numeros, vt productus eorũ multiplicatione cum ſumma quadratorum faciat quadratũ. Hoc autem ſuprà oſtẽſum eſt, & ſunt 3. & 5. quorum mutuo ductu productus cum ſumma quadratorum facit quadratum, cuius latus eſt 7. Compono ergo tria triangula rectangula à duobus numeris, alterum à 7. & 3. alterum à 7. & 5. & præterea alterum à 7. & à ſumma inuentorum numerorum 3. & 5. hoc eſt à 8. Erunt igitur triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. & ſunt triangula, quorum eadem eſt area 840.

ΕΤΡΕΙΝ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδὰ. πρότερον δεῖ ζητῆσαι δύο ἀριθμούς, ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ γ. ε ι. ὧν ὁ ὑπ' αὐτῶν, μετὰ τῶν ἀπ' αὐτῶν ποιεῖ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν ζ. συνταάσω τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ἀπό τε τοῦ ζ. καὶ τοῦ γ. καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τοῦ ι. καὶ ἔτι ἀπὸ τοῦ ζ. καὶ τῆς συνθέσεως τῶν διρημμένων ἀριθμῶν τουτέστι γ. καὶ τοῦ ι. γίνεται η. ἀπὸ ἄρα τοῦ ζ. καὶ τοῦ η. ἔσται οὖν τὰ τρίγωνα. μ. μβ. νη. καὶ κδ. ϖ. οδ. καὶ ρ. μβ. ρις. καὶ ἔσι τὰ τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδὰ ἀπὸ μ ωμ.

IN QVAESTIONEM VIII.

MAGNA hic verborum iactura facta erat in textu Diophanti, vt bene animaduertit Xilander, nos eam reſarcire conati ſumus, verba reponentes quæ virgulis incluſa vides. Itaque nil ſupereſt difficultatis, niſi vt demonſtretur trium triangulorum rectangulorum, modo quem tradit Diophantus inuentorum, æquales eſſe areas, quod præſtabimus more noſtro, ſi prius hoc veluti lemma præmiſerimus.

Si duobus quadratis addatur ſigillatim productus ex mutuo laterum ductu, erit compoſitorum eadem ratio, quæ & laterum ipſorum.

Sint quadrati AB. quorum latera CD. ex quorum mutuo ductu fiat G. Dico ſummam duorum AG. ad ſummam duorum GB ſe habere, vt C ad D. etenim vt conſtat ex vndecima octaui, AG B ſunt continuè proportionales in ratione C ad D. Quare cùm ſit A ad G. vt G ad B. erit & componendo ſumma duorum AG ad G. ſicut ſumma duorum GB. ad B. & permutando, erit ſumma duorum AG. ad ſummam duorum GB. ſicut G ad B. hoc eſt ſicut C ad D. Quod erat demonſtrandum.

A 9. G 12. B 16.
C 3. D 4.

Hoc poſito ſint numeri AB præcedenti quæſtioni ſatisfacientes, ſint videlicet eorum quadrati EF. & productus mutuo illorum ductu G. & ſumma ipſorum EFG. ſit quadratus H. cuius latus C. ſumma verò ipſorum AB. ſit D. cuius quadratus K. Tum vt vult Diophantus [1] formetur triangulum à numeris CA. ſit videlicet hypotenuſa L. ſumma quadratorum HE. & ſit baſis M. interuallum eorundem & ſit cathetus N. duplum producti ex C in A. Similiter formetur triangulum à numeris CB. ſitque hypotenuſa P. ſumma quadratorum HF. At ſit baſis Q. interuallum eorundem ac demum cathetus R ſit duplum producti ex C in B. Rurſus formetur triangulum à numeris CD. ſitque hypotenuſa S. ſumma quadratorum HK. ſit baſis T. interuallum eorundem. & ſit cathetus V duplum producti ex C. in D. Dico tria triangula LMN. PQR. STV. præſtare quod requiritur, hoc eſt areas eorum æquales eſſe, ſeu productos ex M in N. ex Q. in R. & ex T in V æquales eſſe, ſic enim ſequitur areas æquales eſſe [2], cùm ſint ſemiſſes huiuſmodi productorum. Itaque quoniam idem C ductus bis in ipſos AB D. producit ipſos NRV. [3] erit N ad R. vt A ad B. & rurſus R ad V. vt B ad D. Quoniam verò M eſt interuallum quadratorum HE. & H eſt ſumma ipſorum EFG. patet M æquari ipſis FG ſimul. Rurſus quia Q. eſt interuallum quadratorum HF. patet Q. æquari ipſis EG. Eſt autem ſumma duorum EG ad ſummam duorum GF. ſicut A ad B per Lemma aſſumptum. Igitur eſt Q ad M. ſicut A ad B. Cùm ergo oſtenſum ſit eſſe N ad R. vt A ad B. patet eſſe N ad R. vt Q ad M. Quare [4] planus ſub extremis NM. æquatur plano ſub mediis RQ. ac proinde triangulorum LMN. PQR. æquales ſunt areæ. Præterea cùm oſtenſum ſit Q. æquari duobus EG. quadrato

G 15.
H 49. E 9. F 25. K 64.
C 7. A 3. B 5. D 8.
L 58. M 40. N 42.
P 74. Q 24. R 70.
S 113. T 15. V 112.

[1] 5. 3. perism.

[2] defin. 3. 3. perism.

[3] 17. septimi.

[4] 19. septimi.

3. *secundi.* scilicet ipsius A. & producto ex A in B. [s] æquabitur idem Q. producto ex summa duorum A B, hoc
4. *secundi.* est ex D in A. Quoniam vero K est quadratus summæ ipsorum A B [t]. patet K æquari ipsis E F. & duplo G. Quare ex K auferendo H qui continet ipsos E F G semel, patet reliquum T æqualem esse ipsi G. ac proinde fieri ex A in B. Itaque cùm idem A ductus in B. & in D. producat T & Q, erit T ad Q. vt B ad D. Sed vt B ad D. sic ostensum est esse R ad V. Igitur vt R ad V. sic T vt
19. *septimi.* ad Q. Quare [u] rursus qui continentur sub extremis R Q æquantur contento sub mediis V T. vnde sequitur triangulorum P Q R. S T V æquales esse areas, ac per consequens tria exposita triangula eandem prorsus aream habere. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

NVm vero inueniri possunt 4. aut etiam plura in infinitum triangula æqualis areæ nihil videtur obstare quo minus quæstio sit possibilis. inquiratur itaque vlterius.

Nos hoc problema construximus imò & data qualibet trianguli areâ infinita triangula eiusdem areæ exhibemus v. g. data areâ 6. trianguli 3. 4. 5. en aliud triangulum eiusdem areæ $\frac{1}{10}\frac{60}{70}\frac{1201}{70}$. *aut si placet eadem denominatio* $\frac{25}{30}\frac{300}{30}\frac{1201}{30}$.

Perpetua & constans methodus hæc est. Exponatur quodlibet triangulum cuius hypothenusa Z. basis B. perpendiculum D. ab eo sic formatur aliud triangulum dissimile eiusdem areæ, nempe formetur abs Z. quadrato & B in D. bis, & planoplana lateribus similia applicentur Z in B. quadratum bis — Z in D. quadratum bis hoc nouum triangulũ habebit aream æqualem areæ præcedentis, ab hoc secundo eâdem methodo formetur tertium, à tertio quartum, a quarto quintum & fient triangula in infinitum dissimilia eiusdem areæ & ne dubites plura tribus dari posse inuentis tribus Diophanti 40. 42. 58. 24. 70. 74. & 15. 112. 113. quartum adiungimus dissimile eiusdem tamen areæ.

$\frac{1681}{1189}$ *hypothe.* $\frac{1519}{1189}$ *basis.* $\frac{780}{1189}$ *perpendic.*

Et omnibus in eundem denominatorem ductis fient 4 triangula in integris æqualis areæ quæ sequuntur.

Primum.	47560.	49938.	68962.
Secundum.	28536.	83230.	87986.
Tertium.	17835.	133168.	134357.
Quartum.	1681.	1412880.	1412881.

Eâdemque methodo inuenientur triangula eiusdem areæ in infinitum, & quæstio sequens vltra Diophantæos limites progredietur.

En etiam aliâ methodo triangulum cuius area facit sextuplum quadrati sicut 3. 4. 5.

Nempe 2896804. 7216803. 7776485.

QVÆSTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν τετράγωνος ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐπὶ τὸ λείπῃ ποιῇ τετράγωνον. ὑπὲρ ἐπὶ ζητοῦμεν τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον, ἐπὶ τὸ προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐπὶ τὸ λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. παντὸς γὰρ τριγώνου ὀρθογωνίου ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἐπὶ τὸ προσλάβῃ τετράκις τὸ ἐμβαδὸν ἐπὶ τὸ λείψῃ ποιεῖ τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ ἴσοι εἰσὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ὑποτεινούσῃ, ὁ δὲ ἐκ τῶν τριῶν συγκείμενος ἀριθμὸς ἴσος ἐστὶ τετραπλασίῳ ἐμβαδοῦ τριγώνου, ὧν εἰσὶν αἱ ὑποτείνουσαι. ἁπλῶς οὖν μοι ζητοῦσι τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα ἐμβαδά.

INVENIRE tres numeros, vt vniuscuiusque quadratus, summa trium siue addita, siue detracta, faciat quadratum. Quoniam volumus vt quadratus primi, summa trium siue addita, siue dempta, faciat quadratum. In omni autem triangulo rectangulo, quadratus hypotenusæ, siue adiecto quadruplo areæ, siue detracto, facit quadratũ. Erunt vtique tres numeri, hypotenusæ triangulorum, rectangulorũ at summa trium erit quadruplũ areæ triangulorum, quorum hypotenusæ sunt ipsi numeri. Eò itaque res redit, vt tria triangula inueniantur, quorum eadem sit area.

Id autem iam demonſtratum eſt, & ſunt triangula 40. 42. 58. & 24. 70. 74. & 15. 112. 113. Nunc ad propoſitum ab initio rediens, ſtatuo tres in numeris hypotenuſarum triangulorum, & erit primus 58 N. ſecundus 74 N. tertius 113 N. ſummam verò trium, pono in quadratis quadrupli areæ. Proinde 3360 Q. æquantur 245 N. & fit 1 N. $\frac{3360}{245}$. Ad poſitiones. Erit primus $\frac{3364}{245}$. ſecundus $\frac{5476}{245}$. tertius $\frac{12769}{245}$.

τοῦτο δὲ προδέδεικται, καὶ εἰσὶ τὰ τρίγωνα. μ̅. μβ̅. νη̅. καὶ κδ̅. ο̅. οδ̅ καὶ ρ̅ιβ̅. ρη̅. νῦν τάσσω ἐλθὼν ὅτι τὸ ἐξ ἀρχῆς τοὺς τρεῖς ἐν ἀριθμοῖς, τῷ ὑποτείνουσαν τῷ τετραγώνῳ, καὶ ἔσται ὁ πρῶτος ις̅ νη̅. ὁ δεύτερος ις̅ οδ̅. ὁ τρίτος ις̅ ρη̅. ἃ δὲ συγκείμενα ἐν τῷ τελῷ ἐν δυνάμει τῷ τετραπλασίονι τῷ ἰσοδυν̅. δυνάμεις ἄρα χτξ̅. ἴσαι ις̅ͫ̅ σμε̅. καὶ γίνεται ὁ ς̅ ζ̅. ς̅ͫ̅. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος υς̅ ς̅ͫ̅. ὁ δὲ δεύτερος φιη̅ ς̅ͫ̅. ὁ δὲ τρίτος ψξε̅. ς̅ͫ̅.

IN QVAESTIONEM IX.

EX dictis ad præcedentem facilis redditur hæc quæſtio. Quod aſſumitur de quadrato hypotenuſæ trianguli rectanguli, qui aſſumpto vel dempto quadruplo areæ, quadratum facit; iam à nobis demonſtratum eſt ad vigeſimam ſecundam tertij, vbi etiam vſurpatur à Diophanto.

OBSERVATIO D. P. F.

EX ſupradictis patet poſſe nos conſtruere generaliter problema. inuenire quotcumque numeros vt vnius cuiuſque quadratus ſumma omnium ſiue additâ ſiue detractâ quadratum faciat. Hanc quæſtionem forte Bachetus ignoranit. Diophantum quippè promoniſſet vt ſuprà 31. quaſtione lib. 4. & alijs in locis ſi quæſtionis huius ſolutionem detexiſſet.

QVÆSTIO X.

DATIS tribus numeris quadratis, poſſunt inueniri tres numeri, quorum bini quadratos iſtos producant alter in alterum ductus. Nam ſi ſint dati quadrati 4. 9. & 16. & ponamus vnum quæſitorum 1 N. erit reliquorum duorum alter $\frac{4}{9}$. alter $\frac{4}{16}$. Reſtat vt productus ex ſecundo in tertium faciat 26. atqui productus ex ſecundo in tertiũ eſt $\frac{16}{36}$. Hoc ergo æquatur 16. & fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. Ad poſitiones. Erit primus 1 $\frac{1}{2}$. ſecundus 2 $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. tertius 6. ſed vt hoc etiam methodo exponatur. Inueni $\frac{16}{36}$. æqualia 16. & omnia per 1 Q. multiplicando fiunt 16 Q. æquales 36. & fit 1 Q. $\frac{36}{16}$. cuius latus $\frac{6}{4}$. atqui 6. fit ex mutuo ductu laterum ipſorum 4. & 9. hoc eſt primi & ſecundi. Denominator verò 4. eſt latus alterius quadrati 16. Quamobrem cùm iuſſus fueris tres numeros inuenire, quorum bini mutuo ductu datos quadratos producant, vt 4. 9. 16. ſume productum ex

ΤΡΙΩΝ τετραγώνων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τὸν δοθέντας τετραγώνους ἀριθμούς. ἐστω γὰρ ὧσιν οἱ δοθέντες τετράγωνοι. ὅτι δ̅. καὶ ὁ θ̅. καὶ ὁ ις̅. καὶ τάξωμεν ἕνα τῶν ζητουμένων ς̅ α̅. ἔσονται τὸ λοιπὸν δύο, ὁ μὲν δ̅ τ̅ᵃ̅. ᾱ̅ᵃ̅. ὁ δὲ θ̅ τ̅ᵃ̅. ᾱ̅ᵃ̅. καὶ λοιπόν ἐστι τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου, ποιεῖν μ̅ᵃ̅ ις̅. ἀλλὰ ὁ ὑπὸ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ τρίτου ἴσοι λς̅ δ̅ᵘ̅. ᾱ̅ᵃ̅. ἴσος μ̅ᵃ̅ ις̅. καὶ γίνεται ὁ ς̅ μ̅ᵃ̅ α̅. α̅ ς̅ͫ̅. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν πρῶτος α̅. α̅ ς̅ͫ̅. ὁ δὲ δεύτερος β̅. α̅ ς̅ͫ̅. ᾱ̅ ς̅. ὁ τρίτος ς̅. ἵνα δὲ καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ. εὑρεῖν λς̅ δ̅ᵘ̅. ᾱ̅ᵃ̅. ἴσα μονάσι ις̅. καὶ πάντα ὅτι δυνάμεων μίαν γίνεται δυνάμεις ις̅. ἴσαι μ̅ᵃ̅ λς̅. καὶ γίνεται ἡ δύναμις λς̅ ᾱ̅ᵃ̅. ἧ πλευρὰ ὁ ς̅ ᾱ̅ᵃ̅. ἀλλὰ τὰ ς̅. τὰ ὑπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ δ̅ καὶ τοῦ θ̅. τουτέστι τῶν πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου τὸ δὶς ὑπὸ ἑαυτῶν τουτέστι τὰ δ̅. πλευρὰ ὄντι τοῦ ις̅ τετραγώνου. ὅταν οὖν σοι προέληθῇ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιεῖ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. οἷον τὸν δ̅. καὶ τὸν θ̅. καὶ τὸν ις̅. ποιεῖ τὸ ὑπὸ τὸν πλευρὸν τοῦ δ̅. καὶ τοῦ θ̅. γίνεται ς̅. μερίσῃ ταῦτα εἰς τὰ τῶν πλευρὰν τοῦ ις̅ τετραγώνου, γίνεται ὁ ς̅ ᾱ̅ᵃ̅. ὧν

πάλιν τὸν δ̄. τετράγωνον ὁμοῦ τὸν ε̄ ϛ̄. γίνονται μ̄ ιϛ̄ ϛ̄. καὶ πάλιν τὸν θ̄. τετράγωνον. ὁμοῦ τὸν ε̄ ϛ̄. γίνονται μ̄ ε̄. ἴσται ἄρα ὁ πρῶτος ε̄ ϛ̄. ὁ δεύτερος ιϛ̄ ϛ̄. ὁ τρίτος μ̄ ε̄.

lateribus ipsorum 4. & 9. fit 6. hunc diuide per latus alterius quadratus 16. fit 1 N. $\frac{3}{8}$. Rursus diuide quadratum 4. per $\frac{3}{8}$. fiunt $\frac{16}{3}$. & rursum diuide quadratum 9. per $\frac{3}{8}$. fiunt 6. erit igitur primus $\frac{3}{8}$. secundus $\frac{16}{3}$. tertius 6.

IN QVAESTIONEM X.

OPERATIO Diophanti facilis est, & Canon quem tradit ab ea depromitur.
Posset tamen breuius & facilius explicari Canon iste, hoc pacto.

Numeros quos producunt dati numeri, dum inter se bini & bini multiplicantur, diuide per reliquum, quotientium latera quæsitos exhibent numeros.

Vt in exemplo Diophanti productum ex 4. in 9. putà 36. Diuide per reliquum 16. fiet $\frac{9}{4}$. cuius latus $1\frac{1}{2}$ est vnus quæsitorum. Rursus productum ex 4. in 9. putà 64. diuide per reliquum 9. fit $\frac{64}{9}$. cuius latus $2\frac{2}{3}$. est secundus quæsitorum. Denique productum ex 9. in 16. putà 144. diuide per reliquum 4. fit 36. cuius latus, est tertius quæsitorum.

Portò vniuersalius etiam proponi potest ipsa quæstio in hunc modum.

Datis tribus numeris, inuenire tres numeros, quorum bini inuicem ducti, datos producant numeros. Oportet autem solidum sub datis numeris contentum esse quadratum.

Sint dati 6. 8. 12. Ponatur primus 1 N. secundus $\frac{6}{12}$. tertius $\frac{8}{12}$. Restat vt ex secundo in tertium fiat 12. fit autem $\frac{48}{144}$ hoc ergo æquatur 12. & fit 1 N. 2. sunt igitur quæsiti numeri 2. 3. 4.

QVÆSTIO XI.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν, ἐὰν τε προσλάβῃ τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τριῶν, ἐάντε λείψῃ ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦμεν πρότερον τρία τρίγωνα ἴσα ἔχοντα τὰ ἐμβαδὰ ᾧ δύρισται λαμβάνομεν τοὺς ὑπὸ τῶν ὑποτεινουσῶν τετραγώνους. ἔστι δὲ ὁ μὲν γτξδ̄. ὁ δὲ εὐς ϛ̄. ὁ δὲ ᾱ. βϕξϛ̄. καὶ ἔχοντες τούτους, δύρίσκομεν ὡς προγέγραπται ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ποιῇ τοὺς δοθέντας τετραγώνους. ἔστω δὲ τοὺς κειμένους. τούτοις δὲ ἐξετάζομεν, διὰ τὸ ἑκάστου τῶν τετραγώνων ἐάντε προσλάβῃ μονάδας γτξ̄. ἐάντε λείψῃ ποιεῖν τετράγωνον. ἀλλ' αἱ γτξ̄. μονάδες ὁ τετράκις ὄζει τῷ ἐμβαδῷ τοῦ ἐκάστου τῶν τριγώνου. καὶ διὰ τοῦτο δίπλου τάσσω ἐν ϛ̄ϛ̄. ὧν μὲν ἀριθμῶν δσϛβ ϡϛ̄. ὧν δὲ κ̄ δ̄. γφλη. ὧν δὲ ζ̄. αρπζ̄. καὶ ὁ ὑπὸ δύο αὐτῶν ποιεῖ τοὺς ἑτέρου τετραγώνους. λοιπὸν δεῖ τοὺς γ̄. ἰσῶσαι δυνάμεσι γτξ̄. καὶ πάντα ἐπὶ τὸ μέρισον γένηται βάλλοντι ᾱ. ηϕξ̄. ᾧ ὁ ς̄ ϛ̄. ηρῑ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. ὁ τρίτος ϛ̄ ϛβ̄. ιυλᾱ. μορίου τοῦ αὐτοῦ. καὶ γίνονται οἱ τρεῖς ς̄ αρϛᾱ. ϙσιᾱ. μορίου ᾱ. ηϕξ̄. ἴσους δυνάμεσι γτξ̄. καὶ πάντα εἰς ᾱ. ηϕξ̄. ϙσιᾱ. ἴσους δ̄ α̅. ηϕμζ̄. δσυξ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ αρϛᾱ. ητιδ̄. μορίου β μοναδὸς α̅. καὶ α̅. ηϕμζ̄. μ̄ δϕξ̄. μορίου κοινοῦ ληφθέντος πάντος, ὅπερ ὅτι ἀδύνατον. φαίνεται γὰρ ἥμισυ ἄλλῃ οὐδενὶ ἴσον ὄν. ἔστω ὁ ς̄ μ̄ αρϛᾱ. ητιδ̄. μορίου α̅. ηϕμζ̄. μ. φξῑ. ὅπου τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ὁ μὲν πρῶτος.*

IN VENIRE tres numeros, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, omnium summa siue detracta quadratum faciat. Rursum primò quærantur tria triangula æquales areas habentia. Quibus inuentis sumemus quadratos hypotenusarum. Est autem primus 3364. secundus 5476. tertius 12769. Hos nacti, inueniemus, vt iam traditum est, tres numeros, vt producti ex binorum mutuo ductu faciant datos quadratos, qui sint ij quos expositimus autem istos, quia quiuis ipsorum siue addas ei, siue adimas 3360. facit quadratum. At 3360. est quadruplum areæ singulorum triangulorum. Ea propter nunc in numeris pono primum $\frac{4225}{117}$ N. secundum $\frac{4332}{117}$ N. tertium $\frac{4693}{117}$ N. quorum bini inuicem ducti faciunt supradictos quadratos. Restat vt hi tres æquentur 3360 Q. & omnia vt vnius fiant denominationis, reducantur ad 121249. erit primus $\frac{493807425}{14178633}$ N. secundus $\frac{506236668}{14178633}$ N. tertius $\frac{569025207}{14178633}$ N. & fit trium summa $\frac{1569069300}{14178633}$ N. æqualis 3360 Q. & omnia in 121249. fiunt 32824806. N. æquales 407396640 Q. & fit 1 N. $\frac{407396640}{32824806}$. Ad posines, erit primus.

IN QVAESTIONEM XI.

HÆc quæstio, vt bene monet Xilander, à duobus præcedentibus pendet omnino, & operatio Diophanti plana est, sed tota minutiarum tractatio in textu Græco scatet mendis. Quamobrem malui in mea versione rem subiicere per veros numeros modo nobis consueto, quàm in verbis & in numeris Diophantæis omni ex parte restituendis diutius animum torquere.

Porro quod deest in Diophanto (ipsa nimirum quæstionis solutio) sic à nobis supplebitur fit 1 N. $\frac{1382400}{4097600}$. seu in minimis $\frac{241}{709}$. Ad positiones erit primus $\frac{833291639}{1740011776}$. secundus $\frac{1367631103}{2851097600}$ tertius denique $\frac{2281116025}{5538977040}$. Vt autem proposito satisfaciant huiusmodi numeri, tu si vacat experire, nos ad ea quæ maioris sunt momenti interim progrediemur.

QVAESTIO XII.

VNITATEM diuidere in duas partes, & vtrique segmento datum numerum adjicere, & facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem esse, * neque duplum eius N. vnitas maiorem habere quadrantem quàm est numerus, quo ipsum metitur primus numerus. * Imperatum sit vt vtrique portioni adiungamus 6. itáque efficiamus quadratum. Quia ergo volumus vnitatem secare, & vtrique segmento addere 6. & facere quadratum: summa duorum qui sic fient quadratorum erit 13. Opportet igirur diuidere 13. in duos quadratos, vt vterque ipsorum maior sit senario. Ergo si 13. diuidam in duos quadratos, quorum interuallum vnitate sit minus, soluo quæstionem. Sumo semissem de 13. qui est $6\frac{1}{2}$. & quæro quam partem possim ad $6\frac{1}{2}$. adiungere, ita vt quadratum conficiam. Multiplico per 4. & quæro postmodum partem quadratam, quæ si ad 26. adijciatur faciat quadratum. fit pars apponenda $\frac{1}{4\text{c}}$. fiunt 26. + $\frac{1}{4\text{c}}$. æqualia quadrato, & si omnia per 1 Q. multiplicentur, fiunt 26 Q. + 1. æqualia quadrato, esto latus eius 5 N. + 1. & fit 1 N. 10. Quadratus ergo 100. Pars quadratica $\frac{1}{100}$. Proinde pars addenda ad 26. est $\frac{1}{100}$. Quare pars addenda ad $6\frac{1}{2}$. est $\frac{1}{400}$. & facit quadratum à latere $\frac{21}{20}$. Oportet igitur ita diuidere 13. in duos quadratos, vt vtriusq; latus proximè accedat ad $\frac{21}{20}$. Et quæro quo numero ternarius multatus, & quo binarius auctus faciat supradictum numerum $\frac{21}{20}$. Statuo itáque duos quadratos, alterum à latere 11 N. + 2. alterum à latere 3 — 9 N. & fit summa quadratorum ab his ortorum. 202 Q. +

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῷ τμημάτων τ̀ δοθέν· ἀεὶ δὲ δεῖ τὸν διδόμενον μήτε ἄρτιον εἶναι, * μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ᾖ μ̄ ᾱ. μείζονα ἔχῃ μέρος ἢ δ̄. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ᾱ. ς̄. * διῃρήσθω δὴ ἑκατέρῳ τ̀ τμημάτων προσθεῖναι μ̄ ς̄. καὶ πλευρὰν τετράγωνον. ἐπεὶ οὖν βούλομαι τὸν μονάδα τμεῖν, καὶ ἑκατέρῳ τῷ τμημάτων προσθεῖναι μονάδας ς̄ καὶ πλευρὰν τετράγωνον. τὸ ἄρα συγκείμενον τ̀ τετραγώνων ἴσα μ̄ ιβ̄. δίνοφ ἄρα τὸν ιγ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μείζων ᾖ μ̄ ς̄. ἐπὶ οὖν τὸν ιγ̄. διήλων εἰς δύο τετραγώνους, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἐλάσσων ὄσης μονάδος ᾱ. λύω τὸ ζητούμενον. λαμβάνω τὸν ιγ̄. τὸ ἥμισυ, γίνεται ς̄. ᾱ ς̄. καὶ ζητῶ τὸ μόριον προσθεῖναι μονάδι ς̄. ᾱ ς̄. καὶ πλευρὰν τετράγωνον, καὶ παντὶ τετραγώνῳ. ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς κ̄ε̄. μονάδι καὶ πλευρὰν τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόριον α̈ ᵈ⁽ᵛ⁾ ᵐ⁽ᵛ⁾. καὶ γίνεται μ̄ᵛ κ̄ε̄. α̈ ᵈ⁽ᵛ⁾ ᵐ⁽ᵛ⁾. ἵσα τετραγώνῳ, καὶ παντὶ δὶς δύναμις. γίνεται δ̄ᵛ κ̄ε̄. μ̄ᵛ ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῆ ἀπὸ πλευρᾶς ζ̄ ῑ. μ̄ᵛ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ς̄ᵛ μ̄ᵛ ι. δύναμις χδ̄ μ̄ᵛ ρ̄. τὸ δ' ὡσαμεσὸν μ̄ᵛ ᾱ ᵛ⁽ᵛ⁾. ἴσται ἄρα τὸ ταῖς κ̄ε̄. προστιθέμενον ᾱ. ᵛ⁽ᵛ⁾. τὸ ἄρα ταῖς μονάσιν ς̄. ᾱ ς̄. γίνεται ᾱ ᵛ⁽ᵛ⁾. καὶ ποιεῖ τετράγωνον τὸν ἀπὸ πλευρᾶς νᾱ ᵛ⁽ᵛ⁾ δεῖ οὖν τὸν ῑ Γ. διαιρεθέντα εἰς δύο τετραγώνους κατασκευάζειν ἧ ἑκάτου πλευρὰ ὡς ἴσιστα νᾱ ᵛ⁽ᵛ⁾. καὶ ζητῶ τὴν ἀπὸ λείψασα προσλαβοῦσα δυὰς ποιεῖ τὸν αὐτ̄, τουτέστι νᾱ ᵛ⁽ᵛ⁾. τάσσω οὖν δύο τετραγώνους ἵνα ὧν ἀπὸ ζ̄ ιᾱ. μ̄ᵛ βᾱ. τὸν δὲ ἕτερον ἀπὸ μ̄ᵛ γ̄. λείψει ζ̄ θ̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τ̀ ἀπ' αὐτ̀ τετραγώνων. δυνάμεις σβ̄. μ̄ᵛ ιγ̄. λείψει ζ̄ ῑ. ἴσους μ̄ᵛ ιγ̄. καὶ γίνεται

ὁ ς᾽ ϊ̄ μ̄. ἴσαι ἄρα ἑνὸς τ̄ τετραγώνων ἡ πλευρὰ συζ̄ μ̄. ἀπὸ τοῦ ἑτέρου συπ̄ μ̄. καὶ ἀπὸ ἑκατέρου τ̄ ἀπ᾽ αὐτ̄ τετραγώνων, ἄρτιμοι ς̄. ἴσαι τὸ μὲν ἓν τμῆμα τῆς μονάδος ἐστὶν ᾱ. ϡᾱ. τὸ δὲ ἕτερον, δωμ̄ ϡ̄. ϡᾱ. καὶ ὅλον ὡς ἀπὸ τετρ̄ μ̄ μονάδων ϛ̄. ποιεῖ τετράγωνον.

13 — 10 N. æqualis 13. & fit 1 N. $\frac{1}{10}$. Erit igitur alterius quadrati latus $\frac{21}{10}$. alterius vero $\frac{11}{10}$ & si ab vtroque quadratorum inde factorum auferamus 6; erit alterum segmentum vnitatis $\frac{1}{100}$. alterum $\frac{121}{100}$. & liquet horum vtrumque adscito 6. facere quadratum.

IN QVAESTIONEM XII.

PVLCHERRIMVM problema, sed miserrimè affectum, ita vt medicantis manum vix admittat, & cùm in eo enodando multùm desudauerit Xilander, id tamen quod potissimum est prætermisit, accuratam scilicet appositæ conditionis explicationem. Quàm enim sit necessaria conditionis huius cognitio, manifestum est ex eo quod in hypothesi Diophanti tota vis æquationis consistit in diuidendo numero 13. in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor quàm 7. Nullibi autem traditus est modus diuidendi numerum aliquem in duos quadratos, nisi numerus ille sit quadratus, vel suaptè natura ex duobus quadratis compositus. Itaque cùm euidens sit, ponendo latera quadratorum 11. N. + 2. & 3. — 9 N. æquationem succedere non posse nisi quadrati ipsorum 2. & 3. simul efficiant 13. Necesse est vtique 13. componi ex duobus quadratis. Atqui 13. est duplum dati numeri 6. vnitate auctum. Certum ergo est conditionem à Diophanto allatam requirere debere, vt duplum dati numeri vnitate auctum, sit quadratus numerus, vel compositus ex duobus quadratis. Quod etiam validè confirmatur verbis illis. *Oportet autem datum neque imparem esse.* Nam si datus numerus sit impar, nullo modo duplum eius vnitate auctum potest esse quadratus, vel compositus ex duobus quadratis, vt facilè est demonstrare. Sit enim numerus impar A B. cuius duplum esto A C. cui addita vnitate C D. fiat A D. dico primo A D. non esse quadratum. Si enim ponatur quadratus; cùm numero pari A C. addita vnitate C D, fiat A D est A D impar. Ergo à quadrato impari A D, detracta vnitate C D' reliquus A C est pariter par. ' Quamobrem illius dimidium A B est numerus par, contrà hypothesim. Rursus dico numerum A D non componi ex duobus quadratis. Etenim cùm A D ostensus sit, impar, necesse est è duobus quadratis ex quibus componi dicitur, alterum parum esse, alterum imparem. ' At omnis quadratus par, est pariter par. Et ab omni quadrato impari auferendo vnitatem relinquitur pariter par. Igitur à toto A D ablata vnitate, reliquus A C componetur ex duobus pariter partibus, ' ac proinde A C. pariter par est. ' Quamobrem illius dimidium A B, par, est contrà hypothesim.

A . . . B . . . C D

11. 1. *poris.* 8. 1. *poris.* 20. & 21. 1. *porism.* 16. 1. *poris.* 8. 1. *porism.*

Reliqua verò verba. *Neque duplum eius*, &c. adeo vitiata sunt, vt nullam commodè recipere possint explicationem. Non dubito quidem Diophantum respexisse ad aliquam numerorum non vulgarem proprietatem, qua definitur quis numerus par deligendus sit, vt duplum eius vnitate auctum sit quadratus numerus, vel compositus ex duobus quadratis. Sed quid sibi velit in tanta verborum caligine diuinare non possunt. Id oneris relinquam illi qui in codicem aliquem emendatiorem inciderit. Sufficiat nobis appositissimam attulisse conditionem, cum qua necesse est conditionem Diophanti coincidere si rectè præscribatur. Sanè quod ait Xilander verba illa corrupta, videri velle, debere eum qui datur esse duplum numeri primi, id vtique futile est, & nulli fundamento nixum, quodque ipsa statim experientia refelli potest, nam si datus sit 10. is est duplus numeri primi 5. & tamen quæstioni soluendæ minimè reperitur idoneus, nam oporteret diuidere in duos quadratos numerum 21. Quod quidem impossibile est, vt reor, cùm is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis.

OBSERVATIO D. P. F.

NVmerus 21. non potest diuidi in duos quadratos in fractis. Hoc autem facillime demonstrare possumus, & generalius omnis numerus cuius triens non habet trientem non potest diuidi in duos quadratos neque in integris neque in fractis.

Aliquando mihi venit in mentem Diophantum voluisse duplum dati numeri paris vnitate auctum esse numerum primum, quandoquidem omnes fere huiusmodi numeri componuntur ex duobus quadratis, quales sunt 5. 13. 17. 29. 41. aliique primi numeri qui sublata vnitate relinquunt numerum pariter parem. Veruntamen neque hæc explicatio sustineri potest. Nam primum hac ratione per huiusmodi conditionem excluderentur omnes numeri, quorum duplum vnitate auctum est quadratus numerus, quos tamen aptissimos esse soluendæ quæstioni patet, quia quilibet quadratus diuidi potest in duos quadratos per octauam secundi; sed & infrà

exemplo

exemplo id comprobabimus. Deinde excluderentur etiam multi numeri, quorum duplum vnitate auctum componitur ex duobus quadratis, quales sunt 22. 58. 62. & alij innumerabiles. Nam dupli horum vnitate aucti sunt 45. 117. 125. quorum nullus est primus numerus, cùm quilibet multos habeat metientes; vnusquisque tamen è duobus quadratis conflatur, primus scilicet ex quadratis 36. & 9. secundus ex quadratis 81. & 36. tertius ex quadratis 100. & 25. Itaque satius erit conditionem à nobis allatam amplecti, donec aliquis ex emendatiore codice restituat Diophantum. Solum hoc moneo in codice Vaticano, hæc verba sic haberi. μήτε ὁ διπλασίων αὐτῆ ἀριθμὸν μονάδι ᾱ. μείζονα ἔχῃ μιᾶς τέταρτον, ἢ μετρεῖται ὑπὸ τῆ πρώτυ ἀριθμῆ.

OBSERVATIO D. P. F.

VEra limitatio hæc est, generalis nempe & omnes numeros inutiles excludens. Oportet datum numerum non esse imparem, neque duplum eius vnitate auctum per maximum quadratum ex quo mensuratur diuisum diuidi à quouis numero primo vnitate minori quâ multiplex quaternarij.

Porro quoniam operatio Diophanti subtilis est, & non vulgaris artificij, placet eam explicare, quoad potero breuiter & dilucidè. Primum itaque cùm 13. diuidendus sit in duos quadratos, quorum vterque maior sit senario, rectè quæritur pars quadrati quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita faciat quadratum, sic enim diuidendo postmodum 13. in duos quadratos, quorum quilibet proximè accedat ad inuentum quadratum, satisfactum erit proposito, nam quilibet illorum non multùm distabit à $6\frac{1}{2}$. Reducit autem omnia ad integros more suo Diophantus, multiplicando $6\frac{1}{2}$ per 4. vnde fit 26. Nam inuenta parte quadratica quæ ad 26. addita quadratum faciat, illius vtique quarta pars addita ad $6\frac{1}{2}$. faciet quadratum. Ponitur ergo pars huiusmodi $\frac{1}{Q.}$. quia scilicet pars quadratica sit diuidendo vnitatem per aliquem quadratum; vnde sequitur $26 + \frac{1}{Q.}$ æquari quadrato; vt autem rursus ad integros fiat reductio, ducuntur omnia in 1 Q. & fit $26\,Q. + 1$. æquandus quadrato; cuius latus ita fingendum est vt valor Numeri sit maior vnitate, si enim sit vnitate minor, patet $\frac{1}{Q.}$. fore plerũque maiorem vnitate, ac proinde non fore propriè partem quadraticam, vnde sequitur inuentum quadratum, tota vnitate, vel etiam maiore internallo superaturum numerũ $6\frac{1}{2}$. Verbi gratia si fingatur latus supradicti quadrati $1\,N. + 1$. erit quadratus $1\,Q. + 2\,N. + 1$. æqualis ab $Q. + 1$. & fiet $1\,N. \frac{2}{1}$. Quare $\frac{1}{Q.}$ erit $\frac{4}{4}$ cuius quadrans $\frac{4}{16}$ additus ad $6\frac{1}{2}$ quadratum facit $\frac{169}{16}$. qui excedit ipsum $6\frac{1}{2}$ plus quàm 39. vnitatibus, ac proinde quæstioni soluendæ prorsus est inutilis. Igitur vt arte certa, non fortuitò fingatur huiusmodi latus, ita vt valor Numeri superet vnitatem, cùm fingi possit huiusmodi latus vel $1 +$ tot numeris, quorum quadratus sit minor quàm 26. vel $1 -$ tot numeris. quorum quadratus sit maior quàm 26. Primo modo fiet valor Numeri, auferendo quendam quadratum à 26. & per residuum diuidendo duplũ lateris eiusdem quadrati. Vt ergo quotiens sit maior vnitate reperiẽdus est quadratus quo detracto à 26. relinquatur numerus minor duplo lateris eiusdem quadrati, ponatur is $1\,Q.$ ergo $2\,N.$ maior est quàm $26 - 1\,Q.$ & tandem $1\,Q. + 2\,N.$ maior est quàm 26. Qua æquatione resoluta, fit $1\,N.$ non minor quàm $4\frac{1}{2}$. Fingetur ergo latus quadrati $1 +$ tot numeris qui excedant $4\frac{1}{2}$ dum eorum quadratus sit minor quàm 26. sic Diophantus posuit hoc latus $1 + 5\,N.$ & poni posset $1 + 4\frac{1}{2}\,N.$ vel $1 + 4\frac{1}{3}\,N.$ & sic aliis infinitis modis. Secundo verò modo fingendo latus quadrati, fiet valor Numeri, à quodam quadrato auferendo 26. & per residuum diuidendo duplum lateris. Quare vt fiat valor Numeri maior vnitate, posito illo quadrato $1\,Q.$ erit $2\,N.$ maior quàm $1\,Q. - 26.$ & tandem $1\,Q.$ maior erit quàm $2\,N. + 26$. Qua æquatione resoluta fit $1\,N.$ minor quàm $6\frac{1}{2}$. fingetur ergo latus $1 -$ aliquot Numeris infrà $6\frac{1}{2}$ dum eorum quadratus excedat 26. Verbi gratia fingatur $1 - 6\,N.$ fiet $1\,N.\frac{1}{2}$ & pars quadratica ad $6\frac{1}{2}$ adiicienda erit $\frac{1}{12}$. fietque quadratus $\frac{145}{144}$. à latere $\frac{17}{12}$. Vnde collige partem quadraticam hîc non sumi strictè pro fractione quadrata cuius numerator sit 1. Sed tantum pro fractione quadrata quæ minor sit vnitate, ideſt cuius numerator sit minor denominatore.

Inuenta porro parte quadratica $\frac{1}{144}$. quæ ad $6\frac{1}{2}$ addita facit quadratum $\frac{169}{144}$ cuius latus $\frac{13}{12}$ rectè infert Diophantus numerum 13. ita diuidendum esse in duos quadratos, vt latus vtriusque proximè accedat ad $\frac{13}{12}$. sic enim vterque quadratus proximè accedet ad $6\frac{1}{2}$. Vt autem 13. diuidatur in duos quadratos per operationem decimæ secundi, debent sumi 2. & 3. latera quadratorum, ex quibus 13. suaptè natura componitur, & alteri addi oportet certum numerum Numerorum, ab altero detrahi. Vt ergo vtriusque quadrati latus adæquetur numero $\frac{13}{12}$ necesse est ad 2. addi $\frac{1}{12}$. & à 3. auferri $\frac{1}{12}$. Quare si $1\,N.$ supponatur esse $\frac{1}{12}$. erit vtique $11.\,N. + 2.$ æqualis $\frac{13}{12}$. Itemque $3 - 9\,N.$ sic autem quadrati horum laterum æquari deberent $13\frac{1}{144}$. Quare si æquentur ipsi 13. fiet vtique $1\,N.$ paulò minor quàm $\frac{1}{12}$. ac proinde $11\,N.$ & $9\,N.$ paulò minus erunt quàm $\frac{11}{12}$ & $\frac{9}{12}$. vnde sequetur vtrumque latus non multùm distare posse à $\frac{13}{12}$. ac per consequens vtrumque quadratum fore proximum numero $6\frac{1}{2}$ atque adeo proposito ritè satisfacturum. Hinc satis colligitur, quod suprà diximus, in conditionis

explicatione nimirum, fuisse necessarium numerum 13. componi ex duobus quadratis. Qua de causa res etiam optimè succedet, si datus numerus talis sit, vt eius duplum vnitate auctum sit quadratus numerus, quandoquidem omnis quadratus in duos quadratos potest diuidi per octauam secundi.

Hoc autem vt manifestius fiat, & simul artificium Diophanti magis illustretur; talis quæstio proponatur. *Vnitatem secare in duas partes, vt vtrique addendo 4. fiat quadratus.* Patet numerum 9. diuidendum esse in duos quadratos, quorum interuallum sit vnitate minus, hoc est tales vt vterque superet 4. Quare sumendo semissem ipsius 9. puta 4 ½. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, & ducendo in 4. fit 18. Positâque parte quadrati $\frac{1}{Q}$. fit $18 + \frac{1}{Q}$. æquandus quadrato, & omnia ducendo in Q. fit $18\,Q + 1$. æquandus quadrato, esto latus 4 N. + 1. fiet 1 N. 4. Igitur $\frac{1}{Q}$. est $\frac{1}{16}$. cuius quadrans puta $\frac{1}{64}$. additus ad 4 ½ facit quadratum $\frac{289}{64}$. cuius latus $\frac{17}{8}$. Quare 9. ita diuidendus est in duos quadratos, vt vtriusque latus adæquetur ipsi $\frac{17}{8}$. Diuiditur autem 9. in duos quadratos per octauam secundi, putà in $\frac{81}{17}$. & $\frac{72}{17}$ quorum latera $\frac{9}{17}$ & $\frac{12}{17}$. Video ergo quid addendum sit ad $\frac{9}{17}$. & quid detrahendum à $\frac{12}{17}$. vt fiant $\frac{17}{8}$. & inuenio hinc $\frac{145}{136}$ inde $\frac{119}{136}$. Quare fingo quadratorum latera $\frac{9}{17} + 13$ N. & $\frac{12}{17} - 11$ N. fitque summa quadratorum $290\,Q. + 9 - 6$ N. æqualis 9. vnde fit 1 N. $\frac{1}{145}$. suntque latera quadratorum $\frac{161}{145}$. $\frac{49}{145}$. ipsi quadrati $\frac{25921}{21025}$ & $\frac{2401}{21025}$ vnde si auferas sigillatim 4. supersunt quæsitæ partes vnitatis $\frac{4096}{21025}$ & $\frac{17424}{21025}$.

Possem etiam in huiusmodi quæstione artificium imitari decimæ tertiæ sequentis, hoc pacto. Ponatur alter quadratorum 1 Q. erit alter $9 - 1$ Q. qui æquari debet quadrato, ita tamen vt 1 Q. inueniatur maior quàm 4. minor quàm 5. Sumantur ergo duo quadrati inter 4. & 5. quales sunt $\frac{441}{100}$ & $\frac{361}{100}$. quorum latera $\frac{21}{10}$ & $\frac{19}{10}$. Quare curandum vt valor numeri cadat inter $\frac{21}{10}$ & $\frac{19}{10}$. fit autem valor Numeri, diuidendo sextuplum alicuius numeri per quadratum ipsius vnitate auctum. Oportet igitur $\frac{6\,N}{Q+1}$ maiorem esse quàm $\frac{21}{10}$ minorem quàm $\frac{19}{10}$. & tandem 60 N. maiores sunt quàm 21 Q. + 21. minores quàm 22 Q. + 22. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm $\frac{3}{4}$. minor quàm $\frac{11}{14}$. ponatur ergo 2 ½. & quadrati $9 - 1$ Q. latus statuatur $3 - 2$ ½ N. fiet 1 N. $\frac{7}{10}$. & erunt quadratorum latera $-\frac{1}{10}$. & $\frac{13}{10}$. ipsi quadrati $\frac{169}{100}$ & $\frac{1}{100}$ à quibus auferendo sigillatim 4. remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{69}{100}$ & $\frac{369}{100}$. vt suprà.

Animaduersione quoque dignum est, eodem prorsus artificio Numerum quemlibet ita diuidi posse in duas partes, vt vtrique adiiciendo eundem datum numerum, fiat quadratus, dummodo duplum additicij numeri ad.umens numerum diuidendum, faciat quadratum, vel numerum è duobus quadratis compositum. Verbi gratia. Sit diuidendus 2. in duas partes, vt vtrique adiiciendo 4. fiat quadratus. Patet numerum 10. diuidendum esse in duos quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 4. sumo ergo semissem de 10. puta 5. & quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum, ponatur $\frac{1}{Q}$ ergo $5 + \frac{1}{Q}$ æquatur quadrato, & omnia per 1 Q. multiplicando, fit $5\,Q. + 1$. æquandus quadrato. Esto latus illius $1 + 2$ N. fit 1 N. 4. est ergo pars quadrati $\frac{1}{4}$ qua addita ad 5. fit quadratus $\frac{21}{4}$ cuius latus $\frac{5}{2}$. Diuidendus ergo est 10. in duos quadratos, quorum latera proximè accedunt ad $\frac{5}{2}$. Diuiditur autem 10. suaptè natura in quadratos, quorum latera sunt 1. & 3. Quare imitando artificium Diophanti fingemus latera quæsitorum quadratorum $1 + 5$ N. & $3 - 3$ N. fiet summa quadratorum $10 + 34\,Q. - 8$ N. æqualis 10. & fiet 1 N. $\frac{4}{17}$. Sunt igitur quadratorum latera $\frac{21}{17}$. & $\frac{43}{17}$. ipsi quadrati $\frac{441}{289}$. & $\frac{1849}{289}$. à quibus si auferas 4. sigillatim, restant quæsitæ binarij partes $\frac{713}{289}$ & $\frac{137}{289}$.

Denique, non dissimulandum eadem arte solui quæstionem quam tradidit Vieta Zetetico 5. lib. quarti nimirum.

Datum numerum ex duobus quadratis compositum, rursus diuidere in duos quadratos, quorum alter consistat intra limites præstitutos.

Sit diuidendus 5. in duos quadratos, quorum alter sit maior quàm 1. minor quàm 2. sumo medium in arithmetica medietate inter 1. & 2. puta 1 ½. & quæro quæ pars quadrati illi addita, quadratum faciat, inuenietur modo suprà tradito $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{49}{16}$. cuius latus $\frac{7}{4}$. Ita ergo fingendum erit latus præfiniti quadrati vt accedat ad $\frac{7}{4}$. Quoniam verò volumus ita diuidere 5. in duos quadratos, vt alter proximà accedat ad 1 ½. & detracto 1 ½. ab ipso 5. supereſt 3 ½. euidens est alterum quadratum accedere debere ad 3 ½. Rursus ergo quæro quæ pars quadrati ad 3 ½. addita, faciat quadratum, ea inuenietur modo tradito $\frac{1}{36}$. fitque quadratus $\frac{121}{36}$. à latere $\frac{11}{6}$. Itaque diuidendus est 5. in duos quadratos ita vt huius latus adæquetur $\frac{7}{4}$. seu $\frac{14}{8}$. alterius verò $\frac{11}{6}$. Sunt autem latera quadratorum ex quibus 5. suapte natura componitur 1. & 2. Quare cùm vnitati desint $\frac{1}{8}$. quominus æquet $\frac{1}{8}$. & binarius supereſt $\frac{1}{36}$. interuallo $\frac{1}{288}$. fingo quadratorum latera $1 + 7$ N. & $2 - 6$ N. estque quadratorum summa $5 + 85\,Q. - 10$ N. æqualis 5. & fit 1 N. $\frac{1}{17}$. suntque latera quadratorum $\frac{120}{17}$. & $\frac{71}{17}$. ipsi quadrati $\frac{14400}{289}$. & $\frac{5041}{289}$. quorum summa 5. & alter puta $\frac{14400}{289}$. maior est vnitate, minor binario vt postulabatur.

Rursus diuidendus esto 20. in duos quadratos quorum alter maior sit quàm 6. minor quàm 10. sumo medium arithmeticè inter 6. & 10. puta 8. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{289}{16}$. à latere $\frac{17}{4}$. Quia verò detrahendo 8. ab ipso 20. supereſt 12. Quæro rursus partem quadrati quæ ad 12. addita, faciat quadratum, ea est $\frac{1}{9}$. fitque quadratus $\frac{25}{9}$ cuius latus $\frac{5}{3}$. Itaque diuidendus est 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{17}{4}$. alterius verò latus adæquetur $\frac{5}{3}$. seu $\frac{15}{9}$. Componitur autem 20. ex duobus quadratis suaptè natura, quorum latera

2. & 4. Quare cùm ipſi 2. deſint $\frac{2}{7}$. quominus æquet $\frac{16}{7}$ & ipſe 4. ſuperet $\frac{12}{7}$. interuallo $\frac{4}{7}$. fingo quadratorum latera 2. + 9. N. & 4 − 7 N. eſtque ſumma quadratorum 20 + 130 Q. − 20 N. æqualis 20. & fit 1 N. $\frac{1}{13}$. ſunt igitur quadratorum latera $\frac{27}{13}$. & $\frac{12}{13}$. ipſi quadrati $\frac{729}{169}$. & $\frac{144}{169}$. quorum ſumma 20. & alter, puta $\frac{729}{169}$. maior eſt quàm $\frac{676}{169}$ ſeu quàm 6. & minor quàm $\frac{144}{169}$. ſeu quàm 10. vt poſtulabatur. Soluit hoc problema Franciſcus Vieta loco citato, alia methodo, ſibique peculiari: ſed cùm ea, non ſit iſta melior, immò ſit longè difficilior, non eſt cur eam explicandi laborem aſſumamus.

QVÆSTIO XIII.

D A G B E

1 1 1

Δ α γ β ε

1 1 1 1

VNITATEM ſecare, & adiicere vtrique ſegmento alium atque aliũ datum numerum, itaque quadratum conficere. Imperatum ſit vt vnitas ſecetur, & adiiciatur alteri ſegmento 2. alteri 6. vt fiat vtrimque quadratus. Exponatur vnitas A B. & ſecetur in G. & ipſi A G. adjiciatur binarius A D. At ipſi G B. addatur ſenarius B E. vterque igitur ipſorum G D. G E. eſt quadratus. Et quia A B. eſt vnitas. At ſumma duorum A D. B E. eſt 8. Totus vtique D E erit 9. Et hunc oportet diuidere in duos quadratos, nempè in ipſos G D. G E. Sed quoniam quadratorum alter maior eſt binario A D. & minor ternario D B. eo res rediit vt datum quadratum 9. diuidam in duos quadratos nempè ipſos G D. G E. vt alter ipſorum G D. cadat medius inter binarium, & ternarium. Nam inuento ipſo G D. cùm A D. binarius ſit, dabitur etiam reliquus A G. Eſt autem A B. vnitas. Quamobrem & reliquus B G. datus erit, ſed & dabitur G. in quo ſecanda eſt vnitas. Iam deſcriptionis ductum ſic exequamur. Eſto alter quadratorum, is qui inter 2. & 3. cadere debet 1 Q alter ergo erit 9. − 1 Q. æquandus quadrato. Et quidem hunc æquare quadrato, facile eſt, ſed oportet talem inueniri 1 Q. vt cadat inter 2. & 3. Sumamus duos quadratos, alterum maiorem quàm 2. alterum minorem quàm 3. ſunt autem $\frac{17}{16}$. & $\frac{11}{16}$. Iam ſi 1 Q. ita adornemus vt inter hos duos quadratos incidat, ſoluemus quæſtionem. Oportebit ergo Latus etiam 1 Q. hoc eſt 1 N. maius eſſe quam $\frac{11}{16}$. minus verò quàm $\frac{17}{16}$. Oportet igitur 9 − 1 Q. æquantes quadrato, inuenire 1 N. maiorem quàm $\frac{11}{16}$. minorem quam $\frac{17}{16}$. Quod ſi 9 − 1 Q. æqualem quadrato ſtatuamus, fingemus qua-

ΜΟΝΑΔΑ τμεῖν καὶ σχεσθεῖναι ἑκατέρῳ τῷ τμημάτων ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα ἀριθμὸν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. ὑποτετάχθω δὴ μονὰς τμεῖν καὶ σχεσθεῖναι ᾧ μὲν μ̄ β̄. ᾧ δὲ μ̄ ϛ̄. καὶ ποιεῖν ἑκάτερον τετράγωνον. ἐπεὶόθω μονὰς ἡ α β̄. καὶ τετμήσθω κ̄τ̄ τὸ γ̄. καὶ τῷ μὲν α γ̄. σχοινείσθω δυὰς ἡ α δ̄. τῷ δὲ γ β̄. ἑξὰς ἡ β ε̄. ἑκατέρα ἄρα τῶν γ δ̄. γ ε̄. ὅτι τετράγωνος. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν α β̄. ἴσαι μονάδες ᾱ. συναμφότερα δὴ ὁ α δ̄. ε ε̄. ὁκτὰς. ὅλος ἄρα ὁ δ ε̄. γίνεται μ̄ θ̄. καὶ ταύτας χρὴ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς ΓΔ̄. γ ε̄. ἀλλὰ ἐπὶ ἓν τῶν τετραγώνων. τῶν μὲν α δ̄. ἴσαι μείζωνταυτάσι δυάδος. τῶν δὲ β δ̄. ἴσαι ἐλάσσωνταυτάσι τριάδος. ἀπῆκται μοι εἰς τὸν ὑποτεταχθέντα τετράγωνον, οἱονεὶ ϛ θ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους τοὺς ΓΔ̄. γ ε̄ ὥστε ἕνα τὸν ΓΔ̄. εἶναι ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶνδε δυάδος καὶ τῆς τριάδος. διῃρήσθω γὰρ τὸ ΓΔ̄. δοθεὶς ὢν ὁ α δ̄. δοθεῖς. ἴσαι δὲ ὁ α β̄. μονάσι ᾱ. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ β γ̄. ἴσαι δοθείσαις. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ γ̄. καὶ ὁ τίμνεται, ἡ μονάς, ἡ δὲ ἀμοιρὴ ὑπογραφῆς. ἔστω γὰρ ὁ εἷς τῶν τετραγώνων μεταξύ τε δυάδος, καὶ τῆς τριάδος δύναμις ᾱ. ὁ ἄρα λοιπὸς ἔσται μονάδες Ϝ̄. λείψει δυναμένῳ ᾱ. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ἐστι, δεῖ δὲ διρεῖν τὴν δύναμιν μεταξὺ τῶνδε β̄. καὶ τῶν Γ̄. λαμβάνομεν δύο τετραγώνους, ἵνα μὲν μείζονα τοῦ β̄. τὸν δὲ ἕτερον ἐλάσσονα τοῦ Γ̄. εἰσὶ δὲ τὰ σπϟ ιηνσ. καὶ τξα ιηνσ. ἐπεὶ οὖν τὴν δύναμιν καταπολυάσωμεν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ὑποκειμένων δύο τετραγώνων. λύσομεν τὸ ζητούμενον. δεῖ οὖν καὶ τὴν πλευρὰν δ ᾱ. τουτέστι ζ̄ ᾱ. μείζονα ἢ ᾗ ιζ̄ ιϛ̄. ἐλάσσονα ἢ ιϑ̄ ιϛ̄. ὥστε δεῖ ζητοῦντα μ̄ Ϝ̄ ϛ δ̄ ᾱ. ἴσον τετραγώνῳ, διρεῖν τὸν μείζονα ᾗ μ̄ ιζ̄ ιϛ̄. ἐλάσσονα ἢ ιϑ̄ ιϛ̄. ἐπεὶ ἢ μ̄ β̄ ϛ δ̄ ᾱ.

ποιῶμεν ἴσας τετραγώνῳ. πλάσομεν τὸ τετραγώνου πλευραὶ ἀπὸ μ̄ γ̄ λείψει ς̄ πλευ, καὶ διρίσομεν τὸν ᾧ ἡμέσαι ἔκ τινος ἀριθμοῦ ἐξάκις ἡμισυμένου καὶ μειζομένου εἰς τὸν μοναδὶ μιᾶ μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου. ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ διρεῖν τινα ἀριθμὸν ὃς ἐξάκις ἡμύμενος, καὶ προσβληθεὶς εἰς τὸν μοναδὶ μείζονα τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, ποιῇ μείζονα ιϛ̄ ῑϛ̄. ἐλάσσονα δὲ ιϝ̄ ῑϛ̄. ἔστω ὁ ζητούμενος ς̱ ᾱ. δίλω ἄρα ις̄ ϛ̄. προσβληθέντας εἰς δ̱ ᾱ μ. ᾱ. ποιεῖ τὸν προσβολὸν μείζονα ὑπὲρ ιϛ̄ ῑϛ̄. ἐλάσσονα ἢ ιϑ̄ ῑϛ̄. ἀλλὰ ᾧ ὁ ιϛ̄. προσβληθεὶς προσβ ϗ ιβ̄. τὸν προσβολὲν ποιεῖ ιϛ̄ ῑϛ̄. ὥστε δεῖ ις̄ ϛ̄ προὸς δ̱ ᾱ μ̱ ᾱ. μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ιϛ̄ πρὸς ιβ̄. τὸ ἄρα ὑπὸ ις̄ ϛ̄. ᾧ μ̱ ιβ̄. τουτέστι ις̄ οβ̄. ὀφείλει μείζον εἶναι τοῦ ὑπὸ δωνάμεως ᾱ μ̱ ᾱ. καὶ ιϛ̄. τουτέστι δωνάμεων ιϛ̄. μ̱ ιϛ̄. τῷ ις̄ τῶ ἡμίσεως ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται ασϛ̄. ἄφελε τὰς δωνάμεις ὅτι τὰς μοναδὰς τουτέστι σπθ̄. λοιπὸν ἄρα αϛ̄. τούτων πλευρὰ οὐ μείζων λᾱ. προάθες τὸ ἥμισυ τῷ ις̄ γίνεται οὐ μείζων ξζ̄. προσβαλὲ προσ τὸ πλῆθος τῷ δωνάμεων, γίνεται ὁ ς̱ ὁ ξζ ῑϛ̄. καὶ ὁμοίως ἐπεὶ δεῖ ς̄ ϛ̄. προὸς δ̱ ᾱ μ̱ ᾱ. ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ ιϝ̄ προὸς ιβ̄. διρίσομεν τὸν ᾧ ἢν ἐλάσσονα ξς̄ ῑϛ̄. ἀλλὰ καὶ οὐ μείζονα ξζ̄ ῑϛ̄. ἔστω μ̱ γ̄. ᾱ ϛ̄. πλάσω οὖν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου ἀπὸ μ̱ γ̄ λείψει ς̄ γ̄. ᾱ ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̱ ιβ̄. ᾱ δ̄ϛ̄. μ̱ θ̄ ϟ ς̄ κᾱ. ταῦτα ἴσα μ̱ θ̄ ϟ δ̱ ᾱ. ἄθροι ὁ ς̱ πδ̄ ,ϛ̄. ἡ δὲ δύναμις ,ζ̄ϛ̄ ῑϛ̄ ϛ̄. καὶ ἐστὶν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν τὴν μονάδα. ἔστι δὲ τιῶμα τῆς μοναδὸς αὐλῆ ϛ̄ῑϛ̄. ὥστε τὸ ἑτεζητ ἔσται ,ατοᾱ ϛ̄ῑϛ̄. καὶ ἰσῶσι τὸ διπλάσιον.

drati latus à 3. cum defectu aliquot numerorum, & inueniemus 1 N. fieri ex aliquo numero sexies sumpto, & diuiso per quadratum ipsius vnitate auctum. Eo itaque sum redactus vt inueniam aliquem numerum, qui sexies sumptus, & diuisus per quadratum ipsius vnitate auctum quotientem faciat maiorem quàm $\frac{1}{2}$. minorem quàm $\frac{2}{3}$. Esto qui quæritur 1 N. Volo ergo vt 6 N. diuisi per 1 Q. + 1. quotientem faciant maiorem quam $\frac{1}{2}$. minorem quàm $\frac{2}{3}$. Sed & 17. diuisus per 12. quotientem facit $\frac{1}{2}$. Oportet itaque 6 N. ad 1 Q. + 1. maiorem habere rationem quàm quæ est 17. ad 12. productus ergo ex 6 N. in 12. hoc est 72 N. maior esse debet producto ex 1 Q. + 1. in 17. hoc est 17 Q. + 17. Numerorum semissis in se ducatur, fit 1296. aufer productum ex quadratis in vnitates, hoc est 289. relinquitur 1007. huius latus non maius 31. adde dimidium numerorum, fit non maius 67. diuide per multitudinem quadratorum fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Similiter quandoquidem oportet 6 N. ad 1 Q. + 1. minorem rationem habere quàm quæ est 19. ad 12. Inueniemus 1 N. non minorem $\frac{1}{2}$. sed & non maior inuentus est $\frac{2}{3}$. esto igitur $3\frac{1}{2}$ formo ergo quadratum à latere $3 - 3\frac{1}{2}$ N. & fit $12\frac{1}{4}$ Q + $9 - 21$ N. Hæc æquantur $9 - 1$ Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quadratus verò $\frac{1}{4}$. & si hinc auferamus binarium, erit alterum segmentum vnitatis $\frac{1}{4}$. alterum $\frac{3}{4}$. Et postulatis satisfit.

IN QVAESTIONEM XIII.

SATIS accuratè quæstionem hanc explicauit Xilander, multa tamen prætermisit notatu digna, quæ vt sigillatim persequamur. Aduerte primò necessariam à Diophanto hic omissam esse conditionem. Certum est enim numerum $9 - 1$ Q. æquari non potuisse quadrato, nisi 9. quadratus fuisset. Quare cùm 9. factus sit addita vnitate ad 8. summam adiiciendorum numerorum 2. & 6. euidens est huiusmodi conditionem præscribi debere. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum conficere quadratum vnitate auctam.* Moneo tamen sic esse concipiendam conditionem, si non aliter quàm per operationem Diophanti soluenda sit quæstio. Cùm enim, vt infrà commonstrabimus, quæstio æquè bene solui possit, dum summa numerorum additiorum vnitate aucta conficiat numerum ex duobus quadratis compositum, poterit vniuersalius proponi conditio, nimirum sic. *Oportet autem summam adiiciendorum numerorum vnitate auctam conficere quadratum, vel numerum ex duobus quadratis compositum.*

Aduerte secundò in codice manu exarato deesse diagramma descriptionis Diophantææ quod nos restituimus, cùm absque illo non possint intelligi Græca authoris verba. Cæterùm absque huiusmodi descriptione res facilius & breuius explicari potest, hoc modo. Cùm ad 2. addendo partem vnitatis debeat fieri quadratus, & ad 6. addendo residuum vnitatis conficiendus sit aliter quadratus, patet

ſummam quadratorum fore 9. Quare 9. diuidendus eſt in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. alter 6. & 7. conſiſtat. Vnde duplici via peruenirì poteſt ad æquationem. Sicut enim Diophantus, cum qui inter 2. & 3. cadere debet, poſuit 1 Q. alterum 9 − Q. ſic ille qui inter 6. & 7. conſiſtere debet poni poteſt 1 Q. alter 9 − 1 Q. & ſimilis prorſus erit operatio. Certùm eſt autem hiſce quadratis inuentis ſolui quæſtionem, nam ſi ab altero auferatur 2. ab altero 6. remanebunt quæſitæ partes vnitatis.

Aduerte tertiò vt inueniat Diophantus quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. rectè ſumere duos quadratos qui cadant inter 2. & 3. quales ſunt $\frac{289}{144}$ & $\frac{361}{144}$. ſi enim curemus vt 1 Q. cadat inter hoſce duos quadratos, euidens eſt eum fore maiorem quàm 2. minorem quàm 3. eſt autem facile duos quadratos reperire qui cadant inter 2. & 3. id enim fiet, ſi ſumatur quilibet quadratus, inter cuius duplum & triplum cadant duo quadrati. Vt ſi ſumas 36. cuius duplum 72. triplum 108. cùm inter 72. & 108. cadant duo quadrati 81. & 100. his ſubſcribendo denominatorem 36. fient quadrati quæſiti $\frac{81}{36}$. & $\frac{100}{36}$. Quare ſi per hos ſoluere velis quæſtionem curandum erit, vt valor Numeri cadat inter $\frac{9}{6}$ & $\frac{10}{6}$.

Denique aduerte vt fiat valor Numeri maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Diophantum vti artificio quo iam ſæpè in ſimili vſus eſt. Quia enim 9 − 1 Q. quadrato æquandus eſt, fiet valor Numeri, fingendo latus 3 − aliquot numeris, quorum ſextuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quærendus ergo Numerus cuius ſextuplo per quadratum ipſius numeri diuiſo fiat quotiens maior quàm $\frac{17}{12}$ minor quàm $\frac{19}{12}$. Poſito ergo huiuſmodi numero 1 N. fiet $\frac{6\text{ N}}{1\text{ Q}+1}$ maior quàm $\frac{17}{12}$. minor quàm $\frac{19}{12}$. & omnia per denominatores 1 Q. + 1. & 12. multiplicando, fient 72 N. maiores quàm 17 Q. + 17. minores quàm 19. Proinde vtraque æquatione per approximationem reſoluta, fiet 1 N. maior quàm $\frac{41}{72}$ minor quàm $\frac{42}{72}$. Quare ſumetur numerus aliquis intermedius, puta 3 $\frac{1}{2}$ & fingetur numeri 9 − 1 Q. latus 3 − 3 $\frac{1}{2}$ N. & cætera ſunt manifeſta.

Porro Diophanti operatio eatenus locum habet, quatenus adiiciendorum numerorum ſumma vnitate aucta quadratum facit. Sed ſi huiuſmodi ſumma vnitate aucta, conficiat numerum ex duobus quadratis compoſitum, aliter operandum erit, imitando ſcilicet artificium eius quam ad præcedentem attulimus ex Vieta. Verbi gratia. Diuidenda ſit vnitas in duas partes, vt alteri addendo 2. alteri 7. fiat vtrimque quadratus. Euidens eſt numerum 10. diuidendum eſſe in duos quadratos, quorum alter cadat inter 2. & 3. Alter verò inter 7. & 8. Cùm ergo addendo ſemiſſem vnitatis vtrique datorum numerorum fiant 2 $\frac{1}{2}$. & 7 $\frac{1}{2}$. Quærendi ſunt quadrati qui ad hos numeros accedant. Quæro ergo quæ pars quadrati addita ad 2 $\frac{1}{2}$. faciat quadratum, ea reperietur $\frac{1}{144}$ fitque quadratus $\frac{289}{144}$ cuius latus $\frac{17}{12}$. Rurſus quæro quæ pars quadrati ad 7 $\frac{1}{2}$ adiecta, faciat quadratum, ea reperitur $\frac{1}{144}$. & fit quadratus $\frac{361}{144}$ à latere $\frac{19}{12}$. Quamobrem 10, diuidendus eſt in duos quadratos, ita vt latus vnius accedat ad $\frac{17}{12}$. Alterius vero ad $\frac{7}{2}$ ſeu ad $\frac{42}{12}$. Statuentur ergo per ad æqualitatem quadratorum latera 1 + 7 N. & 3 − 3 N. fietque ſumma quadratorum 10 + 58 Q. − 4 N. æqualis 10. vnde fiet 1 N. $\frac{1}{29}$. & erunt quadratorum latera $\frac{7}{29}$ & $\frac{20}{29}$. ipſi quadrati $\frac{49}{841}$. & $\frac{400}{841}$. quorum ſumma 10. & ſi à primo auferas 2. à ſecundo 7. reſtant quæſitæ partes vnitatis $\frac{420}{841}$ & $\frac{421}{841}$.

Hæc autem quæſtio extenderur quoque ad quemlibet numerum, & ſic vniuerſalius proponetur.

Datum numerum diuidere in duas partes, vt vtrique addendo alterum atque alterum numerum, fiat vtrimque quadratus. Oportet autem compoſitum ex diuidendo numero, & vtroque adiiciendorum, quadratum eſſe, vel compoſitum ex duobus quadratis.

Diuidendus eſto 6. adiiciendi verò 3. & 7. Cùm ergo horum trium ſumma ſit 16. oportet diuidere 16. in duos quadratos, quorum alter ſit maior quàm 3. minor quàm 9. Alter verò ſit maior quàm 7. minor quàm 13. Ponatur primus 1 Q. erit alter 16. − 1 Q. cuius latus ita fingendum eſt, vt 1 Q. cadat inter 3. & 9. ſumantur duo quadrati cadentes inter 3. & 9. puta 4. & $\frac{9}{1}$. quorum latera 2. & $\frac{3}{1}$. Oportet igitur fictitium latus ita ponere, vt 1 N. ſit maior quàm 2. minor quàm $\frac{3}{1}$. Porro fiet valor Numeri ponendo fictitium latus 4 − aliquot numeris, quorum octuplum diuidetur per eorum quadratum vnitate auctum. Quamobrem $\frac{8\text{ N}}{1\text{ Q}+1}$ maior eſt quàm 2. minor quàm $\frac{3}{1}$. & tandem 8 N. maior eſt quàm 2 Q. + 2. & 24. N. minor eſt quàm 8 Q. + 8. & vtraque æquatione per approximationem reſoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{10}{7}$ minor quàm $\frac{11}{7}$. Ponatur 3. & numeri 16 − 1 Q. latus ſtatuatur 4 − 3 N. fiet 1 N. $\frac{12}{13}$. erunt igitur latera quadratorum $\frac{12}{13}$ & $\frac{5}{13}$. ipſi quadrati $\frac{144}{169}$ & $\frac{25}{169}$ & à primo auferendo 3. à ſecundo 7. remanent quæſitæ ſenarij partes $\frac{75}{169}$. & $\frac{144}{169}$.

Rurſus numerus 8. diuidendus ſit in duas partes, vt alteri addendo 5. alteri 7. fiat vtrumque quadratus. Cum ergo ipſorum 8. 5. 7. ſumma ſit 20. oportet diuidere 20. in duos quadratos quorum alter cadat inter 5. & 13. alter conſiſtat inter 7. & 15. ſumo medium arithmeticè inter vtrumque terminum, puta 9. & 11. & quæro quæ pars quadrati ad vtrumque addita faciat quadratum; inuenio hinc $\frac{1}{2}$. inde $\frac{1}{2}$. fiuntque quadrati $\frac{121}{4}$ & $\frac{169}{4}$ quorum latera in eadem denominatione ſunt $\frac{11}{2}$ & $\frac{13}{2}$. Diuidendus ergo mihi eſt 20. in duos quadratos, ita vt vnius latus accedat ad $\frac{13}{2}$. Alterius latus ſit proxi-

mum $\frac{1}{16}$. erunt ergo pet ad æqualitatẽ huiuſmodi latera 2 + 27 N. & 4 − 16 N. eſtque ſumma quadratorum 20 + 985 Q. − 20 N. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & ſunt quadratorum latera $\frac{1}{17}$ & $\frac{1}{15}$ ipſi quadrati $\frac{1}{289}$ & $\frac{1}{225}$. Quod ſi à priore auferas 5. à poſteriore 7. remanent quæſitæ partes octonarij, $\frac{1}{289}$ & $\frac{1}{225}$.

QVÆSTIO XIV.

Μονάδα διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν τὸν αὐτὸν δοθέντα, καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διπλάσιον ἀριθμὸν, μήτε δυάδα εἶναι, μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις ἀφαιρεθέντων μένειν. ὑπιτετάχθω δὴ τὴν μονάδα διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμούς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ μ̄ γ̄. καὶ ποιεῖν ἕκαστον τετράγωνον. πάλιν δεῖ τὸν ῑ̄. διελεῖν εἰς ξεῖς τετράγωνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μ̄ γ̄. ἐπεὶ οὖν πάλιν τὸν ῑ̄. διέλωμεν εἰς ξεῖς τετραγώνους. τῇ τῆς παρισότητος ἀλογωτῇ. ἔσται ἕκαστος αὐτῶν μείζων τελείου. καὶ δυωκαίδεκα ἀφ' ἑκάστου αὐτῶν ἀφαιλόντες μ̄ Γ̄. ἔχειν εἰς ἓς ἡ μονὰς διαιρεῖται. λαμβάνομεν ἄρτι τὸν ῑ̄. τὸ τρίπλον, γίνεται Γ̄. ᾱ ϛ̄. καὶ ζητοῦμεν τὰ προσθέντες μόνα τετραγωνικὰ ταῖς μονάσι γ̄. ᾱ ϛ̄. ποιήσωμεν τετράγωνον πάντα ἑπτάκις, καὶ δεῖ τῷ λ̄. προσθεῖναι τὸ μόνον τριγωνικὸν, καὶ ποιεῖν τὸν ὅλον τετράγωνον. ἔστω τὸ προστιθέμενον μόνον α͵ δ̄ο. ᾱ͵. καὶ πάντα δεῖ δύναμιν γίνεσθαι. δ͵ᵛ λ̄. μ̄ᵛ ᾱ. ἵστα τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ις̄ ῑ͵. μ̄ᵛ α͵ᵛ γίνεται ὁ πλάγιος δ͵ᵛ κ̄ε̄. ς̄ῑ ῑ̄. ἴσος δ͵ᵛ λ̄͵. μ̄ᵛ α͵. ὅλη ὁ ς̄ῑ μ̄ᵛ β̄. ἡ δύναμις μ̄ᵛ δ͵. τὸ δυωκαιτεσσαρεσκαιδεκαπλάσιον μ̄ᵛ ᾱ δ͵ᵛ. εἰ δὲ ταῖς μ̄ᵛ λ̄. προσέθηκαν μ̄ᵛ α͵ δ͵ᵛ. ἴσαις μονάσιν γ̄. ᾱ ϛ̄. προσεθήκαμεν α͵ λ͵ᵛ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος ρια͵ λ͵ᵛ. δεῖ οὖν τὸν ῑ̄. διελεῖν εἰς ξεῖς τετραγώνους ὅπως ἑκάστου τετραγώνου ἡ πλευρὰ πάρισος ᾖ μ̄ ια͵ᵛ. ἀλλὰ καὶ ὁ ῑ̄. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων τῶν ϑ̄. καὶ τῆς μονάδος. διαιρῶμεν οὖν τὴν μονάδα εἰς δύο τετραγώνους πάντῃ ϑ̄ ρμ͵ᵛ. καὶ τὰ ις̄ ρμ͵ᵛ. ὥστε τὸν ῑ̄ συγκεῖσθαι ἐκ τελῶν τετραγώνων. ἔστι τῷ ϑ̄. καὶ τῷ ις̄ ρμ͵ᵛ. δεῖ οὖν ἑκάστην τῶν πλευρῶν πύτιν ἀφαπλάσιαν πάρισον ια͵ ς̄ᵛ. ἀλλὰ καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἰσι μ̄ᵛ γ̄. καὶ μ̄ᵛ δ͵ ῑᵛ. καὶ μ̄ᵛ γ͵ ῑᵛ. καὶ πάντα τεσσαρακοντάκις. καὶ γίνονται μ̄ᵛ ζ̄ᵛ. καὶ μ̄ᵛ κδ͵. καὶ μ̄ᵛ ιϖ̄. ἴσα ᾖ ια͵ ς̄ᵛ. γίνονται μ̄ᵛ ρῑ. δεῖ οὖν ἑκάστην πλευρὰν ἡκατοπλασίαν ρῑ. πλάσωμεν ἐὸς πλευραὶ μ̄ᵛ γ̄. ϛ̄ ις̄. ἑτέρα δὲ ις̄ λζ͵ᵛ μ̄ᵛ γ͵ ῑᵛ. γίνονται αἱ ἀπὸ τῶν εἰρημένων τετράγωνοι. δ͵ᵛ γενὶ μ̄ᵛ ῑ̄ λείπει ις̄ ρις̄. ταῦτα ἴσα μονάσι ῑ̄. ὅλη διπλοῦται ὁ ς̄ ρις̄ ͵ϡο̄ᵛ. δεῖ τὰς ὑποτάσεις. καὶ γίνονται αἱ πλευραὶ

VNITATEM diuidere in tres numeros, & cuilibet addere datum eundem numerum, & ita quemlibet quadratum facere. Oportet autem datum neque binarium eſſe, neque aliquem eorum qui fit addito binario ad octonarij multiplicem. Imperatum ſit vt vnitas diuidatur in tres numeros, & cuilibet addatur 3. & ſic fiat quadratus. Rurſus oportet diuidere 10. in tres quadratos, vt quilibet ipſorum ſit maior quàm 3. Si ergo iterum diuidamus 10. in tres quadratos adæqualitatis ductu, erit quilibet ipſorum maior ternario, & poterimus ternario à quouis detracto, eos habere in quos vnitas diuidenda eſt. Sumamus itaque trientem de 10. hoc eſt $3\frac{1}{3}$. Et quæramus quæ pars quadrata poſſit adiici ad $3\frac{1}{3}$. vt fiat quadratus. Omnia nouies. Iam ad 30. oportet partem à quadrato denominatum addi, & fieri quadratum. Eſto pars adiicienda $\frac{1}{6}$. & omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 30 Q. + 1. æqualia quadrato à latere 5 N. + 1 ſitque quadratus 25 Q. + 10 N + 1. æqualis 30 Q. + 1. vnde fit 1 N. 2. & 1 Q. 4. Parſque quadratica $\frac{1}{4}$. Si ergo ad 30. adiicimus $\frac{1}{4}$. ad $3\frac{1}{3}$ addemus $\frac{1}{12}$. & fit quadratus $\frac{121}{144}$. Oportet igitur diuidere 10. in tres quadratos, vt vniuſcuiuſque quadrati latus ſit adæquale vnitatibus $\frac{11}{12}$. Atqui 10. componitur ex duobus quadratis 9. & 1. Diuidimus ergo 1. in duos quadratos $\frac{25}{144}$. & $\frac{119}{144}$. ita vt 10. conſtet ex tribus quadratis 9. $\frac{25}{144}$. & $\frac{119}{144}$. Oportet igitur horum cuiuſuis lateri adæqualem facere $\frac{11}{12}$. Sed & latera eorum ſunt 3. $\frac{5}{12}$. & $\frac{7}{12}$. & omnia per 30. multiplicentur. Et fiunt 90. 24. & 18. Ipſe verò $\frac{11}{12}$. fit 55. Oportet itaque vnum quodque latus adæquare ipſi 55. fingamus vnius latus 3 − 35 N. alterius autem 31 N. + $\frac{1}{2}$. Alterius denique 37 N. + $\frac{1}{2}$. fiunt ab his quadrati in vnam ſummam redacti 3555 Q. + 10. − 110 N. N. hæc æquantur 10. vnde inuenitur 1 N. $\frac{110}{3555}$. Ad poſitiones. Et fiunt la-

tera quadratorum data, ipsique etiam dantur, & reliqua sunt manifesta.

τῷ τετραγώνων δοθῆναι, ὥστε καὶ αὐτοὺς τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XIV.

VERBA illa δεῖ δὴ τὸν διδόμενον ἀριθμὸν μήτε δυάδα εἶναι, μήτε πρὸς τῷ ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις ἕνα συζευγνύειν, perperam vertit Xilander & ex eius versione commodum aliquem sensum recipere nequeunt. Itaque cùm eorum vim non perciperet, nihil super huiusmodi limitatione adnotauit. Certum est autem, vt quæstio solui possit oportere vt triplum dati numeri vnitate auctum sit quadratus, vel ex duobus, aut ex tribus etiam quadratis suapte natura compositis. Quare vt Diophanti limitatio sit necessaria, ostendendum est numeros 2. 10. 18. 26. 34. 42. & alios omnes qui fiunt addendo 2. ad aliquem octonarij multiplicem tales esse, vt eorum triplum vnitate auctum non possit esse quadratus, neque numerus ex duobus aut tribus quadratis compositus. Et de binario quidem, manifestum est eius triplum vnitate auctum puta 7. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. De aliis autem sic demonstrabitur.

Esto A. quilibet octonarij multiplex, cui addito binario fiat B. & sumatur C H triplum ipsius B. cui addita vnitate H K. fiat C K. dico C K nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum: Quia enim B. continet A & binarium, & C H triplus est ad B, patet C H continere triplum ipsius A, & triplum binarij, puta senarium. Sit ergo C F triplum ipsius A, erit reliquus F H senarius, in quo sumendo binarium G H, relinquetur quaternarius F G.

A 16. B 18.
C——————F....G:.H.K

Primum itaque C K non esse quadratum, sic probatur. Quoniam A est multiplex octonarij, [1] est A par, addito binario fit rursus B par. Quamobrem & C H multiplex ad B. par est, ac proinde C K est impar ex definitione. Si ergo C K. ponatur quadratus, ablata vnitate, [2] reliquus C H. erit pariter par. [3] Quare quaternarius eum metietur. Sed idem quaternarius metitur C F multiplicem octonarij, ergo idem quaternarius metietur reliquum F H. sed & quaternarius metietur seipsum, puta F G. ergo idem quaternarius metietur reliquam binarium G H. Quod est impossibile. Quare C K non est quadratus.

[1] 21. neu.
[2] 21. 1. poris.
[3] 10. 2. poris

Deinde C K. non componi ex duobus quadratis sic ostendo. Etenim si componatur ex duobus quadratis, non erit vterque par, nec vterque impar, alioquin ipse C K. esset par, contrà id quod ostensum est. Necesse est ergo alterum quadratorum parem esse, alterum imparem. [4] At quadratus par est pariter par [5] & à quadrato impare auferendo vnitatem, relinquitur pariter par. Igitur à numero C K. auferendo vnitatem, reliquus C H. componitur ex duobus pariter paribus, [6] ac proinde C H. est pariter par. Quare vt prius sequitur quaternarium metiri binarium. Quod est absurdum. Igitur C K. non componitur ex duobus quadratis.

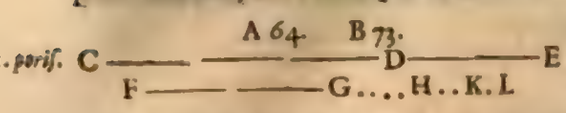
[4] 20. 1. poris.
[5] 21. 1. poris.
[6] 16. 1. poris.

Denique si C K. ponatur componi ex tribus quadratis; non erit quilibet illorum par; nec erunt duo impares & tertius par; sic enim fieret ex illis compositus C K. par, contra id quod ostensum est. Relinquitur ergo tres illos quadratos vel impares esse omnes; vel duos esse pares & tertium imparem. Atqui neutrum possibile est. Nam primò si ponantur duo pares & tertius impar, si à tertio auferatur vnitas, [7] relinquetur pariter par, quo addito aliis duobus quadratis itidem pariter paribus [8] fiet totus C H. pariter par. Quare rursus inferetur quaternarium metiri binarium. Quod est impossibile. Deinde si quilibet trium quadratorum ex quibus C K. componi dicitur, ponatur impar cùm à quolibet ipsorum detracta vnitate relinquatur multiplex octonarij, vt ostensum est ad quadragesimam quartam quarti, & euidentius demonstrabitur ad octauam de numeris multangulis: patet si à composito ex tribus, nempè à toto C K, auferatur ternarius G K, residuum C G, multiplicem esse octonarij: sed & C F. multiplex est octonarij ex constructione. Igitur octonarius metiens totum C G. & ablatum C F, metietur & reliquum quaternarium F G. Quod est impossibile. Non erit ergo C K. quadratus, nec compositus è duobus vel tribus quadratis. Quod demonstrandum erat.

[7] 21. 1. poris.
[8] 16. 1. poris.

Ex his liquidò apparet eum esse sensum verborum Diophanti, quem expressimus versione nostra, nam ingeniosa est, & authore digna huiusmodi limitatio. Cæterùm quamuis, vt ostensum est, hæc conditio sit necessaria, non est tamen sufficiens, nam non solùm numeri omnes hac limitatione comprehensi soluendæ quæstioni sunt inutiles, sed præterea numerus 9. & omnes alij qui fiunt addito 9. ad 32. vel ad aliquem eius multiplicem, quales sunt 41. 73. 105. &c. nam horum triplum addita vnitate, neque quadratus est, neque numerus è duobus vel tribus quadratis compositus. Et quidem de ipso 9. patet experientia, nam eius triplum vnitate auctum, puta 28. nec quadratus est, nec è duobus vel tribus quadratis compositus. De aliis autem sic demonstratur. Esto A multiplex ad 32. cui addendo 9. fiat B. cuius triplum vnitate auctum esto C E. Dico C E. nec quadratum esse, nec è duobus vel tribus quadratis compositum. Quia enim B. continet A. & nouenarium, ipse C E. continet triplum ipsius A, & triplum ipsius 9. & vnitatem. Sit C D triplum ipsius A, erit ergo D E. tri-

plum nouenarij & vnitas , puta numerus 28. Quare cùm C D. multiplex pariter paris sit pariter par & ipse etiam D E , seu 28. sit pariter par erit totus C E, pariter par , ' ac proinde metietur cum quaternarius, sit illius quadrans F L , constans ex F G. quadrante ipsius C D, & ex G L. seu septenario quadrante ipsius D E, seu 28. in quo sumatur G H , quaternarius. H K binarius. K L vnitas. Cùm ergo C D sit multiplex ad 32. & quadrans ipsius 32. sit 8. patet F G multiplicem esse ad 8. & toties continere 8. quoties C D continet 32. Quare F G. est pariter par , & multiplex octonarij.



11. 1. *poris.*

Primum itaque C E non esse quadratum sic probatur. Si enim C E quadratus sit , eo per quadratum 4. diuiso , fiet & F L quadratus. Quare cùm F L sit impar, constans scilicet ex pari F G. & ex impari G L, ablata inde vnitate, residuum F K, erit multiplex octonarij per ostensa ad quadragesimam quartam quarti. Cum ergo 8. metiatur totum F K, & ablatum F G, vt ostensum est , metietur & 8. reliquum senarium G K Quod est impossibile.

Deinde C E, non componi ex duobus quadratis sic ostenditur. Non potest componi ex duobus quadratis , quorum alter sit par , alter impar , alioquin C E esset impar contra id quod ostensum est.

21. 1. *poris.* Non componetur etiam ex duobus imparibus ', nam ab vtroque auferendo vnitatem, relinquerentur duo numeri pariter pares , quorum summa esset pariter par ; ac proinde totus C E, constaret ex numero pariter pari , atque ex binario '. Quare C E, esset pariter impar tantùm contra id quod demonstratum est. Restat ergo vt vterque quadratorum ex quibus C E componi dicitur, sit par ', vterque ergo erit pariter par. Quare eorum quadrantes sumendo , fient duo quadrati æquales toti F L. Cum ergo F L sit impar , necesse est alterum quadratorum ex quibus componitur , esse parem , alterum imparem , & ab impari auferendo vnitatem cùm remaneat pariter par , patet F K ex duobus pariter paribus compositum , esse pariter parem '. Igitur metietur quaternarius totum F K, sed & metietur pariter parem F G, & seipsum puta G H. Ergo idem quaternarius metietur reliquum binarium H K. Quod est absurdum.

11. 1. *poris.*

20. 1. *poris.*

10. 1. *poris.*

Denique C E non potest componi ex tribus quadratis. Etenim non potest componi ex tribus imparibus neque ex duobus paribus & tertio impari , alioquin ipse C E esset impar contra demonstrata. Non componetur etiam ex duobus imparibus , & tertio pari , sic enim à quadratis imparibus concipiendo auferri vnitatem , concludetur totum C E componi ex tribus numeris pariter paribus, & ex binario , ' ac proinde C E esse pariter imparem tantùm , contra id quod ostensum est. Restat ergo C E componi ex tribus quadratis paribus , qui cùm sint pariter pares , & eorum quadrantes sint quadrati numeri , erit F L compositus ex tribus quadratis. Non erunt autem tres hi quadrati pares, neque duo impares erunt & tertius par , alioquin totus F L erit par contra demonstrata. Non erunt etiam duo pares , tertius impar , nam si à tertio impari auferatur vnitas , relinquetur totus F K compositus ex tribus pariter paribus , ac proinde pariter par. Quare vt prius inferetur quaternarium metiri binarium. Demum non erunt tres quadrati impares , nam tunc à quolibet auferendo vnitatem , relinquentur tres numeri quos sigillatim octonarius metietur per ostensa , ad quadragesimam quartam quarti ac proinde à toto F L auferendo ternarium , relinquetur F H multiplex octonarij. Cùm ergo 8. metiatur totum F H, & ablatum F G vt ostensum est , metietur idem 8. reliquum quaternarium G H. Quod est impossibile. Non est ergo C E quadratus , nec componitur è duobus vel tribus quadratis. Quod erat demonstrandum. Cæterùm an hæ duæ limitationes simul sufficientes sint , ita vt per vtramque simul excludantur omnes omnino numeri quorum triplum vnitate auctum non est quadratus , nec è duobus vel tribus quadratis compositus , non ausim temerè affirmare. Equidem vix adducor vt aliter sentiam, cum in omnibus numeris ab vnitate vsque ad 325. id sim expertus.

20. 1. *poris.*

OBSERVATIO D. P. F.

Limitatio ipsa Bacheti est insufficiens , imo nec ipsius experientia satis fuit accurata, nam 37 numerus cadit in limitationem , non autem in regulam.

Vera limitatio sic concipi debet.

Exponantur duæ progressiones quadrati altera ab 1, *altera ab octonario , & vna alteri superponatur sic.*

1 4 16 64 256 1024 4096 *&c.*
8 32 128 512 2048 8192 32768 *&c.*

Et considerando primò terminum primum secundæ qui est 8. *oportet datum numerum non esse duplum vnitatis quia ipsi superponitur vnitas, neque superare duplo vnitatis multiplicem* 8.

Deinde

Deinde considerando secundum terminum secundæ progressionis qui est 32, sumatur duplum numeri superpositi qui est 4. fit 8. cui si addas omnes in eadem progressione superiori proxime antecedentes (in hoc exemplo inuenietur sola vnitas) fit 9. sumptis igitur duobus numeris 32 & 9. oportet datum numerum neque esse 9 neque superare dicto numero 9. multiplicem 32. consideretur mox tertius progressionis secundæ terminus qui est 128. sumatur duplum numeri superpositi qui est 16. fit 32, cui si addas omnes in eâdem progressione superiori proxime antecedentes qui iam sunt 1. & 4. fit 37. sumptis igitur duobus numeris 128. & 37 oportet datum numerum neque esse 37. neque superare dicto 37. multiplicem 128.

Considerato deinde 4. progressionis secundæ termino fient ex methodo numeri 512 & 149. oportebit itaque datum numerum neque esse 149. neque superare dicto 149. multiplicem 512. & est vniformis & perpetua in infinitum methodus quam neque Diophantus generaliter indicauit, nec Bachetus ipse detexit cuius vel ipsa experientia fallit, vt iam præmonuimus, non solum in numero 37 qui est intra limites experientiæ de quâ fidem facit, sed etiam in numero 149. & alijs.

Reliqua operatio Diophanti ex dictis ad duodecimam perspicua redditur. Inuento $\frac{1}{4}$ latere quadrati cui adæquari oportet latera quadratorum in quos numerus 10. diuidendus est, sumit latera quadratorũ ex quibus 10. suapte natura cõponitur, puta 3. $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. & omnia reducendo ad eandem denominationem, fiunt hæc tria latera $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ ipse verò $\frac{1}{4}$ fit $\frac{1}{12}$. Posito ergo valore Numeri $\frac{1}{12}$. patet latera quadratorum quæsitorum ponẽda esse, vt facit Diophantus $3 - 35$ N. 31 N. $+ \frac{1}{2}$. 37 N. $+ \frac{1}{3}$. & reliqua sunt manifesta. Placuit autem παρισότητα vertere cum Xilandro ad æqualitatem. Quia enim in huiusmodi quæstionibus Diophantus, cuidam lateri adæquat proximè latera quadratorum quæsitorum, non autem æquat propriè, vocat ille hanc comparationem παρισότητα, non autem ἰσότητα. Nos etiam non æqualitatem sed adæqualitatem appellamus, sicut etiam πάρισον vertimus adæquale.

Porrò solutionem quæstionis omisit Diophantus molestiæ fractionum se subtrahens, sed talis est, fit 1 N. $\frac{120}{721}$ per quem si resoluas hypostases, fiunt quadratorum latera $\frac{14400}{721}$ $\frac{43200}{721}$ $\frac{28800}{721}$. Ipsi quadrati $\frac{207360000}{518841}$ $\frac{1866240000}{518841}$. $\frac{829440000}{518841}$. à quibus si auferas sigillatim ternarium, restant quæsitæ partes vnitatis, videlicet $\frac{310561441}{518841}$ $\frac{1866240000}{518841}$. Hæc autem quæstio extendetur etiam ad quemlibet numerum, sic eam proponendo.

Datum numerum secare in tres partes, & cuilibet addere eundem numerum, & facere quadratum. Oportet autem, vt numerus diuidendus adsumens triplum additicij numeri, faciat quadratum, vel numerum è duobus aut tribus quadratis compositum.

Diuidendus esto 5. additicius numerus 3. Igitur 14. diuidendus est in tres quadratos, quorum quilibet excedat 3. sumo $\frac{1}{2}$ de 14. puta $\frac{7}{2}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita, faciat quadratum ea inuenietur $\frac{1}{16}$ & fit quadratus $\frac{49}{16}$ à latere $\frac{7}{4}$. Diuidendus ergo est 14. in tres quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{7}{4}$. At 14. suapte natura componitur ex tribus quadratis, quorum latera 3. 2. 1. fingentur ergo per adæqualitatem quæsitorum quadratorum latera $3 - 5$ N. $2 + 1$ N. & $1 + 7$ N. eritque summa quadratorum $14 + 75$ Q. $- 12$ N. æqualis 14. vnde fiet 1 N. $\frac{1}{37}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{111}{37}$ $\frac{14}{37}$ $\frac{91}{37}$. ipsi quadrati $\frac{12321}{1369}$ $\frac{196}{1369}$ $\frac{8281}{1369}$. à quibus sigillatim auferendo ternarium remanent quæsitæ quinarij partes $\frac{11152}{1369}$ $\frac{196}{1369}$ $\frac{7912}{1369}$.

Rursus vniuersalius etiam proponetur quæstio, hoc pacto.

Datum numerum secare in quotlibet partes, vt cuilibet addendo eundem numerum, fiat quadratus.

Sit secandus 6. in quatuor partes vt cuilibet addendo 4. fiat quadratus, oportet ergo quadruplum ipsius 4. adsumpto 6. puta 22. diuidere in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat 4. Porrò 22. diuiditur in tres quadratos 9. 9. 4. quorum primus 9. excedit 4. & duorum reliquorum summa 13. excedit triplum ipsius 4. Quare supereſt vt diuidamus 13. in tres quadratos quorum quilibet excedat 4. sumo trientem de 13. puta $\frac{13}{3}$. & quæro quæ pars quadrati huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{144}$. & fit quadratus $\frac{625}{144}$ cuius latus $\frac{25}{12}$. Porrò 13. diuiditur in tres quadratos quorum latera $\frac{5}{3}$. 2. $\frac{17}{3}$. Quare per adæqualitatem constituentur quæsitorum quadratorum latera $\frac{5}{3} + 17$ N. $2 + 5$ N. $\frac{17}{3} - 19$ N. & fit quadratorum summa $13 + 675$ Q. $- 10$ N. æqualis 13. vnde fit 1 N. $\frac{1}{111}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{177}{111}$ $\frac{260}{111}$ $\frac{224}{111}$. Ipsi quadrati $\frac{31329}{12321}$ $\frac{67600}{12321}$ $\frac{50176}{12321}$. quibus si addatur quartus quadratus 9. habentur quatuor quæsiti quadrati, à quibus auferendo sigillatim numerum 4. remanent quæsitæ partes senarij $\frac{19929}{12321}$ $\frac{43200}{12321}$ $\frac{32076}{12321}$. & 5. Hîc nulla conditio præscribitur, quia quilibet numerus in quatuor pluresve quadratos diuidi potest, vt abundè docuimus ad trigesimam primam quarti, vbi etiam quarundem

quæstionum explicationem in hunc locum reiecimus, quas iam enodare libet. Sit ergo propositum:

Inuenire duos quadratos, quorum summa cum summa laterum, datum faciat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum binario auctum diuidi posse in duos quadratos.

Datus esto 6.

Patet ex dictis ad trigesimam primam quarti, si ad 6. addamus duos quadrantes vnitatis, puta $\frac{1}{2}$ summam $6\frac{1}{2}$ æquari debere duobus quadratis, à quorum lateribus si auferatur sigillatim $\frac{1}{2}$ restant quæsitorum quadratorum latera. Porro ad vitandas minutias ducto $6\frac{1}{2}$ in 4. fit 26. diuidendus in duos quadratos. Quia verò $6\frac{1}{2}$ ita diuidendus est in duos quadratos, vt quilibet excedat $\frac{1}{2}$. patet eius quadruplum 26. ita diuidendum in duos quadratos, vt quilibet excedat 1. id est vt quilibet sit maior quàm 1. minor quàm 25. Sumpto ergo medio inter 1. & 25. puta 13. quæro quæ pars quadrati huic addita faciat quadratum ea est $\frac{5}{12}$. fitque quadratus $\frac{25}{144}$ à latere $\frac{5}{12}$. Ergo latera quadratorum adæquari debent $\frac{5}{12}$. Quare sumptis lateribus quadratorum ex quibus 26. componitur 1. & 5. fingentur per adæqualitatem quæsitorum latera $1 + 8\,N. \& 5 - 4\,N.$ fit summa quadratorum $26 + 80\,Q. - 24\,N.$ æqualis 26. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. sunt igitur latera quadratorum $\frac{1}{2}$. $\frac{11}{12}$. Quorum semisses puta $\frac{1}{4}$ $\frac{11}{24}$ sunt latera quadratorum ex quibus $6\frac{1}{2}$ componitur. Quamobrem à quolibet auferendo $\frac{1}{4}$ remanent quæsitorum quadratorum latera $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{24}$. nam horum summa cum summa quadratorum conficit 6.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres quadratos, quorum summa cum summa laterum, datum conficiat numerum. Oportet autem dati numeri quadruplum auctum ternario, diuidi posse in tres quadratos.

Datus esto 4.

Ergo $4\frac{1}{2}$ diuidendus est in tres quadratos quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. omnia per 4. fit 19. diuidendus in tres quadratos, quorum quilibet excedat 1. Diuiditur autem 19 in tres quadratos 9. 9. 1. quorum primo retento, supereſt vt reſiduum de 19. puta 10. diuidamus in duos quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quæro partem quadrati quæ ad 5. addita quadratum faciat, ea est $\frac{12}{5}$. & fit quadratus $\frac{144}{25}$ à latere $\frac{12}{5}$. fingo ergo latera quadratorum per adæqualitatem $1 + 5\,N. \& 3 - 3\,N.$ fitque summa quadratorum $10 + 34\,Q. - 8\,N.$ æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{4}{17}$. sunt igitur latera $\frac{13}{17}$ & $\frac{15}{17}$. & sic totus 19. diuisus est in tres quadratos, quorum latera 3. $\frac{13}{17}$. $\frac{15}{17}$. quorum semisses $\frac{3}{2}$ $\frac{13}{34}$ $\frac{15}{17}$ sunt latera quadratorum ex quibus $4\frac{1}{2}$. componitur. Proinde à quolibet auferendo $\frac{1}{2}$ remanent quæsitorum quadratorum latera 1. $\frac{13}{34}$. $\frac{15}{17}$ quorum summa cum summa quadratorum conficit 4.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum summa cum summa laterum datum conficiat numerum.

Hic nulla conditio præscribitur, quia quilibet Numerus in quatuor vel plures quotlibet quadratos diuidi potest. Sufficit ergo, si datus numerus tot quadrantibus vnitatis auctus, quot quadrati postulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat $\frac{1}{4}$. seu quod idem est; si dati numeri quadruplum auctum tot vnitatibus quot quadrati postulantur, diuidatur in totidem quadratos, quorum quilibet excedat 1. Quod perficietur eadem arte.

QVÆSTIO QVARTA.

Inuenire quotlibet quadratos, quorum summa adscito quolibet multiplice summæ laterum conficiat quadratum.

Sint inueniendi quatuor quadrati, quorum summa adscito triplo summæ laterum, faciat 3. Quoniam per lemma vniuersaliter demonstratum ad decimam tertiam quarti, omnis quadratus auctus triplo sui lateris, & numero $2\frac{1}{4}$ facit quadratum, cuius latus detracto $1\frac{1}{2}$ exhibet prioris quadrati latus. At quater $2\frac{1}{4}$ conficit 9. & volumus quatuor quadratos cum suis lateribus efficere 3. patet addito 3. ad 9. eò deuentum esse vt numerus 12. diuidatur in quatuor quadratos, quorum quilibet excedat $2\frac{1}{4}$. nam si à latere cuiuslibet auferamus $1\frac{1}{2}$. restabunt quæsitorum quadratorum latera. Diuiditur autem 12. in quatuor quadratos 4. 4. $\frac{25}{9}$ $\frac{25}{9}$. quorum tres primi satis congruunt proposito, cùm quilibet excedat $2\frac{1}{4}$. Quartus verò minor est. Quare oportet rursus diuidere 12. in quatuor alios quadratos proposito satisfacientes. Sumo 3. quadrantem ipsius 12. & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{25}$. fitque quadratus $\frac{121}{225}$ à latere $\frac{11}{15}$. Ita igitur fingam quadratorum latera, vt quotlibet per adæqualitatem proximè accedat ad $\frac{11}{15}$. Et quia inuentorum latera ad eam

dem redacta denominationem sunt $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{10}{10}$. $\frac{12}{10}$. sumo differentias numeratorum à 26. & fingo latera quæsitorum quadratorum 2 − 4 N. 2 − 4 N. $\frac{1}{5}$ + 2 N. $\frac{6}{5}$ + 8 N. fitque quadratorum summa 12 + 100 Q. − $\frac{4}{5}$ N. æqualis 12. vnde fit 1 N. $\frac{60}{396}$. seu $\frac{5}{33}$. Quare latera quadratorum sunt $\frac{11}{10}$. $\frac{11}{10}$. $\frac{21}{10}$. $\frac{23}{10}$. Proinde à quolibet auferendo 1 $\frac{1}{5}$ supersunt quæsitorum quadratorum latera $\frac{6}{10}$. $\frac{6}{10}$. $\frac{16}{10}$. $\frac{18}{10}$. suntque ipsi quadrati $\frac{36}{100}$. $\frac{36}{100}$. $\frac{256}{100}$. $\frac{324}{100}$. quorum summa cum triplo summæ laterum quod est $\frac{720}{100}$. facit $\frac{1080}{360}$. seu 3.

QVÆSTIO XV.

VNITATEM diuidere in tres numeros, & addere cuilibet ipsorum alium atque alium datum numerum, & facere vnumquemque quadratum. Sunto dati 2. & 3. & 4. Rursum eò res rediit vt diuidam 10. in tres quadratos, vt primus ipsorum sit maior binario, secundus sit maior ternario, tertius sit maior quaternario. Si ergo vnitatem bifariam secantes, cuilibet datorum adiiciamus $\frac{1}{2}$. Oportebit quærere vnum quadratorum maiorem quàm 2. minorem verò quàm 2 $\frac{1}{2}$. Alterum maiorem quàm 3. minorem quàm 3 $\frac{1}{2}$. tertium denique maiorem quàm 4. minorem quàm 4 $\frac{1}{2}$. Eoque omnia deducuntur vt 10. ex duobus conflatum quadratis, rursus diuidam in alios duos, vt vnus eorum maior sit quàm 2. minor quàm 2 $\frac{1}{2}$. Et ab hoc si auferamus 2. inueniemus vnam partium vnitatis. Rursus alterum quadratorum diuidemus in alios duos quadratos, ita vt vnus ipsorum sit maior quàm 3. minor quàm 3 $\frac{1}{2}$. A quo item si detraxero 3. inueniam alterum quæsitorum. Eadem etiam ratione inueniemus tertium.

ΜΟΝΑΔΑ διελεῖν εἰς ξεῖς ἀριθμοὺς, καὶ προσθεῖναι ἑκάστῳ αὐτῶν ἄλλον καὶ ἄλλον δοθέντα, ἕκαστον τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὅτι β̄. καὶ ὁ γ̄. καὶ ὁ δ̄. καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ τὸν ῑ. διελεῖν εἰς ξεῖς τετραγώνους. ὅπως αὐτῶν ὁ μὲν πρῶτος μείζων ᾖ δυάδι. ὁ δὲ ἕτερος μείζων ᾖ τριάδος. ὁ δὲ τρίτος μείζων ᾖ μ̄ δ̄. ἐὰν οὖν τὴν μ̄ ᾱ. διχῇ τεμόντες μ̄ ᾱ. διχῇ προσθῶμεν τοῖς δοθεῖσι, ἀπὸ μονάδος ἑκάστας, γίνεται ἑκάτερον τῶν τετραγώνων. ζητοῦμεν μείζονα μὲν δυάδος, ἐλάσσονα δὲ μ̄ β̄. ᾱ ϛ̄. ἕτερον μείζονα μὲν μ̄ γ̄. ἐλάσσονα δὲ μ̄ γ̄. ᾱ ϛ̄. τὸν δὲ τρίτον μείζονα μὲν μ̄ δ̄. ἐλάσσονα δὲ μ̄ δ̄. ᾱ ϛ̄. καὶ ἀπάγεται ἅπαντα εἰς τὸ τὸν ῑ. συγκείμενον ἐκ δύο τετραγώνων μεταδιελεῖν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς αὐτῶν μείζων μὲν ᾖ μ̄ β̄. ἐλάσσων δὲ μ̄ β̄. ᾱ ϛ̄. καὶ ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφέλωμεν δυάδα, λείψομεν ἕνα τῶν ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ πάλιν τὸν ἕτερον τῶν τετραγώνων μεταδιαιρῶμεν εἰς ἑτέρους δύο τετραγώνους, ὅπως εἷς μὲν αὐτῶν μείζων ᾖ μ̄ γ̄. ἐλάσσων δὲ μ̄ γ̄. ᾱ ϛ̄. καὶ πάλιν ἐὰν ἀπὸ τούτου ἀφέλωμεν μονάδας ξεῖς, λείψομεν ἕνα τῶν ζητουμένων. ὥστε καὶ τὸν τρίτον ὁμοίως εὑρήσομεν.

IN QVAESTIONEM XV.

EX adnotatis ad duodecimam & decimam tertiam pendet quæstionis huius enodatio, & verba Diophanti satis sunt perspicua, sed totam operationem, quam ipse prætermisit, in tyronum gratiam subiicere non grauabor. Quoniam 10. diuidendus est in tres quadratos, quorum primus sit maior quàm 2. secundus quàm 3. tertius quàm 4. Diuido primum 10. in duos quadratos quorum alter cadat inter 2. & 3. id fiet per ea quæ attulimus ad duodecimam, eruntque huiusmodi quadrati $\frac{324}{441}$ & $\frac{441}{441}$ quorum latera $\frac{18}{21}$ & $\frac{21}{21}$. Habeoque iam vnum ex tribus quadratis quæsitis, puta $\frac{324}{441}$. qui maior est quàm 2. minor quàm 3. vnde si auferatur 2. remanet vna ex quæsitis partibus vnitatis, puta $\frac{162}{441}$. Restat ergo vt reliquum quadratum $\frac{441}{441}$ diuidamus in duos quadratos quorum alter cadat inter 3. & 4. Id fiet per ipsam operationem decimæ tertiæ. Quæro primum duos quadratos qui cadant inter 3. & 4. quales sunt $\frac{256}{81}$ & $\frac{324}{81}$ quorum latera $\frac{16}{9}$ & $\frac{18}{9}$. Tum posito altero quadratorum 1 Q. altero $\frac{441}{81}$ − 1 Q. posterioris latus ita fingendum est. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{18}{9}$. fingi autem debet hoc latus à $\frac{18}{9}$ minus aliquot Numeris quorum duplum ductum in $\frac{441}{81}$ & diuisum per ipsorum numerorum quadratum vnitate auctum fiet valor Numeri. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{18}{9}$ N. diuisus per 1 Q. + 1. maior quàm $\frac{16}{9}$ minor quàm $\frac{18}{9}$. Et vtraque æquatione per approximationem resoluta fiet 1 N. maior quàm $\frac{1764}{1681}$ minor quàm $\frac{1764}{1521}$. Ponatur ergo 2 $\frac{1}{41}$. & fingatur numeri $\frac{441}{441}$ − 1 Q. latus, $\frac{21}{41}$ − 2 $\frac{1}{41}$ N. fiet 1 N. $\frac{1722}{1681}$. latus scilicet primi quadrati, eritque latus secundi $\frac{1599}{1681}$. suntque ipsi quadrati $\frac{2960676}{2825761}$ & $\frac{2558401}{2825761}$. à priore

si auferas 3. A posteriore 4. remanent reliquæ partes vnitatis $\frac{1}{11}\frac{1}{11}\frac{1}{121}$ & $\frac{1}{121}\frac{1}{121}\frac{1}{121}$ quibus si addas primam iam inuentam $\frac{1}{11}$ seu vt idem sit denominator $\frac{1}{121}\frac{1}{121}\frac{1}{121}$. soluta erit quæstio.

Posset etiam aliter institui operatio, fingendo scilicet simul & semel tria latera quadratorum, eodem artificio quo iam vsi sumus ad decimam tertiam. Quoniam enim 10. diuidendus est in tres quadratos quorum primus superet 2. secundus 3. tertius 4. Diuido vnitatem in tres trientes, & cuilibet datorum numerorum addo $\frac{1}{3}$. fiuntque $2\frac{1}{3}.3\frac{1}{3}.4\frac{1}{3}$. Iam quæro partes quadrati quæ singulis additæ quadratum faciant, eæ sunt $\frac{1}{144}\frac{1}{16}\frac{1}{9}$ & fiunt quadrati $\frac{1}{144}\frac{1}{36}\frac{1}{144}$. quorum latera $\frac{1}{12}\frac{1}{6}\frac{1}{12}$ vt omnium sit idem denominator. Oportet igitur ita fingere latera quadratorum, vt primum adæquetur $\frac{1}{3}^{\text{æ}}$. secundum adæquetur $\frac{1}{6}^{\text{æ}}$. tertium adæquetur $\frac{1}{12}^{\text{æ}}$. Porrò numerus 10. diuiditur in tres quadratos, quorum latera $3.\frac{1}{4}.$ quæ vt reducantur ad eandem denominationem cum lateribus adæqualitatis, erunt hæc $\frac{12}{4}\frac{1}{4}\frac{3}{4}$. Illa verò $\frac{2}{12}\frac{1}{12}\frac{3}{12}$. Itaque fingentur per adæqualitatem latera primum $\frac{1}{3}+167$ N. secundum $\frac{1}{6}+186$ N. tertium $3-166$ N. fitque summa quadratorum $10+\frac{89710}{36}$ Q. -492 N. æqualis 10. vnde fit 1 N. $\frac{2952}{89710}$ sunt igitur quæsita latera, primum $\frac{1}{30357}$. secundum $\frac{1}{15178}$. tertium $\frac{1}{10119}$. Ipsi verò quadrati $\frac{1}{920943849}\frac{1}{230235962}\frac{1}{102326205}$. Et si auferas 2. à primo, 3. à secundo, 4. à tertio, remanent quæsitæ partes vnitatis $\frac{920943849}{920943849}\frac{230235962}{920943849}\frac{102326205}{920943849}$.

Cæterùm non est dubium, & hic requiri huiusmodi conditionem.

Oportet autem datorum numerorum summam vnitate auctam conficere numerum qui in tres quadratos diuidi possit.

Patet etiam eodem artificio quemlibet numerum diuidi posse in tres partes, ita vt cuilibet addendo alterum atque alterum numerum fiat quadratus. Et rursus tam vnitatem quàm numerum quemlibet diuidi posse in partes quotlibet, quibus addendo datos quoscunque numeros, fiant quadrati. Quæ omnia facilè mihi esset exemplis commonstrare, sed huic labori, ne sim prolixior, supersedebo.

QVÆSTIO XVI.

Τὸν ὁπηλίκον ἀριθμὸν διελεῖν εἰς ἕξεις ἀριθμούς, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. ὑπεκτάσθω δὴ τὸν ῑ. καὶ ἐπεὶ ἐν ταῖς ζητουμέναις τρισὶν ἀριθμοῖς ὁ μείζων καὶ ὁ μέσος ποιοῦσι τετράγωνον. ὁμοίως καὶ ὁ μέσος μετὰ τοῦ τρίτου ποιεῖ τετράγωνον. καὶ ὁ τρίτος μετὰ τοῦ πρώτου. εἰ ἄρα τρεῖς δὶς ληφθέντες ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μ̄ ī. ἀλλὰ δὶς οἱ τρεῖς εἰσι μ̄ κ̄. δεῖ οὖν τὸν κ̄. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ̄ ī. ὁ δὲ κ̄. σύγκειται ἐκ δύο τετραγώνων, τῶν ιϛ̄. καὶ τοῦ δ̄. καὶ ἐπὶ τάξεως ἔστω τὸ ζητούμενον μ̄ δ̄. διῃρήσθω τὸν ιϛ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ᾖ μ̄ ī. ἐμάθομεν ἤδη τὸν δοθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ὅπως ὧν τὸ αὐτὸ μείζων μὲν ᾖ μ̄ ϛ̄. ἐλάσσων δὲ μ̄ ī. ἔσεσθαι ἀμφότερα μ̄ ιϛ̄. ὥστε διῃρήσθω κ̄. εἰς τρεῖς τετραγώνους ὅπως ἕκαστον αὐτῶν ἐλάσσονα ᾖ μ̄ ī. καὶ ἐπεὶ ἕκαστον ἀφῃρήμεθα δὶς μ̄ ī. διῃρήμεθα τοὺς λοιποὺς οἳ σὺν δύο λαμβανόμενοι ποιοῦσι τετράγωνον.

DATVM numerum diuidere in tres numeros, vt bini coniuncti quadratum conficiant. Datus esto 10. Quoniam de tribus quæ quæruntur numeris maior & medius simul faciunt quadratum, sed & medius cum tertio facit quadratum, & tertius cum primo. Ergo tres bis sumpti faciunt tres quadratos, quorum quilibet minor est quam 10. Sed tres bis sumpti sunt 20. Oportet ergo diuidere 20. in tres quadratos, quorum quiuis minor sit quàm 10. Atqui 20. componitur è duobus quadratis 16. & 4. Et si de quæsitis vnum ponamus 4. oportebit diuidere 16. in duos quadratos, quorum quiuis minor sit quam 10. Didicimus autem datum quadratum diuidere in duos quadratos, vt quiuis eorum maior sit quam 6. minor quàm 10. sunto ambo simul 16. Itaque 20. diuisus erit in tres quadratos, quorum quilibet minor erit quàm 10. & si vnumquemque auferamus à denario, inueniemus reliquos, quorum bini coniuncti quadratum faciunt.

IN QVAESTIONEM XVI.

OPERATIO Diophanti facilis est, & ex dictis in præcedentibus pendet. Certum est autem cùm tres numeri sumuntur bini & bini, vnumquemque bis sumi, quare posita summa numerorum 10. necesse est summam quadratorum quos bini conficiunt esse 20. Igitur oportet diuidere 20. in

tres quadratos quorum quilibet sit minor quàm 10. tum verò singulos quadratos ab ipso 10. detrahendo, remanebunt tres quæsiti numeri, vt constat ex Canone decimæ-sextæ primi. Quoniam vero 20. diuiditur suaptè natura in duos quadratos 4. & 16. quorum primus minor est quàm 10. ac proinde congruit proposito. Restat vt diuidamus 16. in duos quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 6. quia scilicet 10. & 6. conficiunt 16. Hoc autem fiet per operationem decimætertiæ hac arte. Sumo duos quadratos inter 6. & 10. puta 9. & $\frac{49}{9}$. quorum latera 3. & $\frac{7}{3}$. Positoque altero quadratorum quæsitorum 1 Q. altero $16-1$ Q. fingo huius latus a $4-$ tot numeris, vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{7}{3}$. minor quàm 3. fiet autem valor numeri, si octuplum numeri Numerorum diuidatur per ipsorum quadratum vnitate auctum. Quare posito numero Numerorum 1 N. fiet $\frac{8\text{ N}}{1\text{ Q}+1}$. maior quàm $\frac{4}{3}$. minor quàm 3. vnde vtraque hac æquatione resoluta, inuenietur 1 N. maior quàm $\frac{7}{3}$. minor quàm $\frac{15}{7}$. ponatur $\frac{11}{5}$. Igitur quadrati $16-1$ Q. latus statuetur $4-\frac{11}{5}$. N. & fiet 1 N. $\frac{11}{10}$. latus scilicet vnius quæsitorum quadratorum, estque alterum $\frac{121}{100}$. Quamobrem tres quæsiti quadrati sunt $4.\ \frac{121}{100}.\ \frac{14641}{10000}$. quos si auferas sigillatim à denario, restant tres denarij quæsitæ partes $6\ \frac{14641}{10000}$. & $\frac{5039}{10000}$.

Hinc collige huic quoque quæstioni præscribi debere huiusmodi conditionem.

Oportet dati numeri duplum diuidi posse in tres quadratos.

Potest etiam aliter institui operatio, fingendo simul & semel trium latera quadratorum, & imitando artificium decimæquartæ hoc pacto. Quoniam 20. diuidi debet in tres quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo trientem de 20. puta 6 $\frac{2}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, hæc est $\frac{1}{100}$. sitque quadratus $\frac{121}{100}$. à latera $\frac{11}{10}$. fingenda ergo sunt latera quadratorum, vt vnumquodque adæquet $\frac{11}{10}$. Porrò numerus 20. diuiditur in tres quadratos, quorum latera 4. $\frac{1}{3}$. $\frac{7}{3}$. quæ redacta ad eandem denominationem cum numero adæqualitatis, fiunt 240. $\frac{80}{240}$. $\frac{154}{240}$. Ipse verò adæqualitatis numerus fit $\frac{2640}{240}$. Quamobrem fingentur aptè latera quadratorum $4-85$ N. $\frac{1}{3}+59$ N. $\frac{4}{9}+83$ N. estque summa quadratorum $20+17595$ Q. -292 N. æqualis 20. vnde fit 1 N. $\frac{2640}{17595}$. sunt ergo latera quadratorum $\frac{2640}{17595}$. $\frac{5280}{17595}$. & $\frac{14080}{17595}$. Ipsi quadrati $\frac{6969600}{309548025}$. $\frac{27878400}{309548025}$. & $\frac{198146560}{309548025}$. quos si auferas sigillatim à denario, remanent vtique quæsitæ denarij partes $\frac{302578425}{309548025}$. $\frac{281669625}{309548025}$. $\frac{111401465}{309548025}$.

QVÆSTIO XVII.

DATVM numerum diuidere in quatuor numeros, vt terni coniuncti quadratum faciant. Datus esto 10. Quoniam qui a primo deinceps tres iuncti faciunt quadratum, itemque tres à secundo, & tres à tertio, & tres à quarto deinceps idem præstant. Ergo quatuor numeri ter sumpti faciunt quatuor quadratos. At quatuor numeri ter sumpti faciunt 30. Ergo 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet minor sit quàm 10. Hoc autem sic inuenietur. Si per adæqualitatem statuamus quemlibet $7\frac{1}{2}$. & vnumquemque quadratorum auferamus de 10. inueniemus quæsitos. Sin autem animaduerto 30. componi ex 16. 9. 4. & 1. ponam 4. & 9. quandoquidem vterque minor sit quàm 10. si ergo 17. diuidamus in duos quadratos vt didicimus, quorum alter maior sit quàm $8\frac{1}{2}$. minor quàm 10. erit vterque ipsorum minor quàm 10. Proinde si vtrumque eorum de 10. auferamus, inueniemus reliquos de quæsitis. Nam duo iam sunt inuenti, nempe 6. & 1 & soluetur quæstio.

ΔΟΘΕΝΤΑ ἀριθμὸν διελεῖν εἰς τέσσαρας ἀριθμούς, οἱ συὼ τρεῖς λαμβανόμενοι ποιῶσι τετράγωνον. τετάχθω δὴ τὸν ῑ. ἐπεὶ οὖν οἱ ἀπὸ τῆς πρώτου τρεῖς κύβ τὸ ἐξῆς ποιοῦσι τετράγωνον. ἀλλὰ κὴ οἱ ἀπὸ τῆς δευτέρου τρεῖς, τὸ αὐτὸ ποιῶσι, κὴ οἱ ἀπὸ τῆς τρίτου τρεῖς τὸ αὐτὸ ποιῶσι. κὴ οἱ ἀπὸ τῆς τετάρτου τρεῖς. οἱ ἄρα τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι τέσσαρας τετραγώνους. ἀλλ' οἱ τέσσαρες τρὶς ποιοῦσι μ̄ λ̄ δίπλος ἄρα μ̄ λ̄. διελεῖν εἰς τέσσαρας τετραγώνους ὅπως ἕκαστος ἐλάσσων ἢ μ̄ ῑ. τοῦτο δ' οὕτως διορισθήσεται. ἐκκείσθω διὰ τῆς παρεισόπτου τάξεως· ἕκαστον αὐτῶν μ̄ ζ̄. α̅ ς̅. καὶ ἑκάστου τετραγώνου ἀφῃρήσθω ἀπὸ μ̄ ῑ. διῃρήσθω τοὺς ζητουμένους, οἱ δ' ὧν ὁμοῦ ἢ λ̄. συγκείσθωσαν ἐκ τε τοῦ ς̅. καὶ τοῦ θ̄. καὶ τοῦ δ̄. καὶ τῆς μ̄ α̅. θέσθω τὸν δ̄. καὶ τὸν θ̄. ἐπεὶοὖν ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων ὀφείλει μ̄ ῑ. λοιποὶ γίνονται μ̄ ιζ̄. διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους, ὧν ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάττων ἢ μ̄ ῑ. ἐὰν δὲ τὸν ιζ̄. διέλωσθω εἰς δύο τετραγώνους ὡς ἐνδέχεσθαι ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μ̄ π̄. α̅ ς̅. ἐλάσσονα ἢ μ̄ ῑ. ἔστω ἑκάτερος αὐτῶν ἐλάσσων μ̄. ῑ κὴ ἐπὶ ἑκάτερον αὐτῶν ἀφῃρήσθω ἀπὸ μ̄ ῑ διῃρήσθω τοὺς λοιποὺς τῶν ζητουμένων [δύο γὰρ ἤδη διῄρηται] ὧν μὲν μ̄ ς̅. ὧν δὲ μ̄ α̅. ὥστε λελύσθαι τὸ ζητούμενον.

IN QVAESTIONEM XVII.

DVPLICEM operandi modum tangit Diophantus in proposito exemplo. Primus talis est. Quoniam 30. diuidendus est in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. sumo quadrantem de 30. puta $7\frac{1}{2}$ & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{16}$. fitque quadratus $\frac{121}{16}$. à latere $\frac{11}{4}$. Curandum ergo vt diuidatur 30. in quatuor quadratos, ita vt cuiuslibet latus adæquatur $\frac{11}{4}$. Atqui 30. suaptè natura diuiditur in quatuor quadratos, quorum latera sunt 4. 3. 2. 1. Quare per adæqualitatem statuentur quæsitorum quadratorum latera $4-5$ N. $3-1$ N. $2+3$ N. $1+7$ N. eritque summa quadratorum $30+84$ Q. -20 N. æqualis 30. vnde fiet 1 N. $\frac{1}{10}$. Erunt igitur latera quadratorum $\frac{13}{10}$. $\frac{23}{10}$. $\frac{17}{10}$. $\frac{27}{10}$. Ipsi verò quadrati $\frac{169}{100}$. $\frac{529}{100}$. $\frac{289}{100}$. $\frac{729}{100}$. à quibus si auferatur sigillatim numerus 10. remanent quæsitæ denarij partes $\frac{231}{100}$. $\frac{129}{100}$. $\frac{189}{100}$. $\frac{129}{100}$.

Secundus operandi modus talis est. Quoniam 30. suapte natura diuiditur in quatuor quadratos 16. 9. 4. 1. quorum duo 9. & 4. proposito congruunt cùm sint minores denario, restat vt reliquorũ summam puta 17. diuidamus in duos alios quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 10. maior quàm 7. quod si fiet, sumo semissem de 17. puta $8\frac{1}{2}$ & quæro partem quadrati quæ illi addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{144}$ & fit quadratus $\frac{289}{144}$ à latere $\frac{17}{12}$. Quare per adæqualitatem fingentur latera quadratorum $4-13$ N. & $1+23$ N. est summa quadratorum $17+698$ Q -58 N. æqualis 17. vnde fit 1 N. $\frac{15}{349}$. Quare latera quadratorum sunt $\frac{179}{349}$ $\frac{109}{349}$. Ipsi quadrati $\frac{32041}{121801}$ & $\frac{11881}{121801}$. quibus addendo tertium & quartum 4. & 9. habemus totum 30. diuisum in quatuor quadratos, quos sigillatim auferendo à denario, remanent quæsitæ denarij partes, puta $\frac{111764}{121801}$. $\frac{112561}{121801}$. 6. & 1.

Cæterùm in textu Græco verba illa mendo non carent, ἐπὶ οὖν τὸν ιζ. διέλωμεν εἰς δύο τετραγώνους, ὡς ἐπάθομεν, ὥστε ἑκάτερον αὐτῶν μείζονα εἶναι μ̄ η̄. α̃ β̃. ἐλάσσονα δὲ μ̄ ῑ. nam si numerus η̄. α̃ β̃. hoc est $8\frac{1}{2}$ retinendus est, procul dubio non ἑκάτερον, sed ἕτερον legendum est, nam impossibile est numerum 17. diuidi in duos quadratos quorum vterque sit maior quàm $8\frac{1}{2}$ vt euidens est. Quod si vocem ἑκάτερον retinere libet, numerus η̄. α̃ ϛ̃ mutandus est in ζ seu in 7. verè enim numerus 17. diuidendus est in duos quadratos quorum vterque sit maior quàm 7. minor quàm 10. sed & postrema verba mutila erant, vt ex iis quæ adiecimus manifestum est.

Demum moneo eodem prorsus artificio datum numerum diuidi posse in quinque partes, vt quaternæ quadratum conficiant, vel in sex partes, vt quinæ quadratum faciant, & sic in infinitum. Restat vt quæstionem explicemus, quam in hunc locum reiecimus in adnotatione ad sextam tertij nimirum.

Inuenire quinque numeros quadrato æquales, vt quaterni reliquum superent quadrato numero.

Ponatur summa eorum quilibet quadratus, puta 1. Quia ergo vt ostensum est ad vigesimam primi summa excessuum tripla est summæ numerorum, erit summa excessuum 3. Oportet igitur diuidere 3. in quinque quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. Et quidem diuidendo bis vnitatem in duos quadratos, totus 3. diuisus erit in quinque quadratos, puta in $\frac{9}{25}$. $\frac{16}{25}$. $\frac{144}{625}$. $\frac{81}{625}$. 1. Sed quia quintus non est minor vnitate, adiicio eum vni priorum, puta $\frac{81}{625}$. & fit $1\frac{81}{625}$. diuidendus rursus in duos alios quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. semissis summæ est $\frac{337}{625}$. cui proximus est quadratus $\frac{361}{625}$. à latere $\frac{19}{25}$. Ita ergo diuidendus $1\frac{81}{625}$. in duos quadratos vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{19}{25}$. Quare fingentur latera quadratorum $1-3$ N. & $\frac{1}{25}+7$ N. fitque summa quadratorum $1\frac{81}{625}+58$ Q. $-\frac{6}{25}$ N. æquales $1\frac{81}{625}$. vnde fit 1 N $\frac{1}{377}$ sunt ergo latera quadratorum $\frac{151}{377}$ & $\frac{376}{377}$. ipsi quadrati $\frac{22801}{142129}$ & $\frac{141376}{142129}$ Quamobrem quinque excessus sunt $\frac{6}{377}$. $\frac{16}{377}$. $\frac{144}{142129}$. $\frac{81}{142129}$. $\frac{142129}{142129}$. quos si auferas sigillatim ab vnitate, & residuorum semisses sumas, fient quæsiti numeri $\frac{6}{377}$. $\frac{177}{377}$. $\frac{113}{377}$. $\frac{68416}{142129}$. $\frac{140513}{142129}$.

Ita si quærantur sex numeri quadrato æquales, quorum quini reliquum superent quadrato numero, ponetur summa numerorum quilibet quadratus, puta 1. Et quia excessuum summa est quadrupla summæ numerorum, diuidetur 4. in sex quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 1. quod fiet eodem prorsus artificio. Et sic ad quotlibet numeros quæstio extendetur.

Immo res extenditur, etiam si proponatur quilibet datus numerus diuidendus in quotlibet partes, vt omnium vna dempta super reliquam excessus sit quadratus numerus. Sed si tres tantùm partes postulentur, oportebit datum numerum diuidi posse in tres quadratos.

QVÆSTIO XVIII.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν τριῶν κύβος ποιῇ τὰ-

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum adsciscens quemlibet

ipsorum, faciat cubum. Statuatur summa trium 1 N. Quæsitorum autem alter 7 C. alter 26 C. tertius 63 C. & constat cubum summæ adscito quolibet ipsorum facere cubum. Reliquum est vt tres isti coniuncti faciant 1 N. sed tres coniucti faciunt 96 C. Hoc ergo æquatur 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fiunt 96 Q. æquales 1. & vnitas quidem quadratus est, ac si 96. item quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Proinde quæro vnde 96. ortus sit, est nimirum summa trium numerorum, quorum quilibet vnitate auctus cubum facit. Itaque eò res rediit vt inueniantur tres numeri, quorum quilibet vnitate adscita cubus fiat, sed & summa trium sit quadratus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. secundi verò 2 − 1 N. tertij 2. cubi fient, primus quidem 1 C. + 3 Q. + 3 N. + 1. secundus 6 Q. + 8 − 1 C. − 12 N. tertius 8. Aufero ab vnoquoque vnitatem, & statuo primum 1 C. + 3 Q. + 3 N. secundum 6 Q. + 7. − 1 C. − 12 N. tertium 7. Reliquum est vt summa eorum sit quadratus, fit autem 9 Q. + 14 − 9 N. æqualis quadrato à latere 3 N. − 4. & fit 1 N. $\frac{11}{9}$. erit igitur quæsitorum primus $\frac{1331}{1377}$. secundus $\frac{19277}{1377}$. tertius 7. Venio ad id quod initio propositum erat, & pono primum $\frac{343}{1331}$ C. secundum $\frac{48177}{1331}$ C. tertium 7 C. & rursus statuo trium summam 1 N. & fiunt $\frac{49491}{1331}$ C. æquales 1 N. & omnium decimaquinta pars sumatur, & omnia per numerum diuidantur, fiunt 2916 Q. æquales 225. & fit 1 N. $\frac{11}{9}$. Ad positiones, & constat.

βαὶν ἕκαστον, ποιῆ κύβον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῆς τριάδος ς̄ ᾱ. ἕκαστος δὲ τ̄ ζητουμένων, ὁ μὲν κύβων ζ̄. ὁ δὲ κύβων κε̄. ὁ δὲ κύβων ξγ̄. καὶ μένει ὁ ἀπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῆς τριάδος κύβος ἀφαιρεθὲν ἑκάστου αὐτῆς ποιεῖ κύβον. λοιπὸν ὅτι τὰς τρεῖς ἰσώσομεν ς̄ ᾱ. ἀλλὰ αἱ τρεῖς εἰσιν κ̄ μ̄ε̄. ὥστε κ̄ μ̄ε̄. ἴσοι ς̄ ᾱ. καὶ παντὸς ἀριθμοῦ δ̄ μ̄ε̄. ἴσαι μ̄ ᾱ. ἐὰν ἦν ὁ μονὰς τετράγωνος. εἰ ἦσαν καὶ αἱ μ̄ μ̄ε̄ τετράγωνος λελυμένων ἂν ἦν τὸ ζητούμενον. ὅθεν ζητῶ πόθεν ὅτι ὁ μ̄ε̄. ἴσαι τῇ τριάδι ἀριθμῷ τινὶ ἕκαστος μιᾶς μονάδος μιᾶς ποιεῖ κύβον. ἀπόκειται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν ἀριθμοὺς τρεῖς ὅταν ἕκαστος αὐτῶν μιᾶς μονάδος μιᾶς ποιῇ κύβον, ὅτι ἡ τοῦ συνάμφω τῆς τριάδος ἡ τετράγωνος. ἐπεὶ οὖν ὁ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ς̄ ᾱ. μ̄ ᾱ. ὁ δὲ τοῦ δευτέρου μ̄ β̄. λείψει ς̄ ᾱ. ὁ δὲ τοῦ τρίτου μ̄ β̄. οἱ κύβοι γίνονται. ὁ μὲν κ̄ ᾱ. δ̄ γ̄. ς̄ γ̄. μ̄ ᾱ. ὁ δὲ δ̄ ς̄. μ̄ η̄. λείψει κ̄ ᾱ. ς̄ ιβ̄. ὁ δὲ μ̄ η̄. αἱρεῖ ἀπὸ ἑκάστου μ̄ ᾱ. καὶ τάσσω τὸν μὲν πρῶτον. κ̄ ᾱ. δ̄ γ̄. ς̄ γ̄. τὸν δὲ δεύτερον δ̄ ς̄. μ̄ ζ̄. λείψει κ̄ ᾱ. ς̄ ιβ̄. τὸν δὲ τρίτον μ̄ ζ̄. λοιπὸν ὅτι αὐτοὺς συνταθέντας ποιεῖ τετράγωνον. γίνεται ἡ δ̄ ϝ̄. μ̄ ιδ̄ ϛ̄ ς̄ ϝ̄. ἴσαι τετραπλασίονα τῆς ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ γ̄. λείψει μ̄ δ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ β̄ ῑᵒ. ἴσαι τῇ ζητουμένων ὁ μὲν πρῶτος ἀφλη ϡπ̄ᵒ. ὁ δὲ δεύτερος ᾱ. ϡπ̄ᵒ. ὁ δὲ τρίτος ζ̄. ἔρχομαι ὅθεν τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσω τὸν μὲν κ̄ ἀφλη ϡπ̄ᵒ. ἡ ἡ κ̄ ᾱ. ϡπ̄ς. ϡπ̄ᵒ. τὸν ἡ κ̄ ζ̄. καὶ πάλιν τάσσομεν τὰς ἕξεις ς̄ ᾱ. καὶ γίνονται κύβοι σλ̄. ϡλ̄ μ̄ ϡπ̄ᵒ. ἴσοι ς̄ ᾱ. πάντων τὸ πεντεκαιδεκατὸν καὶ παντὸς ἀριθμοῦ, καὶ γίνονται δ̄ βπις̄. ἴσαι μ̄ σκᾱ. καὶ γίνονται ὁ ς̄ ιᾱ ιᾱ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XVIII.

PENDET omnino solutio quæstionis huius, à lemmate assumpto, quo scilicet quæruntur tres cubi vnitate multati, quorum summa sit quadratus numerus. Et ponit Diophantus latus primi 1 N + 1. latus secundi 2 − 1 N. vbi numeri contrario signo afficiuntur, vt etiam in cubis, numeri cuborum contrario signo reperiantur affecti, cùm hinc reperiatur + 1 C. inde verò − 1 C. vnde fit vt in summa cuborum cubis se mutuo elidentibus, remaneant solùm Quadrati, Numeri, & Vnitates; cùm autem tertij cubi latus ponatur quilibet vnitatum numerus. puta 2. eius cubus vnitate multatus, puta 7. est certus vnitatum numerus, cui additus summæ priorum cuborum vnitate multatorum, non constituit diuersam speciem, quia in illa summa, vt dictum est, reperiuntur vnitates; sic fit summa trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 14. − 9 N. quæ quadrato æquari debet. Hoc verò fieri non posset, si numerus quadratorum 9. non esset quadratus, vt euidens est, quod tamen non animaduertit Xilander. Vt ergo positiones arte certa, non casu instituantur, videndum vnde in summa cuborum contentus numerus quadratorum prouenerit. Atqui est triplum summæ vnitatum quæ ponuntur in primo & secundo latere, quia videlicet in primo latere ponitur 1

in ſecundo 2. quorum ſumma 3. cuius triplum 9. Idcirco 9 Q. reperiuntur in ſumma cuborum. Igitur cùm in primo latere ponatur 1. cuius triplum 3. oportebit in ſecundo latere conſtituere tot vnitates, quarum triplum adſumpto 3 faciat quadratum, id autem facillimè fiet, infinitiſque modis ſi à quolibet quadrato auferatur 3. & reſidui triens ſumatur, vt ſi à 9. auferas 3. reſidui triens 2. poni poterit in ſecundo latere, vt fecit Diophantus. Rurſus ſi à 36. auferas 3. reſidui triens 11. congruet propoſito, & poni poterit ſecundum latus 11 − 1 N. & ſic in infinitum. Tertius quoque cubus poni poteſt quilibet vnitatum numerus cubicus; ita ſi loco 8. quem poſuit Diophantus, ſumas 27. erit ſumma trium cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 33 − 9 N. æqualis quadrato, cuius latus ſi fingas 3 N − 6. fiet 1 N $\frac{1}{3}$. & diuerſa omnino continget ſolutio ab ea quam tradit Diophantus, quam ſanè in falſis numeris aſſignauit Xilander, in eo allucinatus quod putauit 1 N. fieri $\frac{11}{3}$. cum fiat $\frac{1}{11}$. Quare tres quæſiti numeri ſunt $\frac{1331}{35937}$. $\frac{1000}{35937}$. $\frac{1728}{35937}$. Quorum ſumma eſt $\frac{1}{11}$. cuius cubus $\frac{1}{1331}$. quo addito ad ſingulos numeros, fiunt cubi $\frac{4913}{35937}$. $\frac{2744}{35937}$. $\frac{5832}{35937}$. quorum latera $\frac{17}{33}$. $\frac{14}{33}$. $\frac{18}{33}$.

Animaduerſione præterea dignum eſt numeri 9 Q + 14 − 9 N. latus cautè fingendum eſſe. Quia enim latus ſecundi cubi poſitum eſt 2 − 1 N. neceſſe eſt 1 N. minorem eſſe quàm 2. fiet autem valor numeri fingendo latus quadrati 3 N − tot vnitatibus, quarum quadratus ſuperet 14. diuidendo harum vnitatum quadratum multatum numero 14. per ſextuplum earundem vnitatum multatum numero 9. Oportet ergo quotientem hunc minorem eſſe quàm 2. hoc eſt $\frac{9-14}{9}$ minor eſt quàm 2. & tandem 1 Q + 2 minor eſt quàm 12 N. Qua æquatione per approximationem reſoluta, fit 1 N 11 $\frac{1}{11}$. Ponetur igitur fictitium latus 3 N − tot vnitatibus quæ ſint minores quàm 11 $\frac{1}{11}$. dum earum quadratus excedat 14. Ponit Diophantus 3 N − 4. vnde fit 1 N. $\frac{5}{11}$.

Cæterùm ex ipſius operationis ductu manifeſtum eſt; quæſtionem ad quotlibet numeros extendi poſſe. Nam verbi gratia propoſitum ſit inuenire quatuor numeros, vt cubus ſummæ eorum, quouis adſumpto cubum faciat. Sanè quærendi erunt quatuor cubi, quorum vnitate multatorum ſumma ſit quadratus numerus. Ponatur primi latus 1 N. + 1. ſecundi 2 − 1 N. tertij 2. quarti 3. Erit ſumma cuborum vnitate multatorum 9 Q. + 40 − 9 N. æqualis quadrato. Quod ſi Numeri determinationem quæras inuenies fingendum latus 3 N. − tot vnitatibus quæ ſint minores quam 13 $\frac{1}{2}$. ita vt earum quadratus excedat 40. Ponantur ergo 7. & ſit latus fictitium 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{7}{11}$. Erunt igitur quatuor cubi $\frac{1344}{1331}$. $\frac{4019}{1331}$. 8. 27. & à ſingulis ſi auferas vnitatem, & apponas ſignum cuborum reſiduis, erunt quatuor quæſiti numeri $\frac{1331}{1331}$ C. $\frac{2713}{1331}$ C. 7 C. 26 C. Quorum ſumma in minimis $\frac{4096}{1331}$. C. æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{11}{16}$. Ad Poſitiones, erunt quæſiti numeri $\frac{1331}{4096}$. $\frac{2713}{4096}$. $\frac{7744}{4096}$. $\frac{17576}{4096}$. quorum ſumma vtique eſt $\frac{11}{16}$. cuius cubus $\frac{1331}{4096}$. adſcito quolibet ipſorum, cubos facit $\frac{4096}{4096}$. $\frac{6809}{4096}$. $\frac{12075}{4096}$. $\frac{21907}{4096}$. quorum latera $\frac{16}{16}$. $\frac{17}{16}$. $\frac{19}{16}$. $\frac{21}{16}$.

QVÆSTIO XIX.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμούς, ὅπως ὁ ἀπὸ τῶν συγκειμένου ἐκ τῆ τριῶν κύβος λείψας ἕκαστον ποιῇ κύβον. τετάχθωσαν πάλιν οἱ ξεῖς ς̄ ᾱ. καὶ αὐτῆ ὁ μὲν κύβων ζ̄ ᾱ. ὁ δὲ κύβων κϛ̄ ᾱ ς̄. ὁ δὲ κύβων ζϛ̄ ᾱ ῑ. λοιπὸν ὅτι τοὺς ξεῖς ἰσῶσαι ς̄ ᾱ. γίνεται κυβικὸν ἀνωζ̄ ᾱ ↓ ᾱ ῑ. ἴσον ς̄ ᾱ. πάντα δὲ ἀριθμὸν, καὶ γίνεται δύναμος ὸν ἀνωζ̄ ᾱ ↓ ᾱ ῑ. ἴσον μ̄ ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος. δεῖ δὴ καὶ τοὺς δυνάμεις εἶναι τετράγωνος. πόθεν ὅτι τὸ πλῆθος τῆ δ̄ ἐκ τοῦ ἀπὸ τριάδος ἀφαιρεῖσθαι ξεῖς κύβους, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων ἐστὶ μονάδος μιᾶς. καὶ ἀπάγει εἰς τὸ διρεῖν ξεῖς κύβους, ὅπως ἕκαστος αὐτῆ, ἐλάσσων ἢ μ̄ ᾱ. τὸ δὲ συνάμμα αὐτῶν ἀρθὲν ἀπὸ τριάδος ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν ἕκαστον αὐτῆ κύβον ἐλάσσονα ἢ μονάδος μιᾶς, ἐὰν ἅρα κατασκευάσωμεν τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς ἐλάσσονας μονάδος ᾱ. πολλαπλάσιος ἕκαστος αὐτῆ ἐλάσσων μονάδος ᾱ. ὥστε ὀφείλει ὁ καταλειπόμενος τετρά-

INVENIRE tres numeros, vt cubus ſummæ eorum, quouis ipſorum detracto, faciat cubum. Ponatur rurſus trium ſumma 1 N. & ipſi $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{64}$ C. ſupereſt vt tres coniuncti æquentur 1 N. fit ergo $\frac{1331}{1728}$ C. æquale 1 N. & omnia per numerum diuidantur, fit $\frac{1331}{1728}$ Q. æquale 1. eſt autem 1. quadratus. Oportebat ergo & numerum quadratorum eſſe quadratum: vnde autem is natus eſt? Quod à ternario ſubducti ſunt tres cubi, quorum quilibet minor eſt vnitate. Eò itaque res redit, vt inueniantur tres cubi, quorum quilibet ſit minor vnitate, ſumma autem ipſorum à ternario ſublata, faciat quadratum. Et quia volumus cuborum quemque minorem eſſe vnitate, ſi ſtatuamus tres numeros ſimul vnitate minores, multo minores ſinguli erunt vnitate. Sic autem quadratum qui relinquetur, oportebit maiorem eſſe binario. Statuatur quadratus

dratus qui relinquitur 2 $\frac{1}{2}$. Oportet igitur $\frac{1}{2}$ diuidere in tres cubos, & horum multiplicia secundum aliquos cubos diuisa. Esto secundum 216. Oportet igitur vt diuidamus 162. in tres cubos. At 162. componitur ex cubo 125. & interuallo duorum cuborum 64. & 27. Habemus autem in porismatis, omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis. Recurramus ad propositum initio, & sumamus vnumquemque cuborum inuentorum, & quolibet ab vnitate subtracto, residua statuamus pro quæsitis numeris, & sit summa 1 N. Ita fiet vt cubus summæ, quouis ipsorum detracto cubum faciat. Restat vt tres simul æquentur 1 N. fit autem trium summa 2 $\frac{1}{2}$ C. Hoc ergo æquatur 1 N. vnde fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones.

γωνος ἐλάσσων ἢ δυάδος. τετάχθω καταλειπόμενος τετράγωνος μ^{ος} β̄. ᾱ ῑ. δεῖ δὴ τὸν γ̄ ῑ. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. ἔστι δὲ τοῦτον πολλαπλάσια καὶ τῶν κύβων διαιρεθέντων. ἔστω ὁ κ̄ τὸν σπ̄. ὀφείλομεν ἄρα τὸν ρξβ̄. διελεῖν εἰς τρεῖς κύβους. συγκείται δὲ ὁ ρξβ̄. ἔκ τε κύβου τοῦ ρκ̄. καὶ δύο κύβων ὑπεροχῆς τοῦ τε ξδ̄. καὶ τοῦ ιζ̄. ἔχομεν δὲ ἐν τοῖς πορίσμασιν, ὅτι παντὸς δύο κύβων ἡ ὑπεροχὴ κ^{ος} ἀνάγραφομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν ἕκαστον κύβων διριθέντων. τοὺς δὲ τρεῖς ἀριθμοὺς ᾱ. καὶ συνιβήσεται τὸν ὑπὸ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν τελείων κύβον λείψαντα ἕκαστον, ποιεῖν κύβον. λοιπὸν ὄντι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς^{ᾳ} ᾱ. γίνονται ὁ οἱ τρεῖς κ^{οι} β̄. ᾱ ῑ. ταῦτα ἴσα ς^{ᾳ} ᾱ. ὅθεν γίνεται ὁ ς^{ος} μ^{ος} β̄ γ̄. ὅπερ τοιαύτης.

OBSERVATIO D. P. F.

Solutionis modum Diophantus non exprimit, aut græca corrupta sunt. Bachetus casu adiutum Diophantum arbitratur, quod tamen non admittimus, cum Diophanteam methodum non difficilem inuentu existimemus, inueniendus quadratus binario maior ternario minor qui à ternario subtractus relinquat numerum in tres cubos diuidendum. Ponatur quæsiti quadrati latus esse quemlibet numerorum numerum — vnitate v. g. $1\frac{1}{2}N - 1$. *ipsius quadratus à ternario subtractus relinquit* $2 - 1\frac{1}{2}Q + 2N$. *cui inueniendi tres cubi æquales qui sic effingendi vt æqualitas tandem consistat inter duas tantum species proximas, id quidem innumeris modis construi potest. Sit vnius ex cubis latus* $1 - \frac{1}{2}N$. *alterius (vt numerus numerorum in ambobus cubis conficiat* 2 N.*) sit* $1 + 1N$. *tertii latus in numeris duntaxat fingendum, qui etiam ne valor* 1 N. *quæsitos terminos enadat, debent notari signo defectus, nec est operosum eum numerum numerorum sumere cuius valor æquationem ad præstitutos redigat terminos, hoc peracto patet primum ex cubis esse minorem vnitate vt quærebamus, cum igitur secundus sit maior & tertius signo defectus notetur, patet differentiam secundi & tertij æquandam esse duobus cubis quam ob rationem ad secundam operationem & Diophantus & nos deuoluimur.*

Habemus autem, inquit, in porismatibus omnium duorum cuborum interuallum componi ex duobus cubis.

Hæret iterum Bachetus & destitutus porismatibus Diophantæis, hanc quæstionem secundam determinatione indigere contendit, duorum quippè cuborum interuallum eâ tantum conditione in duos cubos diuidere docet dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Nam quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos ignotum sibi ingenuè profitetur. Nos supra ad quæstionem libri 4. secundam, & hanc & reliquas huius materiæ quæstiones generaliter construendi modum feliciter deteximus.

IN QVAESTIONEM XIX.

HÆc propositio est de numero earum, quas vt ad nos peruenerunt, fateor me non satis assequi. Quamuis enim de illius solutione satis mihi constet, vt infrà patebit, duo tamen sunt quæ

totam eius tractationem valde imperfectam mihi videri faciunt. Primum enim licet ingeniosè inferat Diophantus inueniendos esse tres cubos, quorum quilibet sit vnitate minor, ita vt summa eorum à ternario sublata relinquat quadratum, vnde concludit curandum esse vt tres cubi simul sint vnitate minores, sic enim quilibet multo magis erit vnitate minor, quare sequitur quadratum qui relinquitur, summam cuborum auferendo à ternario, debere esse maiorem quàm 2. minorem quàm 3. licet inquam hæc subtiliter edisserat Diophantus, non docet tamen quomodo talis inueniendus sit quadratus, & cur 2 $\frac{1}{2}$. sumat potiùs quàm alium quemlibet ex infinitis qui cadunt inter 1. & 3. Certè, vt ex processu apparet, talis deligendus est quadratus, quo à ternario sublato, relinquatur numerus ex tribus cubis compositus. Id ergo qui fieri possit arte certa, docere debuit Diophantus, neque enim in promptu est si loco quadrati 2 $\frac{1}{2}$. sumatur quadratus 2 $\frac{7}{8}$. quomodo residuum de 3. puta $\frac{1}{8}$. dinidi possit in tres cubos, eademque de alijs ratio. Quamobrem casu factum videtur, vt sumpserit author 2 $\frac{1}{2}$. quo de 3. sublato relinquitur $\frac{1}{4}$. ex tribus cubis compositus.

Deinde porisma, quod hîc assumitur, quale sit non est facile diuinare, cùm Græca Diophanti hoc loco mutila sint. Si verò libeat amplecti quod nostra versione exhibemus, sanè docuimus ad secundam quarti. Duorum cuborum interuallū diuidi posse in duos cubos, dummodo maior datorum cuborum excedat duplum minoris. Sed quomodo omnium duorum cuborum interuallum diuidatur in duos cubos, ignotum mihi adhuc. Nam nec operationes loco citato allatæ, nec canon ibidem traditus locum habent, cùm duplum minoris cubi excedit maiorem. Itaque penes eruditos iudicium esto, vtrum ex propositionis huius deprauatione huiusmodi difficultates ortum habeant, an verò ipsi Diophanto imputandæ sint, qui cùm fortè quadratum 2 $\frac{1}{2}$. inuenisset quo de 3. sublato supereset $\frac{1}{4}$. compositus ex tribus cubis, arduum problema vt cumque potuit, explicauit, melioribus destitutus auxiliis. Nos quod supereset, illius solutionem afferemus à Diophanto prætermissam. Quoniam diuidere oportet $\frac{1}{4}$. in tres cubos, reducatur ad denominatiom cubicam, puta ad $\frac{64}{216}$. Itaque cùm denominator sit cubus, supereset vt numeratorem 162. diuidamus in tres cubos. Porro 162. componitur ex cubo 125. & ex 37. interuallo cuborum 27. & 64. Quare cùm duplum minoris non superet maiorem, poterit 37. diuidi in duos cubos per Canonem primæ earum quas ad secundam quarti attulimus. Quod fiet hoc pacto. Ducito ter vtrumque datorum cuborum in latus alterius, fient 324. & 576. quos diuide per summam cuborum, fiunt $\frac{324}{637}$. $\frac{576}{637}$. Tum aufer priorem à maiore latere 4. & aufer minus latus 3. à posteriore, remanent quæsitorum cuborum latera $\frac{252}{637}$. & $\frac{441}{637}$. sunt ergo cubi $\frac{15876}{405769}$. & $\frac{85766121}{405769}$. quorum summa 37. his ergo adnumerando 125. fit trium cuborum summa 162. vt ergo $\frac{162}{216}$. diuidatur in tres cubos, diuidemus sigillatim tres inuentos cubos per denominatorem 216. & fient quæsiti cubi $\frac{15876}{87528384}$. $\frac{85766121}{87528384}$. à lateribus $\frac{252}{441}$. $\frac{441}{441}$. & vnumquemque cubum auferendo ab vnitate, relinquuntur $\frac{71651508}{87528384}$. & $\frac{1762618263}{87528384}$. Statuamus igitur quæsitorum numerorum summam 1 N. ipsos autem $\frac{15876}{87528384}$ C. $\frac{85766121}{87528384}$ C. $\frac{1762618263}{87528384}$ C. nam horum vnoquoque ab 1 C. detracto, relinquitur cubus, vnus scilicet ex tribus cubis suprà allatis. Supereset vt horum summa sit 1 N. est autem 2 $\frac{1}{2}$ C. Igitur fit 1 N. $\frac{1}{2}$. cuius cubus $\frac{1}{8}$. suntque quæsiti numeri ad eandem denominationem redacti $\frac{1371708}{87528384}$. $\frac{3764616}{87528384}$. $\frac{10556001}{87528384}$. quorum summa est vtique $\frac{1}{2}$. & auferendo vnumquemque à cubo summæ hoc est à $\frac{43046721}{87528384}$. seu à $\frac{41781663}{87528384}$. relinquuntur cubi $\frac{41781663}{87528384}$. $\frac{39764805}{87528384}$. $\frac{33172383}{87528384}$. quorum latera $\frac{1161}{2916}$. $\frac{1134}{2916}$. $\frac{1029}{2916}$.

QVÆSTIO XX.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συγκειμένου ἐκ τ τειῶν κύβος ἀφῃρεῖς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ κύβον. πετάχθωσαν πάλιν οἱ τρεῖς ς^{ος} ᾱ. τῇ δὲ τειῶν ὁ μὲν α^{ος} β. ὁ δὲ χ^{ος} θ^{ος} ὁ δὲ κ^{ος} κη. λοιπὸν ἔξει τὰς τρεῖς ἰσῶσαι ς^{οις} ᾱ. ἀλλ' οἱ τρεῖ εἰσὶ κύβοι λϑ. ὥστε κ^{ος} λϑ. ἴσοι ς^{οις} ᾱ. πάντα ἐφ' ϛ^{ον}. ὥστε δυνάμεις λϑ. ἴσαι μ^{οις} ᾱ. καὶ εἰ ἦσαν αἱ δυνάμεις λϑ. τετράγωνος, λελυμένον ἂν ἦν τὸ ζητούμενον, ἔξει δὲ ὁ λϑ. τειῶν κύβων τὸ συνϑεμα μϛ μ^{ος} τειῶν. δεήσει ἄρα εὑρεῖν τρεῖς κύβους, ὧν τὸ σύνϑεμα μϛ μ^{ος} γ. ποιεῖ τετράγωνον. πετάχθω οὗ ἡ μὲν τοῦ πρώτου κύβου πλευρὰ ς^{ος} ᾱ. ἡ δὲ τοῦ δευτέρου μ^{ος} γ. λείψει ς^{οις} ᾱ. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονάδων τριῶν. ἔστω δὴ μ^{ος} ᾱ. καὶ γίνεται τὸ

INVENIRE tres numeros, vt cubus summæ eorum, à quolibet ipsorum detractus, cubum faciat. Ponatur rursus trium summa 1 N. ipsi autem 2 C. 9 C. 28 C. Reliquum est hos tres simul æquari 1 N. sed hi tres simul sunt 39 C. Igitur 39 C. æquantur 1 N. omnia per numerum diuidantur. Igitur 39 Q. æquantur 1. & si quadratorum numerus foret quadratus, soluta esset quæstio. Est autem 39. summa trium cuborum adiecto ternario. Oportet ergo inuenire tres cubos, quorum summa adiecto ternario faciat quadratum. Satuatur primi cubi latus 1 N. secundi 3 — 1 N. tertij quotlibet vnitatum,

ac sit 1. Itaque fit summa trium cuborum 9 Q. + 28 − 27 N. cui addendo 3. fit 9 Q. + 31 − 27 N. æquale quadrato à latere 3 N. − 7. & fit 1 N. $\frac{6}{9}$. Tantum est latus primi cubi, alterius verò latus est $\frac{3}{9}$. reliqui 1. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum addos 1. & venio ad propositum initio, statuo quemlibet totidem cuborum. Restat vt trium summa æquetur 1 N. fit autem summa trium 11 $\frac{25}{27}$ C. Hoc æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{1}{27}$. Ad positiones.

σύνθημα τῶν τριῶν κύβων. δεῖ δὴ. μὲ καὶ λείψει ςς̄ κζ̄. ταῦτα μ̄ μ̄ γ̄. γίνεται δὲ θ̄ μ̄ λᾱ. λείψει ςς̄ κζ̄. ἴσοι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̄ γ̄. λείψει μ̄ ζ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ς̄ᾱ. [ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ πρώτου κύβου] ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου θ̄ᾱ. ἡ δὲ τοῦ λοιποῦ μονὰς α̅. καὶ τῷ ἀπὸ ἑκάστου τούτων κύβῳ προσέθημεν μ̄ α̅. καὶ ἤρχομεν ὅθεν τὸ ὅλ ἀρχῆς. τὰ ἄρα ἕκαστον κύβων τοσοῦτον. λοιπὸν ὅτι τοὺς τρεῖς ἰσῶσαι ς̄ᾱ. γίνονται οἱ τρεῖς κ̄ιᾱ. ιδ̄ᾱ. ταῦτα ἴσοι ς̄ᾱ. ὁ γίνεται ὁ ς̄ι ιδ̄. δεῖ τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM XX.

MALE' assignat Xilander valorem Numeri $\frac{17}{9}$. cùm is sit $\frac{1}{9}$. nam à lateribus $\frac{4}{9}$ $\frac{3}{9}$ & 1. fiunt cubi $\frac{64}{729}$ $\frac{27}{729}$. & 1. quorum cuilibet si addatur vnitas, & præfigatur nota C. statuemus pro quæsitis numeris $\frac{64}{729}$ C. $\frac{27}{729}$ C. & 2 C. quorum summa fit $\frac{25}{27}$ C. æqualis 1 N. ac proinde $\frac{25}{27}$ æquatur vnitati, vnde fit 1 N. $\frac{1}{27}$. summa trium quæsitorum numerorum, suntque ipsi numeri $\frac{343}{729}$. $\frac{343}{729}$. $\frac{343}{729}$. Nam si ab vnoquoque auferatur cubus summæ, puta $\frac{125}{729}$ remanent cubi $\frac{218}{729}$. $\frac{216}{729}$. & $\frac{125}{729}$. quorum latera $\frac{6}{27}$. $\frac{3}{27}$. $\frac{1}{27}$.

Præterea in soluendo lemmate quo quæruntur tres cubi, quorum summa adsumpto 3 faciat quadratum, non benè docet Xilander cur secundi cubi latus ponatur 3 − 1 N. ait enim suspectum esse binarium, eo quod in sequente propositione, vbi lemma propositum infinitè soluitur, necesse est valorem Numeri poni maiorem binario. Hoc verò ad præsentem quæstionem nil facit, vt ex iis quæ ad sequentem dicturi sumus apparebit. Et hîc non minus suspecti sunt 4. 5. 6. aliique infiniti, quàm 2. Talis enim ponendus est in latere secundi cubi vnitatum numerus, cuius triplum sit quadratus numerus. Patet enim ex iis quæ sæpè diximus de cubi efformatione, numerum quadratorum qui in hoc cubo reperietur gigni ex 1 Q. quadrato ex − 1 N. in triplum vnitatum adiunctarum. Necesse est autem hunc quadratorum numerum esse quadratum, alioquin quomodo fingi posset latus numeri 9 Q. + 31 − 27 N. si 9. quadratorum numerus non esset quadratus? Oportet igitur vnitatum numerum qui statuitur in latere secundi cubi esse trientem alicuius quadrati, puta 3. vel 12. vel 27. & sic poterat hoc latus poni non solùm 3 − 1 N. sed etiam 12 − 1 N. vel 27. − 1 N. & sic aliis modis infinitis. Sed & in fingendo latere quadrati 9 Q. + 31 − 27 N. magna cautio est adhibenda. cum enim secundi cubi latus positum sit 3 − 1 N. cuidens est 1 N. minorem esse debere ternario. Fiet autem valor Numeri fingendo latus quadrati 3 N. − tot vnitatibus, quarum quadratus superet 31. diuidendo scilicet harum vnitatum quadratum multatum numero 31. per sextuplum earundem multatum numero 27. Quare oportet $\frac{9-31}{27}$ minorem esse ternario, vnde fit 1 Q − 31. minor quàm 18 N. − 81. & tandem 1 Q. + 50. minor quàm 18 N. Qua æquatione resoluta fit 1 N. minor quàm 14 $\frac{1}{9}$. Ponentur ergo in latere fictitio tot vnitates, vt minores sint quàm 14 $\frac{1}{9}$ dum earum quadratus excedat 31. sic posuit Diophantus 7. & finxit quadratum à latere 3 N. − 7.

Itaque tripliciter variari possunt positiones. Primò enim in latere secundi cubi poni potest quilibet vnitatum numerus qui sit triens alicuius quadrati, vt docuimus.

Secundò pro latere tertij cubi poni potest quilibet vnitatum numerus.

Denique quadrati qui fit ex summa cuborum ternario aucta, latus diuersimodè fingi potest, vt in hypothesi Diophantæa statui potest 3 N. − quotlibet vnitatibus quæ non sint minores quàm 6, nec maiores quàm 14.

Cæterùm euidens est eodem prorsus artificio quæstionem ad quotlibet numeros extendi posse. Etenim proposito sit inuenire quatuor numeros, vt cubus summæ, à quotlibet detractus, cubum relinquat. Prius ergo inuenientur quatuor cubi quorum summa quaternario aucta cubum faciat, esto primi latus 1 N. secundi 3 − 1 N. tertij 1. quarti 2. fiet summa cuborum quaternario aucta 9 Q. + 40 − 27 N. æqualis quadrato. Quod si Numeri quæras determinationem, inuenies quadrati latus fingendum 3 N. − tot vnitatibus quæ sint minores quàm 15 $\frac{1}{3}$ dum earum quadratus excedat 40. Fingatur ergo 3 N. − 7. fiet 1 N. $\frac{1}{3}$ primi scilicet cubi latus, secundi verò latus erit $\frac{11}{27}$. $\frac{2}{27}$. tertij 1. quarti 2. Porrò cuilibet cuborum ab his ortorum adiicio 1. & præfigo notam C. & statuo quæsitos numeros $\frac{125}{125}$ C. $\frac{100}{125}$ C. 2 C. 9 C. Restat vt trium summa æquetur 1 N. Igitur $\frac{676}{125}$ C. æquatur 1 N. & fit 1 N. $\frac{125}{676}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri $\frac{125}{175760}$. $\frac{100}{175760}$. $\frac{250}{175760}$. $\frac{150625}{175760}$. quorum

ſumma $\frac{1}{27}$. cuius cubum $\frac{1}{19683}$. ſi auferas à quolibet ipſorum numerorum, remanent cubi $\frac{17}{19683}$. $\frac{145}{19683}$. $\frac{1009}{19683}$. à lateribus $\frac{2}{27}$. $\frac{11}{27}$. $\frac{20}{27}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἴσους τετραγώνῳ ὅπως ὁ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τ̃ τειῶν κύβος παρασλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τιτάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν Τειῶν ἵνα ᾖ τετράγωνος. δ^{ος} ᾱ. καὶ τ̃ ζητουμένων, ὁ μὲν α^{ος} χ^{ου} γ̄. ὁ δὲ β^{ος} χ^{ου} κ^{ε} ῑ̄. ὁ δὲ γ^{ος} χ^{ου} κ^{ε} ιη̄. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τ̃ τειῶν κύβον, παρασλαβόντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τὰς τρεῖς ἰσῶσαι δ^{ει} ᾱ. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσὶ χ^{ου} κ^{ε} χ^{ε}. ταῦτα ἴσα δ^{ει} ᾱ. καὶ ταῦτα πολλ. δύναμιν ᾱ. γίνονται δ^{ες} δ^{ου} κ^{ε}. ἴσαι μ^{ου} ᾱ. καὶ ἔστιν ὁ μὲν τ̃ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. ὥστε ἄρα δ^{ες} δ^{ου} κ^{ε}. δεῖ δὲ (εἰ) τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον. γίγνεται δὲ τ̃ εἰρημένων πλῆθος τ̃ δυναμοδυναμένων, ἑκάστου Τειῶν ἀριθμοῦ, ὧν ἕκαστος μ^{ου} μ^{ε} ᾱ. ποιεῖ τετράγωνον. ἀπῆχθω οὖν εἰς τὸ διπλῆ τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος μ^{ου} μονάδος ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν Τειῶν ἡ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. τιτάχθω εἷς τ̃ ζητουμένων δ^{ος} δ^{ου} ᾱ. λείπει δ^{ου} β̄. ὁ δὲ ἕτερος δ^{ος} ᾱ. ς̃ β̄. ὁ δὲ λοιπὸς δ^{ου} ᾱ. λείπει ς̃ β̄. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν μ^{ου} μ^{ε} ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. ἔστω δὲ οἱ τρεῖς σωτηδήποτε ποιοῦντες τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον καὶ οἱ ἀορίστοις ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. ὑποκείσθω δὴ ὁ ε^{ος} μ^{ου} γ̄. ἔσται ἄρα εἷς τ̃ ζητουμένων μ^{ος} ξγ̄. ὁ δὲ δεύτερος μ^{ος} ιβ̄. ὁ δὲ τρίτος μ^{ος} γ̄. ἀναπέρχομεν δεῖ τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν πάλιν τὰς ζ̃εις δ^{ος} ᾱ. τῶν δὲ ζητουμένων ὁ μὲν ἕτερος χ^{ου} κ^{ε} ξγ̄. ὁ δὲ χ^{ου} κ^{ε} ιβ̄. ὁ δὲ χ^{ου} κ^{ε} γ̄ λοιπὸν ὅτι τὰς τρεῖς ἰσῶσαι δυνάμει μιᾷ, καὶ γίνονται κυβόκυβοι πᾶ. ἴσοι δ^{ει} ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ε^{ος} ᾱ ϡ̄ϡ̄. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres numeros quadrato æquales, vt cubus ſummæ eorum adſumens vnumquemque, faciat quadratum. Ponatur ſumma trium, vt ſit quadratus 1 Q. & eorum qui quæruntur primus 3 CC. ſecundus 8 CC. tertius 15 CC. & contingit cubum ſummæ trium quolibet ipſorum adſumpto, facere quadratum. Reſtat vt tres ſimul æquentur 1 Q. ſed tres ſimul conficiunt 26 CC. Igitur 26 CC. æquantur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt 26 QQ. æquales 1. Et vnitas quidem quadratus eſt latus habens quadratum, ergo & 26 QQ. quadratum eſſe oportet latus habentem quadratum. Atqui multitudo iſta quadratoquadratorum è tribus conflata eſt numeris, quorum quiuis adiecta vnitate facit quadratum. Ergo inueniendi ſunt tres numeri, quorum quiuis adiecta vnitate faciat quadratum, porrò ſumma trium quadratus ſit latus habens quadratum. Ponatur vnus quæſitorum 1 QQ. − 2 Q. alter 1 Q. + 2 N. reliquus 1 Q. − 2 N. & quiuis horum adſcita vnitate facit quadratum. Ac præterea trium ſumma eſt quadratus latus habens quadratum. Ita in numeris indefinitis ſoluta eſt quæſtio. Ponatur ergo 1 N. 3. Erit igitur vnus quæſitorum 63. ſecundus 15. tertius 3. Recurramus ad initio poſitum, & ponamus rurſus trium ſummam 1 Q. Quæſitorum autem primus erit 63 CC. ſecundus 15 CC. tertius 3 CC. Reſtat vt trium ſumma æquetur 1 Q. & fiunt 81 CC. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXI.

INGENIOSISSIME Diophantus ſoluit infinitè propoſitum lemma quo quæruntur tres quadrati vnitate deminuti, quorum ſumma ſit numerus quadratoquadratus. Cùm enim finxiſſet quadratum à latere 1 Q. − 1. puta 1 QQ. − 2 Q. + 1. Inde ablata vnitate ſumit 1 QQ. − 2 Q. pro primo quæſitorum. Tum verò ita ponit ſecundum & tertium, vt elidendo in additione tum quadratos, tum numeros, remaneat trium ſumma 1 QQ. Ideo formans quadratos à lateribus 1 N. + 1. & 1 N. − 1. & à ſingulis auferendo 1. ponit ſecundum 1 Q. + 2 N. tertium 1 Q. − 2 N. quorum ſumma 2 Q. qua addita primo, hoc eſt ad 1 QQ. − 2 Q. fit vtique trium ſumma 1 QQ. Itaque indefinitè ſoluta eſt quæſtio, & pro valore Numeri ſumi poteſt quilibet numerus maior quàm 2.

quia enim tertius positus est 1 Q. − 2 N. patet 1 Q. maiorem esse debere quàm 2 N. seu quod idem est 1 N. maiorem esse debere quàm 2. Hinc porrò liquet quæstionem infinitas recipere solutiones. Possunt etiam ipsæ lemmatis positiones variari vt libet, dum formetur quadratus à quolibet Quadratorum numero quadrato − 1. Verbi gratia, formetur à 4 Q. − 1. erit quadratus 16 QQ. − 8 Q. + 1. vnde ablata vnitate statuetur primus 16 QQ. − 8 Q. ac proinde secundus 4 Q. + 4 N. tertius 4 Q. − 4 N. vt sit trium summa 16 QQ.

Restat vt solutionem quæstionis proferamus quam omisit Diophantus. Inuentis numeris 63. 15. 3. soluentibus lemma propositum. Recurro ad initium & pono trium quæsitorum numerorum summam 1 Q. ipsos verò 63 C C. 15 C C. 3 C C. quorum summa fit 81 C C. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{81}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{63}{6561}$. $\frac{15}{6561}$. $\frac{3}{6561}$. quorum summa $\frac{1}{81}$ quadratus vt postulabatur, cuius cubus $\frac{1}{531441}$ quem addendo singulis numeris, fiunt quadrati $\frac{64}{6561}$. $\frac{16}{6561}$. $\frac{4}{6561}$. à lateribus $\frac{1}{81}$. $\frac{3}{81}$. $\frac{1}{81}$.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet sigillatim detracto, quadratum faciat. Rursus diuidendus est binarius vt prius. Porrò binarij cubus est 8. Proinde oportet à 8. vnumquemque detrahere, & facere quadratum. Oportet igitur 22. diuidere in tres quadratos, quorum quilibet maior sit quàm 6. Et si abs 8. quemlibet detrahamus, inueniemus tres quæsitos numeros. Est autem iam ostensum quomodo oporteat diuidere 22. in tres quadratos, quorum quilibet sit maior senario.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συγκειμένων ἐκ τῆς τειῶν κύβων βʹ λείψει ἕκαστον αὐτῶν πανὶ τετράγωνον. καὶ γίνεται ἡμῖν πάλιν τὸν βʹ διελεῖν εἰς κβ τοιούτους. καὶ ἔστι ὁ ἐκ τῆς δευτέρου μʹ ηʹ μονάδας ηʹ. δεῖ οὖν ἀπὸ μʹ ηʹ. ἀφελεῖν ἕκαστον, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. διπλῆ οὖν ἡ κβ διελεῖν εἰς ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μʹ εʹ. καὶ ἐὰν ἀπὸ μʹ ηʹ. ἀφαιρῶμεν ἕκαστον τούτων, διῃρήμεθα τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς ξεῖς. τοῦτο δὲ προδείχθη πῶς δεῖ ἡ κβ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ᾖ μʹ εʹ.

IN QVAESTIONEM XXII.

QVAM malè affectus sit hoc loco Diophantus, æquo lectori æstimandum relinquo, vbi nec solutio ponitur, nec operatio propositioni respondet, & quæstiones aliquot integras desiderari satis indicant verba illa. *Rursus diuidendus est binarius vt prius.* in qua enim superiorum quæstionum locutus est Diophantus de huiusmodi binarij diuisione? Itaque quantum certissimis coniecturis assequi possum, existimo hîc tres omnino quæstiones intercidisse, in quibus binarij diuisione vtendum fuit, & quarum cum ista magna erat affinitas, vt facilè hinc erroris ansam nactus sit imperitus librarius. Age igitur immeritò solum vertere iussas quæstiones, ab exilio reuocemus.

QVÆSTIO PRIMA.

Inueniantur tres numeri quadrato æquales, vt cubus summæ eorum singulis seorsim detractis, quadratum relinquat.

Statuatur summa numerorum 1 Q. vt sit quadratus. Ipsi vero numeri sint $\frac{1}{3}$ C C. $\frac{1}{3}$ C C $\frac{1}{12}$ C C. sic enim quolibet à cubo summæ detracto, relinquitur quadratus. Superest vt trium summa, puta $\frac{11}{12}$ C C. æquetur 1 Q. vnde tandem fit $\frac{1}{121}$ QQ. æqualis vnitati. Oporteret ergo numerum Quadratoquadratorum esse quadratum. At quadratoquadratorum numerus est summa trium numerorum, quorum quilibet ab vnitate detractus relinquit quadratum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres numeros, quorum singuli vnitate sint minores, & quorum summa sit numerus quadratoquadratus; quaque à ternario sublata relinquantur tres quadrati minores singuli vnitate. Vt ergo singuli trium numerorum sint minores vnitate, & eorum summa sit numerus Quadratoquadratus, ponatur eorum summa 1. Igitur reliquorum trium quadratorum summa erit 2. Quare superest vt diuidamus 2. in tres quadratos, quorum quilibet sit vnitate minor. Id autem facilè fit per ea quæ ostensa sunt ac decimam quartam huius, suntque huiusmodi quadrati $\frac{144}{169}$ $\frac{144}{169}$ $\frac{144}{169}$. & quolibet ab vnitate sublato, supersunt quæsiti numeri $\frac{25}{169}$. $\frac{25}{169}$. & $\frac{119}{169}$. Posita ergo summa numerorum 1 Q. ponantur ipsi numeri $\frac{25}{119}$ C C. $\frac{25}{119}$ C C. $\frac{119}{119}$ C C. Superest vt horum summa puta 1 C C. æquetur 1 Q. vnde fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri ipsi $\frac{25}{119}$. $\frac{25}{119}$. $\frac{119}{119}$.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ illorum à quolibet detractus quadratum relinquat.

Esto summa trium numerorum 1 Q. Ipsi verò sint 2 C C. 5 C C. 10 C C. vt auferendo à singulis cubum summæ, remaneant quadrati. Restat vt trium summa sit 1 Q. est autem 17 C C. ergo tandem 17 Q Q. æquantur 1. Oporteret igitur 17. esse quadratoquadratum. Atqui 17. est summa trium quadratorum vnitate auctorum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres quadratos, quorum summa ternario aucta, conficiat quadratoquadratum. Id vero nil aliud est quàm à quouis quadratoquadrato auferre ternarium, & residuum diuidere in tres quadratos. Sumatur ergo quadratoquadratus 16. cùm is ternario detracto relinquat 13. oportet diuidere 13. in tres quadratos. Sunt autem 9. $\frac{144}{121}$. $\frac{49}{121}$. quibus sigillatim addendo 1. statuemus eos in cubocubis, eritque primus quæsitorum 10 C C. secundus $\frac{41}{11}$ C C. tertius $\frac{18}{11}$. C C. Quorum summa 16 C C. æquatur 1 Q vnde fit 1 N $\frac{1}{16}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri sub eadem denominatione $\frac{1600}{256}$. $\frac{656}{256}$. $\frac{288}{256}$. quorum summa $\frac{1}{16}$. quadratus est, & eius cubus $\frac{1}{256}$. detractus à quolibet numerorum, relinquit quadratos $\frac{81}{256}$. $\frac{225}{256}$. $\frac{175}{256}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet adiecto, fiat quadratus. Sit datus numerus 2.

Oportet igitur diuidere 2. in tres partes, vt cuilibet addendo 8. fiat quadratus. Quamobrem eo res rediit vt diuidamus 26. qui fit ex triplo ipsius 8. adsumente binarium, in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 8. Hoc autem qui fieri possit iam ostensum est. Suntque tres quadrati 9. $\frac{10233441}{11316496}$. $\frac{10233616}{11316496}$. à quibus sigillatim auferendo 8. restant quæsitæ binarij partes. 1. $\frac{4521441}{11316496}$. $\frac{4521616}{11316496}$.

Sanè post hanc quæstionem, rectè subiici vigesimam secundam Diophanti, vt eam versione nostra expressimus, res ipsa clamat, cùm in ea binarius simili ratione diuidendus proponatur, additione in subtractionem mutata. Sed & numerus 22. in textu Græco manifestè habetur, quamuis deinde incuria librarij mutetur in 26. Nam Græca Diophanti verba vt habentur in codice Regio exhibuimus, quò coniectura nostra omnibus euidentior appareat, cùm ex nostra versione mendas omnes tollere facile sit. Cæterùm operatio Diophanti satis est perspicua, quia enim à cubo 8. auferendæ sunt sigillatim tres binarij partes, ita vt semper remaneat quadratus, cùm hoc idem sit atque à triplo ipsius 8. puta à 24. auferre binarium, rectè infertur numerum 22. esse diuidendum in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor autem quàm 8. Hoc vt prestem sumo trientem de 22. puta $7\frac{1}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{36}$. & fit quadratus $\frac{1225}{36}$. à latere $\frac{35}{6}$. Oportet ergo ita diuidere 22. in tres quadratos, vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{35}{6}$. Diuiditur autem suaptè natura in tres quadratos, quorum latera 3. 3. 2. Quare per adæqualitatem fingentur quæsitorum quadratorum latera $3 - 7$ N. $3 - 7$ N. $2 + 17$ N. estque summa quadratorum 22. $+ 387$ Q $- 16$ N. æqualis 22. vnde fit 1 N. $\frac{38}{387}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{1049}{387}$. $\frac{1049}{387}$. ipsi quadrati $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1100401}{149769}$. $\frac{1094416}{149769}$. quos si auferas sigillatim à 8. supersunt quæsitæ binarij partes, nimirum $\frac{97753}{149769}$. $\frac{97753}{149769}$. $\frac{100016}{149769}$.

QVÆSTIO XXIII.

Τὸ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν λείψαν τὸν ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν τεσσάρων κύβου, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ δοθὲν μόριον μ̄ α̃ δ̃. καὶ δίκην ἔστω τὸ α̃ δ̃. διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐτάχθη. ὥστε ἑνὸς ἕκαστον αὐτῶν λείψει μ̄ α̃ ἐ̃. ποιεῖν τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς λείψει μ̄ γ̃ ἐ̃. ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους. καὶ ἐπεὶ ἑκάστῳ τῶν τετραγώνων προσῆκεν μ̄ α̃ ἐ̃. διῄρησται μ̄ ἕκαστον τῶν ζητουμένων. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. ἄρχου δὲ τοῦ μ̄ ἐ̃. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπερ ὄντι ῥᾴδιον.

DATAM partem diuidere in tres partes, vt quælibet detracto cubo summæ ipsarum, faciat quadratum. Esto data pars $\frac{1}{4}$. & opus sit diuidere $\frac{1}{4}$ in tres partes, vt imperatum est. Oportet igitur quamlibet ipsarum, detracta $\frac{1}{64}$ facere quadratum. Proinde tres simul detractis $\frac{1}{64}$ faciunt tres quadratos. Et si cuiuis trium quadratorum addamus $\frac{1}{64}$. inueniemus singulos quæsitorum. Hoc autem facile est. Eo enim res rediit vt $\frac{15}{64}$ diuidamus in tres quadratos, quod est factu facile.

IN QVAESTIONEM XXIII.

HÆc quæstio non parum confirmat sententiam nostram de præcedente. Nam cùm in illa propositum sit datum numerum diuidere in tres partes, quarum quælibet à cubo summæ detracta quadratum relinquat. Hic è conuerso postulatur, vt datus numerus sic diuidatur in tres partes, vt à qualibet auferendo cubum summæ remaneat quadratus. Quia verò non potest cubus summæ esse minor qualibet partium, nisi in fractis tales numeri exhibeantur (cùm in integris quilibet cubus suo latere sit maior.) Idcirco proposuit Diophantus datam partem diuidere, non autem datum numerum. Est autem operatio facilis, & quæ ex dictis ad præcedentes nullo negotio intelligatur. Cùm enim tres partes quæsitæ simul faciant $\frac{1}{2}$. Et à singulis auferri debeat $\frac{1}{24}$. patet hoc idem esse atque si ab $\frac{1}{2}$. seu à $\frac{12}{24}$. auferantur $\frac{1}{24}$. vnde restat $\frac{11}{24}$. diuidendus in tres quadratos, quod facilè fit quia componitur ex duobus $\frac{3}{24}$. & $\frac{8}{24}$. quorum altero puta $\frac{8}{24}$. diuiso in duos quadratos $\frac{4}{100}$. & $\frac{16}{100}$. habemus totum $\frac{11}{24}$. diuisum in tres quadratos, qui sub eadem denominatione sunt $\frac{121}{2400}$. $\frac{36}{2400}$. $\frac{64}{2400}$. & si addatur singulis $\frac{1}{24}$. seu $\frac{100}{2400}$. sunt quæsiti numeri $\frac{221}{2400}$. $\frac{136}{2400}$. $\frac{164}{2400}$. quorum summa $\frac{1}{2}$. & si à quolibet auferatur $\frac{1}{24}$. remanent prius inuenti quadrati.

Porrò & hæc & præcedens, aliæque quas ad præcedentem attulimus ad quotlibet numeros extendi possunt, & omnes sub tribus vniuersalissimis propositionibus comprehendentur, nimirum.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes quarum quælibet adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Explicata est à nobis ad decimam quartam huius.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt auferendo quamlibet à dato numero, supersit quadratus. Oportet autem numerum à quo fit subtractio maiorem esse ea parte diuidendi numeri, quæ denominatur à numero multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 12. in quatuor partes, quarum quælibet detracta de 5. relinquat quadratum. Cùm ergo auferendo 12. à quadruplo ipsius 5. puta à 20. supersit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 5. Diuiditur autem 8. in duos quadratos 4. 4. quare diuiso 4. bis in duos quadratos, res expedietur. Erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{144}{169}$. $\frac{25}{169}$. $\frac{100}{169}$. $\frac{196}{169}$. quos si auferas sigillatim à quinario, remanent numeri 12. partes quatuor quæsitæ $\frac{52}{169}$. $\frac{221}{169}$. $\frac{221}{169}$. $\frac{195}{169}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt à qualibet auferendo datum numerum supersit quadratus. Oportet autem ablatitium numerum minorem esse ea parte diuidendi numeri, quam exprimit numerus multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 20. in quatuor partes, vt à qualibet auferendo 3. supersit quadratus. Quia quadruplum ipsius 3. puta 12. ablatum de 20. relinquit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos quoscunque, cuilibet addendo 3. fient quæsitæ partes numeri 20. Sumantur ergo quadrati ad præcedentem allati, & cuilibet addatur 3. fient numeri 20. quæsitæ partes $\frac{121}{169}$. $\frac{144}{169}$. $\frac{49}{169}$. $\frac{196}{169}$.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quouis ipsorum adscito quadratum faciat. Ponatur solidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum. Hoc autem peti potest à quouis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, & accipiens quadratum vnius laterum circa rectum, diuido

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν στερεὸς μετὰ μονάδος ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸς δυν α. καὶ ζητεῖσθω τρεῖς τετράγωνοι ὅπως ἑκάστου αὐτῶν μετὰ μονάδος ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, καὶ λαβὼν τὴν ἀπὸ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον μερίζω εἰς τὸν ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν· καὶ διῃρήσθω

τὰς τετραγώνους. ἵνα ὧν δ^ο ϟ^ι^ε. τὸν δὲ ἕτερον δ^ο κβ^ι^ς. τὸν δὲ τρίτον δ^ο ξδ^ι^ε. καὶ ὧν ἕκαστος αὐτῶν μϟ δ^ο α. ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν δεῖ ἡ ἐκ τ τειῶν στερεὸν ἰσῶσαι δ^ο α. γίνεται ὁ ἐκ τειῶν στερεὸς κ^ο κ^ο α. δυ^ι^ε. ν^ο. ταῦτα ἴσα δ^ο α. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μέρεσι, ἐ καθὸ δύναμιν γίνεται δ^ο δ^ο α. δυ. ν^ο. ἴσα μ^ο α. καὶ ἡ πλευρὰ τῆ πλευρᾷ γίνεται δ^ο ρκ^ε ψ^ο. ἴσα μ^ο α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος, εἰ ὧν τετράγωνος, καὶ τὰ δ^ο ρκ^ε ψ^ο. λελυμένον αὖ ὧν τὸ ζητούμενόν, οὐκ ἔστιν δέ. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δύρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ἐκ τῆ τειῶν καθ' αὐτὴ στερεὸς πολλαπλασιαθεὶς ὅτι τὸν ἐκ τ βάσεων αὐτῆ στερεὸν ποιῆ τετράγωνον. * πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῆ περὶ τὴν ὀρθὴν ἑνὸς τ ὀρθογωνίου καὶ ἐὰν πάντα πολλαπλασιασθῆ καθ' ἑ ὑπὸ τῆ περὶ τὴν ὀρθὴν τὰ δύο μέρη ὀρθογωνίου γενήσεται ὁ ὑπὸ τῆ περὶ τὴν ὀρθὴν τῆ α δ^ο ὅτι τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν τῆ ἑτέρου τῆ τειῶνων, ἐ ἐὰν τάξωμεν ἐν αὐτῆ γ. δ^ε. ε. ἀπάγεται εἰς τὸ δύρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑπὸ τῆ περὶ τὴν ὀρθὴν τῆ ὑπὸ τῆ περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ ες ιβ. ὥστε ἐ ἑκάδον ἑκάδα ιβ εἰδέα ιβ. καὶ γ. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οβ. μ. μα. τὸ δὲ ἕτερον ι. ιβ. ιγ. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσομεν τῆ ζητουμένων τειῶν τετραγώνων, ὧν μὲν θ^ο. ὧν δὲ κε. ὧν δὲ πα. καὶ ἐὰν τὸν ἐκ τῆ δ^ο. ε. στερεὸν ἰσώσωμεν δι^ο α. γενήσεται ὁ ῥητὸς, ὅτι τὰς ὑποσάσεις. *

* Legendum est 8. 15. 17.

eum per quadratum alterius laterum circa rectum, & inuenio quadratos, vnum $\frac{1}{9}$ Q. alterum $\frac{1}{25}$ Q. tertium $\frac{1}{81}$ Q. & quilibet ipsorum cum 1 Q. facit quadratum. Restat vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. Est autem solidus ille $\frac{1}{22500}$ CC. hoc æquatur 1 Q. & omnia ad eundem denominatorem reducendo, & diuidendo per 1 Q. fiunt $\frac{1}{22500}$ QQ. æqualia 1. & latus lateri æquatur, fitque $\frac{1}{150}$ Q. æquale 1. Est autem vnitas quadratus. Quod si etiam $\frac{1}{25}$ Q. quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Non est autem. Eò igitur redactus sum, vt inueniam tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub basibus faciat quadratum, * cuius latus sit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum vnius triangulorum. Et si omnia diuiserimus per productum ex lateribus circa rectum inuenti rectanguli, orietur qui sit ex producto laterum circa rectum secundi, in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et si vnum ipsorum statuamus 3. 4. 5. Eò deuentum est vt inueniantur duo triangula rectangula, vt productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa rectum sit 12 N. Proinde & area areæ 12. si autem 12. & 3. Hoc autem facile est, & est simile huic 9. 40. 41. Alterum * 5. 12. 13. Habentes ergo tria triangula rectangula, reuertamur ad initiò propositum. Et statuamus trium quæsitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. & si solidum ex his æquemus 1 Q. fiet 1 N. rationalis. Ad positiones. *

IN QVAESTIONEM XXIV.

VIX scio an elegantiora & subtiliora problemata, tribus quæ sequuntur, excogitari possint, ea tamen tam miserè corrupta sunt, vt hic omni ex parte restituere Diophantum, humani, vt arbitror, vires superet ingenij, nisi quis emendatiorem proferat codicem. Equidem satis apparet ad huius quæstionis solutionem requiri vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. At in duabus sequentibus inuenienda esse tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. Quomodo autem hæc lemmata expediat Diophantus percipere minimè potui. Quoniam verò nos ea perfectè demonstrauimus libro tertio porismatum, & reliqua Diophanti operatio perspicua est, verba illius quæ sanitati restitui poterant, reposuimus, reliqua vt erant relinquere malui, quàm in iis corrigendis diutius animum torquere. Moneo tantùm verba illa, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οϟ. μ. μα. in Vaticano codice sic haberi, ἐ ἔστιν ὅμοιον τῷ ϟ. μ. μϛ. Quam lectionem vt pote probabiliorem, sequutus sum in mea versione, verè enim numeri 9. 40. 41. constituunt triangulum rectangulum, quod non accidit ipsis 79. 40. 41.

Porrò multa sunt hic obseruatione digna. Primò, vt inueniat quadratum qui adscita vnitate faciat quadratum, sumit Diophantus latera trianguli rectanguli, & quadratum baseos diuidit per quadratum perpendiculi. Vt ex positis 3. 4. 5. diuidendo 9. per 16. fit $\frac{9}{16}$. quadratus quæsitus, nam

illi

illi addendo 1. fit $\frac{25}{16}$. item quadratus. Cuius rei causa satis est euidens. Nam quolibet numero per seipsum diuiso, quotiens est vnitas. Quare propositis quadratis 9. & 16. quorum summa quadratum facit, puta 25. si alter per alterum diuidatur vt 16. per 9. fit $\frac{9}{16}$. cui addendo $\frac{16}{16}$. seu vnitatem, quadratum fieri necesse est. Cùm enim fractiones sint eiusdem denominationis, sufficit addere numeratores, denominatore communi retento. At numeratores ex hypothesi faciunt quadratum. Quare cùm & denominator sit quadratus erit tota fractio $\frac{25}{16}$. quadratus, vt patet. Aduerte autem si velis tres diuersos quadratos, quorum singuli adscita vnitate, faciant quadratum, sumenda esse tria triangula rectangula non similia, qualia reposuimus in textu Diophanti; nam si sumantur similia triangula, & quadrati laterum homologorum diuidantur per quadratos homologorum laterum, fiet idem quotiens, vt sumptis triangulis 3. 4. 5. & 6. 8. 10. diuiso 9. per 16. & 36. per 64. æquales fiunt quotientes $\frac{9}{16}$. & $\frac{36}{64}$. Quod accidit ob similitudinem proportionum.

Secundò expositis tribus triangulis 3. 4. 5. 5. 12. 13. & 8. 15. 17. diuiduntur basium quadrati per quadratos perpendiculorum, fiuntque quadrati $\frac{9}{16}$. $\frac{144}{225}$. $\frac{64}{289}$. qui nota Q. insigniti statuuntur pro tribus quæsitis numeris, quia sic quilibet adsumens 1 Q. facit quadratum. Porro solidus sub iis contentus, fractio est, cuius numerator 14400. fit ex mutua multiplicatione numeratorum 9. 25. 64. At denominator 518400 fit ex denominatorum 16. 144. 225. mutuo ductu. Est ergo huiusmodi solidus $\frac{14400}{518400}$. Quia verò numeri ex mutua quadratorum multiplicatione orti, quadrati sunt, quorum latera fiunt ex mutuo ductu laterum quadratorum eorundem, patet 14400. esse quadratum numeri 120. qui fit ex mutuo ductu basium trium triangulorum expositorum, nempè 3. 5. 8. similiter 518400. est quadratus numeri 720. qui continetur sub perpendiculis 4. 12. 15. vnde cùm tandem $\frac{14400}{518400}$ Q. æquentur vnitati, & euidens sit vt solutio contingat rationalis oportere ipsum $\frac{14400}{518400}$. esse quadratum, hoc est 120. ad 720. rationem esse debere quæ quadrati ad quadratum: Rectè infert Diophantus rem eò deductam esse, vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub basibus ad solidum sub perpendiculis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Tertiò lemma propositum sic absoluimus propositione vndecima libri tertij porismatum. Exponatur quodlibet triangulum rectangulum 3. 4. 5. & effingantur alia duo triangula ab hypotenusa expositi trianguli, & à quolibet laterum circa rectum modo quem tradidimus quinta tertij porismatum, fiet à 5. & 4. triangulum 9. 40. 41. At verò à 5. & 3. formabitur triangulum 16. 30. 34. Tria ergo hæc triangula satisfacient proposito, nam solidus sub perpendiculis 3. 9. 16. puta 432. ad 4800. solidum sub basibus rationem habet quàm 9. ad 100. Licétque vt monuimus in scholio vndecimæ tertij porismatum, loco cuiuslibet inuentorum triangulorum, sumere aliud simile 1 vt loco ipsius 16. 30. 34. sumi potest 8. 15. 17. quod sanè cum aliis duobus propositum absoluit.

Denique his inuentis triangulis sic explicatur quæstio Diophanti, diuido quadratos basium per quadratos perpendiculorum, & quotientibus addo notam Q. fiunt quæsiti numeri $\frac{9}{16}$ Q. $\frac{144}{225}$ Q. & $\frac{64}{289}$ Q. & solidus sub iis contentus, puta $\frac{82944}{2496400}$ C C. æquatur 1 Q. & tandem $\frac{82944}{2496400}$ Q Q. æquatur 1. ac proinde & latus lateri æquale est, hoc est $\frac{288}{1580}$ Q. seu in minimis $\frac{144}{790}$. æquatur vnitati. Quare fit 1 N. $\frac{790}{144}$. sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{81}{144}$. $\frac{21316}{32400}$. $\frac{12996}{32400}$. quorum mutuo ductu fit solidus $\frac{82944}{2496400}$. cui si addantur sigillatim ipsi quadrati, fiunt rursus quadrati $\frac{32400}{144}$. $\frac{53716}{32400}$. $\frac{45396}{32400}$. quorum latera $\frac{180}{12}$. $\frac{232}{180}$. $\frac{213}{180}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Methodum Diophanti quam non percipit Bachetus ita restituo, & explico. Quoniam primum triangulum est 3. 4. 5. & rectangulum sub lateribus 12. eò deuentum est, inquit Diophantus, vt inueniantur duo triangula vt productus ex lateribus circa rectum, producti ex lateribus circa rectum sit duodecuplus (& ratio est quia tunc productum ex lateribus vnius in productum ex lateribus alterius producet numerum qui erit planus similis 12 atque ideo eorum mutuâ multiplicatione fiet quadratus, quod vult propositio) *sequitur Diophantus, proinde & area area 12. quod per se clarum est. Deinde (si autem 12 & 3) quia diuidendo 12. per quadratum 4 fit 3. & semper in multiplicatione oritur quadratum, nam quadratum diuisum per quadratum facit quadratum. Reliqua Diophanti non præstant propositum, sed ita restituemus. In hoc casu fingatur triangulum abs 7. & 2. alterum verò abs 5. & 2. & primum triangulorum erit triplum ad secundum, & duo proposito satisfacient. Regula autem generalis inueniendi duo triangula rectangula in ratione datâ hac est. Sit data ratio R. ad S. maioris ad minus, maius triangulum formabitur abs R bis + S & R. − S. Minus verò abs R. + S. bis & R. − S. aliter. Formetur primum triangulum abs R bis − S & R + S. secundum abs S bis − R. & R + S. aliter. Formetur*

primum triangulum abs R sexies Et R bis — S, secundum abs R quater + S & R quater — S. bis, aliter formetur primum triangulum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, Ex iam dictis deduci potest methodus inueniendi tria triangula rectangula in proportione trium datorum numerorum modo duo dati numeri reliqui sint quadrupli, sint v. g. dati tres numeri R S. T & sint ipsi R. T. simul quadrupli S. formabuntur sic tria triangula.

Primum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, tertium abs S quater + T & S quater — T bis. sumpsimus autem R esse maiorem T.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula rectangula numero quorum area constituant triangulum rectangulum, eò enim deducetur quaestio vt inueniatur triangulum cuius basis & hypotenusa sint quadrupla perpendiculi. Hoc autem est facile & erit triangulum simile huic 17. 15. 8 tria verò triangula sic formabuntur, primum abs 49. & 2. secundum abs 47. & 2. tertium abs 48 & 1.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula quorum areæ sint in ratione trium quadratorum datorum quorum duo sint quadrupli reliqui ac proinde poterunt eâdem viâ inueniri tria triangula eiusdem areæ.

Imò & infinitis modis possumus construere duo triangula rectangula in data ratione ducendo vnum ex terminis aut vtrumque in quadrata data &c.

QVÆSTIO XXV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐκ τούτων στερεὸς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ὑπ' αὐτῶν στερεὸς δ^υ ᾱ. καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων. ἑνὸς μὲν ις^ᾱ^ιᾱ. τοῦ δὲ ἑτέρου κε^ιξ^ιᾱ. τοῦ δὲ ξδ^ιᾱ. τάσσω αὐτοὺς ἐκ δυνάμει, καὶ μιᾷ ἡ δ^υ ᾱ λείψει ἑκάστου αὐτῶν ποιοῦσα τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τὸν ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν ἰσοῦται δυνάμει ᾱ. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸς κυβοκύβων β. ,χχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,ακῑ. ταῦτα ἴσα δυνάμει ᾱ. ἃ πάντα ὧν ἓξ δύναμιν μίαν γίνεσθαι δεῖ δ^υ β. ,χχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,ακῑ. ἵνα μ^ι ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. δύνασαι ἄρα καὶ δ^υ δ^υ β. ,χχ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,ακῑ. εἰς τετράγωνον, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ δεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐκ τῶν καθετῶν στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς εἰς ὃν τὸν ἐκ τῶν ὑποτεινουσῶν στερεὸν, ποιῇ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον, * καὶ ἵνα πάντα ὧν ἓξ βάλωμεν ὧν ἓξ τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων, δύνασαι τὴν ὑποτεινουσῶν καὶ καθέτου τῆς ὑποτεινούσης, ἃ καθέτου πολλαπλασιασθέντα καὶ τὸν ὑποτεινούσης ἃ καθέτου ὀρθογώνου τινὸς, ἔστω τὸ ὑπ' τῶν ὀρθογωνίων γ. δ^ι. ε. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τῆς ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου ἡ κ. εἰδῆ κ. καὶ ῑ. καὶ ἔσται ῥάδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ῑ. ιβ. ιη.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quolibet ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. & rursus quadrati qui quæruntur, sumantur ex triangulis rectangulis, vnus à $\frac{16}{1}$. alter à $\frac{25}{1}$. tertius à $\frac{49}{1}$. statuo eos in quadratis, & manet 1 Q. quolibet ipsorum detracto, faciens quadratum. Supereſt vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. est autem solidus ille $\frac{2}{1}$, C C. hoc ergo æquatur 1 Q & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt $\frac{2}{1}$, QQ. æqualia 1. Est autem vnitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{2}{1}$, QQ. esse quadratum latus habentem quadratum. Rursus itaque res eò est reducta vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub hypotenusis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum *. Et si omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in perpendiculum vnius rectangulorum, oportet oriatur qui fit ex producto hypotenusæ in perpendiculum, alicuius rectanguli, in productum ex hypotenusa in perpendiculum alterius, esto vnum rectangulorum 3. 4. 5. Eò itaque deuentum est, vt inueniantur duo triangula rectangula, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi,

numeri hypotenusæ & perpendiculi sit 20. si autem 20. & 5. & est facile, quippe maius est 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærenda sunt alia duo, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi sit 6. est autem maioris hypotenusa 6 $\frac{1}{2}$. perpendiculum 60. Minoris autem hypotenusa 2 $\frac{1}{2}$. qui verò in vno rectangulorum 12. & accipientes minima similium, recurrimus ad propositum initio, & ponimus solidum sub tribus contentum 1 Q. ipsorum autem quadratorum alterum 16 Q. alterum 576 Q. tertium $\frac{1}{225}$ Q. supereſt vt solidus sub tribus, æquetur 1 Q. & omnia in 1 Q. latusque lateri æquetur, & inuenietur 1 N. 65. Ad positiones. *

τὸ δὲ ἐλάττων γ̄. δ̄. ε̄. ζητητέον οὖν ἄλλους τρεῖς ἑτέρους δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ᾖ μ̄ ς̄. ἵνα ᾖ τὰ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μ̄ ς̄. ᾱ ς̄ ν̄ ᾖ καθέτος ξ̄. τῆς δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μ̄ β̄. ᾱ ς̄ ν̄ ὁ δὲ ἐν τῇ ᾱ. τὰ ὀρθογώνια ιβ̄. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τῶν ὁμοίων ἀναπέρχομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τὸ ἐν τῷ τειῶνι στερεὸν δ̄ ᾱ. αὐτῷ δὲ τῷ τετραγώνων ὧν μὲν δ̄ ις̄. ἐν δὲ δ̄ φος̄. ὧν δὲ δ̄ ᾱ. ἐν μορίῳ β̄. μϙξᾱ. λοιπὸν ὅτι τὸν ἐν τῷ τειῶνι στερεὸν ἰσῶσαι δ̄ ᾱ. ἑκάστα δὲ δύναμιν καὶ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. καὶ διορισται ὁ ς̄ ξ̄. ὅτι τὰς ὑποτάσεις. *

IN QVAESTIONEM XXV.

EODEM ferè logismo vtitur hîc Diophantus, ac in præcedente. Nam vt inueniat tres quadratos qui ab vnitate sigillatim detracti quadratum relinquant, sumit tria triangula rectangula vt prius, & diuidit quadratum perpendiculi cuiuslibet trianguli per quadratum hypotenusæ. Verbi gratia sumpto triangulo 3. 4. 5. diuidit 16. per 25. vnde fit $\frac{16}{25}$. quadratus qui ab vnitate hoc est à $\frac{16}{25}$. detractus relinquit quadratum $\frac{9}{25}$. cuius rei ratio ex adnotatis ad præcedentem satis innotescit. Hinc ergo patet solidum sub tribus huiusmodi quadratis contentum, fieri ex solido sub quadratis à tribus perpendiculis, diuiso per solidum sub quadratis à tribus hypotenusis. Quamobrem latus quadratum huiusmodi solidi constat ex solido sub ipsis perpendiculis diuiso per solidum sub hypotenusis; vt ergo latus hoc sit quadratus numerus vt requiritur, necesse est inueniri tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub hypotenusis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Quomodo autem inueniantur tria huiusmodi triangula, non satis mihi constat ex corruptissimis Diophanti verbis; sed illorum iacturam æquo animo ferre possumus, quandoquidem problema istud perfectè à nobis demonstratum est propositione decimaquarta libri tertij porismatum, vbi tradidimus illius constructionem hoc pacto. Exposito quolibet triangulo 5. 4. 3. Ita vt 8. duplum baseos sit maius perpendiculo 3. inueniatur per duodecimam tertij porismatum aliud triangulum vt planus sub perpendiculis vtriusque trianguli, superet planum sub basibus quadrato numero, erit illud 13. 5. 12. Iam à duobus triangulis 5. 4. 3. 13. 5. 12. effingatur tertium per decimam tertij porismatum. Cuius hypotenusa 65. fiet ex mutuo ductu hypotenusarum 13. & 5. Basis autem 63. erit summa productorum ex basi cuiuslibet trianguli in perpendiculum alterius. Denique perpendiculum 16. erit differentia productorum ex basi in basim, & ex perpendiculo in perpendiculum. Sic habebimus tria triangula; quæsita puta 5. 4. 3. 13. 5. 12. 65. 63. 16. Nam planus sub perpendiculis est 576. planus sub hypotenusis 4225. quorum vterque quadratus cùm sit, eorum vtique ratio est quæ quadrati ad quadratum.

Hoc expedito lemmate facilè soluitur quæstio Diophanti. Sit enim solidus sub quæsitis quadratis contentus 1 Q. Ipsi verò quadrati statuantur ij qui fiunt diuidendo quadratum perpendiculi cuiuslibet inuentorum triangulorum per quadratum hypotenusæ, puta $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{625}$ Q. $\frac{256}{625}$ Q. fitque solidus sub ipsis contentus $\frac{331776}{390625}$ CC. æqualis 1 Q. seu $\frac{331776}{390625}$ QQ æquatur 1. Quare & latus lateri, hoc est $\frac{576}{625}$ Q. æquatur 1. & fit 1 N. $\frac{49}{576}$. Ad positiones. Erunt quæsiti quadrati $\frac{144}{625}$. $\frac{81}{625}$. $\frac{1}{625}$. solidus sub iis contentus est $\frac{576}{390625}$. à quo si quilibet eorum auferatur, remanent quadrati $\frac{481}{625}$. $\frac{544}{625}$. $\frac{575}{625}$. quorum latera $\frac{19}{25}$. $\frac{23}{25}$. $\frac{24}{25}$.

OBSERVATIO D. P. F.

AD elucidationem & explicationem quæstionis 25. iuxta methodum Diophanti quam Bachetus similiter prætermisit quærenda sunt duo triangula rectangula vt productum sub hypotenusa & perpendiculo vnius ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem datam.

Quæ sanè quæstio diù nos torsit & verò difficillimam quilibet tentando experietur, sed tandem patuit generalis ad ipsius solutionem methodus.

Quarantur duo triangula vt rectangulum sub hypotenusa vnius & perpendiculo, rectanguli sub hypotenusa alterius & perpendiculo sit duplum.

Fingatur vnum ex triangulis ab A & B. alterum ab A & D. Rectangulum sub hypotenusa prioris & perpendiculo erit B in A cubum bis + B cub. in A. bis, rectangulũ verò sub hypotenusa posterioris & perpendiculo erit D. in A.C. bis + D.C. in A bis, cum igitur B in A.C. bis + B.C. in A. bis sit duplũ rectanguli D in A.C. bis + D.C. in A. bis, ergo B in A.C. + B.C. in A. æquabitur D. in A.C. bis + D.C. in A. bis & omnibus abs A diuisis fiet B in A. quadratum + B.C. æquale D. in A. Q. bis + D.C. bis & per antithesin D. C. bis — B. C. æquabitur B. in A Q. — D. in A. Q. bis, si igitur D.C. — B. bis C. diuisum per B — D bis æquetur quadrato soluta erit quæstio.

Quærendi igitur duo numeri loco ipsorum B & D eâ conditione vt duplum cubi vnius — alio diuisum vel multiplicatum (eodem enim res recidit) per duplum posterioris primo faciat quadratum, ponatur vnus esse 1 N + 1. Alter 1 cubus duplus prioris — cubo à posteriore facit 1 + 6 N + 6 q + 2 C duplus autem posterioris — priore facit 1 — 1 N. ergo si ducas 1 — 1 N in 1 + 6 N + 6 q — 2 C fiet quadratus, productũ illud æquatur 1 + 5 N — 4 C — 2 qq. Quod æquandũ quadrato ab $\frac{1}{2}$ N — 1 — $\frac{11}{2}$ q. & omnia statim constabũt, propositio autem ad omnes rationes extendetur si loco vnius ex quærendis numeris ponatur A + excessus maioris rationis termini supra minorem, & loco alterius ille ipse excessus vt iam à nobis in ratione dupla est factum. Hac quippe ratione semper vnitatum numerus euadet quadratus & æquatio erit proclinis. Hoc peracto inuenientur duo numeri qui ipsos B & D representabunt & ad primam quæstionem fiet reditus. Retractanti quæ hucusque ad 25 quæstionem scripsimus visum erat statim omnia delere quia abductio ad problema quod perfecimus non conuenit quæstioni nostræ. quia tamen quæstionem aliam ad quam malè præsens problema adduxeramus rectè construximus, non tam operam perdidimus, quam malè collocauimus, & ideo maneat scriptura marginalis intacta.

Quæstionem ipsam Diophanteam nouo iterum examini subiicientes & methodum nostram sedulò consulentes tandem generaliter soluimus. Exemplum tantum subiiciemus confisi numeros, ipsos satis indicaturos non sorti, sed arti solutionem deberi. in propositione Diophanti quarenda duo triangula rectangula ea conditione vt productum sub hypotenusa vnius & perpendiculo ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem quam 5 ad 1. En duo illa triangula, primum cuius hypotenusa 48543669109. basis 36083779309. perpendiculum 32472275580. secundum cuius hypotenusa 42636752938. basis 41990695480. perpendiculum 7394200038.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. πτάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δ^υ ᾱ. αὐτοὶ ἦ ἀφ' ὧν δηποτε τειῶν ὀρθογωνίων. καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ πρὸ ταύτης προτάσει. εἰ χρὴ λαβεῖν αὖ καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τάχα ωμῦ τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὧν μὲν * δ^υ κε̄. ὧν δὲ ᾱ^ο χκε̄. ὧν ἦ δυνάμεις α. ͵βφπδ^ε. Ϛ πάλιν ωμῦσι ὁ ἐκ τῶν ζ῾ων στερεὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν ἀπ' αὐτῶν στερεὸν ἰσῶται δυνάμει μιᾷ. ὅθεν διόρισται ὁ ς᾽ μαίζων ᾱ. Ϛ ωμῦσι. *

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, detractus ab vnoquoque ipsorum, faciat quadratum. Rursus solidus sub ipsis contentus statuatur 1 Q. ipsi autem à quibusvis rectangulis petantur. Et rursus hîc res deuoluitur ad ea quæ in præcedente fuerunt quæsita. Si igitur in hac iisdem vtamur rectangulis, & ponamus eorum qui quæruntur quadratorum * vnum 25 Q. alterum 625 Q. tertium 14784 Q. Et rursus solidus sub tribus contentus detractus à quolibet, facit quadratum. Superest vt solidus ille æquetur 1 Q. vnde inuenitur 1 N. maior quàm 8. & constat. *

IN QVAESTIONEM XXVI.

SATIS apparet ex lemmate ad præcedentem explicato pendere quæstionis huius solutionem, nam vt prius inuenienda sunt tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub perpendiculis habeat rationem quadrati ad quadratum. Et sicut ibi ponebantur quæsiti quadrati $\frac{4}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q. $\frac{1156}{1681}$ Q. ita vt auferendo quemlibet ab 1 Q. remanerent quadrati, puta $\frac{21}{25}$ Q. $\frac{25}{169}$ Q. $\frac{525}{1681}$ Q. Ita hic numeratoribus in denominatores mutatis, & è conuerso, statuuntur quæsiti quadrati $\frac{21}{25}$ Q. $\frac{169}{144}$. $\frac{1681}{1156}$ Q. vt à quotlibet auferendo 1 Q. remaneant quadrati $\frac{25}{4}$ Q. $\frac{144}{25}$ Q. $\frac{1156}{525}$ Q. sitque solidus sub tribus quæsitis contentus $\frac{1171396}{3969}$ CC. æquales 1 Q. & tandem $\frac{3969}{1171396}$ Q. æquatur vnitati. Vnde fit 1 N. $\frac{3969}{1171396}$. Sunt ergo quæsiti numeri. $\frac{63}{1082}$. $\frac{65}{1082}$. $\frac{527}{1082}$. Nam solidus sub iis contentus est $\frac{2171139}{1171396}$. quem auferendo sigillatim à quolibet ipsorum, remanent quadrati $\frac{1171396}{1171396}$. $\frac{4}{1082}$. $\frac{1171396}{1171396}$. quorum latera $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1082}$. $\frac{1}{1082}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Et quoniam quæro productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, omnia ducantur in tertium qui est quadratus. Itaque oportebit productum ex primo in secundum, ductum in tertium, hoc est solidum sub tribus contentum, cum tertio facere quadratum, sicut etiam cum primo & secundo. Id autem ante demonstrauimus. Igitur illi numeri hanc quoque soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μ̄ α̃. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μ̄ μονάδος α̃. ποιεῖ τετράγωνον. πάντα δεῖ τὸν τρίτον ὅτα τετράγωνον. ὥστε δηλονοτὶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου δεῖ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸν ἐπὶ τ̄ τριῶν σιμὸν μ̄ τῷ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ὡς ἢ μ̄ τῷ πρώτου καὶ δευτέρου, τοῦτο γὰρ προδέδειξαμεν. ὥστε ἰκανοὶ οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο τὸ ζητημα.

IN QVAESTIONEM XXVII.

REFERTVR hæc propositio ad vigesimam quartam, & iidem prorsus numeri vtramque quæstionem soluunt, vt rectè infert Diophantus, quod tamen vt euidentius fiat; sic demonstro. A $\frac{1}{4}$. B $\frac{4}{15}$. C $\frac{225}{176}$. D $\frac{15}{64}$. G $\frac{225}{64}$. Sint tres quadrati A B C. soluentes vigesimam quartam, ita vt solidus sub ipsis contentus quolibet adiecto quadratum faciat; dico eum qui fit à duobus quibuslibet addita vnitate fore quadratum. Ducto enim A in B fiat D. cui addita vnitate fiat G. probandum est G esse quadratum. Itaque quia ex hypothesi ducto D in C. & producto addendo ipsum C. fit quadratus. At ducere D in C & producto addere C. idem est atque ducere C in numerum vnitate maiorem ipso D, hoc est in ipsum G, sequitur ex C in G. fieri quadratum. ' Ergo C & G sunt plani similes. ' Quare cùm C. sit quadratus ex hypothesi, oportet & ipsum G quadratum esse. Quod demonstrandum erat. 4. noni. 24. octaui.

Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{1}{4}$. $\frac{4}{15}$. $\frac{225}{176}$. Nam ex binorum mutuo ductu fiunt numeri $\frac{1}{15}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{225}{120}$ quibus addendo sigillatim vnitatem, fiunt quadrati $\frac{289}{225}$. $\frac{9}{8}$. $\frac{361}{225}$. quorum latera sunt $\frac{17}{15}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{19}{15}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE tres quadratos vt productus ex binorum multiplicatione detracta vnitate, faciat quadratum. Omnia in tertium. Itaque productus ex primo in secundum ductus in tertium, hoc est solidus sub tribus contentus, detracto tertio quadratum facit 1 sicut & idem solidus sub tribus contentus, facit quadratum detracto secundo & tertio. Hoc autem supra demonstratum est. Igitur illi numeri hoc quoque præstant.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μ̄ α̃. ποιῇ τετράγωνον πάντα δεῖ τὸν τρίτον. ὥστε ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου δεῖ τὸν τρίτον τουτέστι ὁ ἐπὶ τ̄ τριῶν σιμὸς λείψας τὸν τρίτον ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε καὶ ἐκάτερον τὸν τε πρώτου καὶ τὸν δευτέρου λείψας ὁ ἐπὶ τ̄ τριῶν σιμὸς ποιεῖ τετράγωνον. τοῦτο ἢ προδέδειχται. ἱκανοὶ οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο.

summa $\frac{1}{3}$. cuius cubum $\frac{1}{27}$. si auferas à quolibet ipsorum numerorum, remanent cubi $\frac{37}{3375}$. $\frac{331}{3375}$. $\frac{1000}{3375}$. à lateribus $\frac{2}{15}$. $\frac{11}{15}$. $\frac{12}{15}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς ἀριθμοὺς ἵνα τετραγώνῳ ὄντας ὁ ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τῶ τριῶν κύβος τοσοσλαβὼν ἕκαστον ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ συγκείμενος ἐκ τῆ Τριάδι ἵνα ᾖ τετράγωνος. Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. καὶ τῶ ζητουμένων, ὁ μὲν $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\gamma}$. ὁ δὲ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\iota\eta}$. ὁ δὲ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\iota\theta}$. καὶ συμβαίνει τὸν ἀπὸ τῆ συγκειμένου ἐκ τῶ τριῶν κύβον, τοσοσλαβόντα ἕκαστον ποιεῖν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τοὺς τρεῖς ἴσους Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. ἀλλὰ οἱ τρεῖς εἰσὶ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\kappa\varepsilon}$. ταῦτα ἴσα Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. καὶ πάντα ἀπὸ Δύναμιν $\bar{\alpha}$. γίνονται Δ^{υ} Δ^{υ} $\bar{\kappa\varepsilon}$. ἴσαι μ^{υ} $\bar{\alpha}$. καὶ ἔστι ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. ὥστε ἄρα Δ^{υ} Δ^{υ} $\bar{\kappa\varepsilon}$. δυνατὸν δὴ τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον. γίγνεται δὲ τῶ εἰρημένων πλήθος τῶ δυναμοδυνάμεων, ἐξ ἑνὸς τελείων ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος $\mu\bar{\eta}$ μ^{υ} $\bar{\alpha}$. ποιεῖ τετράγωνον. ἀπλῶς οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ἕκαστος $\mu\bar{\eta}$ μονάδος $\bar{\alpha}$. ποιῇ τετράγωνον. ἔστι δὲ ὁ συγκείμενος ἐκ τῆ Τριάδι ἢ τετράγωνος πλευρὰν ἔχων τετράγωνον. τετάχθω εἰς τῶ ζητουμένων Δ^{υ} Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. λεῖψει Δ^{υ} $\bar{\beta}$. ὁ δὲ ἕτερος Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. ις $\bar{\beta}$. ὁ δὲ λοιπὸς Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. λείψει ις $\bar{\beta}$. καὶ μένει ἕκαστος αὐτῶν $\mu\bar{\eta}$ μ^{υ} $\bar{\alpha}$. ποιῶν τετράγωνον. ἔστι δὲ οἱ τρεῖς συντιθέντες ποιῶν τετράγωνον πλευρὰν ἔχοντα τετράγωνον καὶ οἱ ἀορίστως ἀριθμοῖς λέλυται τὸ ζητούμενον. ὑποκείσθω δὴ ὁ ς μ^{υ} $\bar{\gamma}$. ἔσται ἄρα εἷς τῶ ζητουμένων μ^{υ} $\bar{\xi\gamma}$. ὁ δὲ Δεύτερος μ^{υ} $\bar{\iota\beta}$. ὁ δὲ τρίτος μ^{υ} $\bar{\gamma}$. ἀναπέχουσι ὅτι τὸ ἀπ' ἀρχῆς, καὶ τάσσουσι πάλιν τοὺς τρεῖς Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. τῶ δὲ ζητουμένων ὁ μὲν ἴσται $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\xi\gamma}$. ὁ δὲ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\iota\beta}$. ὁ δὲ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\alpha}^{\upsilon}$ $\bar{\gamma}$ λοιπὸν ὅτι τοὺς τρεῖς ἰσοῦται Δυνάμει μιᾷ, καὶ γίνονται κυβόκυβοι πᾶ. ἴσοι Δ^{υ} $\bar{\alpha}$. καὶ γίνεται ὁ ς $\bar{\alpha}$ $\bar{\gamma}^{\upsilon}$. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ eorum adsumens vnumquemque, faciat quadratum. Ponatur summa trium, vt sit quadratus 1 Q. & eorum qui quæruntur primus 3 CC. secundus 8 CC. tertius 15 CC. & contingit cubum summæ trium quolibet ipsorum adsumpto, facere quadratum. Restat vt tres simul æquentur 1 Q. sed tres simul conficiunt 26 CC. Igitur 26 CC. æquantur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt 26 QQ. æquales 1. Et vnitas quidem quadratus est latus habens quadratum, ergo & 26 QQ. quadratum esse oportet latus habentem quadratum. Atqui multitudo ista quadratoquadratorum è tribus conflata est numeris, quorum quiuis adiecta vnitate facit quadratum. Ergo inueniendi sunt tres numeri, quorum quiuis adiecta vnitate faciat quadratum, porrò summa trium quadratus sit latus habens quadratum. Ponatur vnus quæsitorum 1 QQ. − 2 Q. alter 1 Q. + 2 N. reliquus 1 Q. − 2 N. & quiuis horum adscita vnitate facit quadratum. Ac præterea trium summa est quadratus latus habens quadratum. Ita in numeris indefinitis soluta est quæstio. Ponatur ergo 1 N. 3. Erit igitur vnus quæsitorum 63. secundus 15. tertius 3. Recurramus ad initio propositum, & ponamus rursus trium summam 1 Q. Quæsitorum autem primus erit 63 CC. secundus 15 CC. tertius 3 CC. Restat vt trium summa æquetur 1 Q. & fiunt 81 CC. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$. Reliqua patent.

IN QVAESTIONEM XXI.

INGENIOSISSIME Diophantus soluit infinitè propositum lemma quo quæruntur tres quadrati vnitate deminuti, quorum summa sit numerus quadratoquadratus. Cùm enim finxisset quadratum à latere 1 Q. − 1. puta 1 QQ. − 2 Q. + 1. Inde ablata vnitate sumit 1 QQ. − 2 Q. pro primo quæsitorum. Tum verò ita ponit secundum & tertium, vt elidendo in additione tum quadratos, tum numeros, remaneat trium summa 1 QQ. Ideo formans quadratos à lateribus 1 N. + 1. & 1 N. − 1. & à singulis auferendo 1. ponit secundum 1 Q. + 2 N. tertium 1 Q. − 2 N. quorum summa 2 Q. qua addita primo, hoc est ad 1 QQ. − 2 Q. fit vtique trium summa 1 QQ. Itaque indefinitè soluta est quæstio, & pro valore Numeri sumi potest quilibet numerus maior quàm 2.

quia enim tertius positus est 1 Q. − 2 N. patet 1 Q. maiorem esse debere quàm 2 N. seu quod idem est 1 N. maiorem esse debere quàm 2. Hinc porrò liquet quæstionem infinitas recipere solutiones. Possunt etiam ipsæ lemmatis positiones variari vt libet, dum formetur quadratus à quolibet Quadratorum numero quadrato − 1. Verbi gratia, formetur à 4 Q. − 1. erit quadratus 16 QQ. − 8 Q. + 1. vnde ablata vnitate statuetur primus 16 QQ. − 8 Q. ac proinde secundus 4 Q. + 4 N. tertius 4 Q. − 4 N. vt sit trium summa 16 QQ.

Restat vt solutionem quæstionis proferamus quam omisit Diophantus. Inuentis numeris 63. 15. 3. soluentibus lemma propositum. Recurro ad initium & pono trium quæsitorum numerorum summam 1 Q. ipsos verò 63 C C. 15 C C. 3 CC. quorum summa sit 81 C C. æqualis 1 Q. vnde fit 1 N. $\frac{1}{81}$. sunt ergo quæsiti numeri $\frac{63}{81}$. $\frac{15}{81}$. $\frac{3}{81}$. quorum summa $\frac{1}{3}$ quadratus vt postulabatur, cuius cubus $\frac{1}{27}$, quem addendo singulis numeris, fiunt quadrati $\frac{64}{81}$. $\frac{16}{81}$. $\frac{4}{81}$. à lateribus $\frac{8}{9}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{2}{9}$.

QVÆSTIO XXII.

INVENIRE tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet sigillatim detracto, quadratum faciat. Rursus diuidendus est binarius vt prius. Porrò binarij cubus est 8. Proinde oportet à 8. vnumquemque detrahere, & facere quadratum. Oportet igitur 22. diuidere in tres quadratos, quorum quilibet maior sit quàm 6. Et si abs 8. quemlibet detrahamus, inueniemus tres quæsitos numeros. Est autem iam ostensum quomodo oporteat diuidere 22. in tres quadratos, quorum quilibet sit maior senario.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς ἀριθμὸς, ἴσους τετραγώνῳ, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς συγκειμένων ἐκ τῆς τειδὴν κύβων β λείπει ἕκαστον αὐτῶν πυῆ τετράγωνον. καὶ γίνεται πάλιν τὸν β διελεῖν εἰς κ᾽ ἀφαίρεσιν. κ᾽ ἔστι ὁ ἐκ τῆ δευτέρου μ᾽ κ᾽ μοναδας π. δεῖ οὖν ἀπὸ μ᾽ π. ἀφιλεῖν ἕκαστον, καὶ πλευρὰν τετράγωνον. διήσθω οὖν ἡ κβ διελεῖν εἰς ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ἢ μ᾽ ϛ᾽. κ᾽ ἐστὶν ἀπὸ μ᾽ π᾽. ἀφαιρῶ ἕκαστον τούτων, διῃρήσω τὰς ζητουμένους ἀριθμὰς ξεῖς. τοῦτο δὲ ἀφορισθήπως δεῖ τὴν κβ διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους, ὅπως ἕκαστος αὐτῶν μείζων ἢ μ᾽ ϛ᾽.

IN QVAESTIONEM XXII.

QVAM malè affectus sit hoc loco Diophantus, æquo lectori æstimandum relinquo, vbi nec solutio ponitur, nec operatio propositioni respondet, & quæstiones aliquot integras desiderari satis indicant verba illa. *Rursus diuidendus est binarius vt prius.* in qua enim superiorum quæstionum locutus est Diophantus de huiusmodi binarij diuisione? Itaque quantum certissimis coniecturis assequi possum, existimo hîc tres omnino quæstiones intercidisse, in quibus binarij diuisione vtendum fuit, & quarum cum ista magna erat affinitas, vt facilè hinc erroris ansam nactus sit imperitus librarius. Age igitur immeritò solum vertere iussas quæstiones, ab exilio reuocemus.

QVÆSTIO PRIMA.

Inueniantur tres numeri quadrato æquales, vt cubus summæ eorum singulis seorsim detractis, quadratum relinquat.

Statuatur summa numerorum 1 Q. vt sit quadratus. Ipsi vero numeri sint $\frac{1}{3}$ C C. $\frac{1}{6}$ C C $\frac{1}{12}$ C C. sic enim quolibet à cubo summæ detracto, relinquitur quadratus. Superest vt trium summa, puta $\frac{7}{12}$ C C. æquetur 1 Q. vnde tandem fit $\frac{12}{7}$ QQ. æqualis vnitati. Oporteret ergo numerum Quadratoquadratorum esse quadratum. At quadratoquadratorum numerus est summa trium numerorum, quorum quilibet ab vnitate detractus relinquit quadratum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres numeros, quorum singuli vnitate sint minores, & quorum summa sit numerus quadratoquadratus; quaque à ternario sublata relinquantur tres quadrati minores singuli vnitate. Vt ergo singuli trium numerorum sint minores vnitate, & eorum summa sit numerus Quadratoquadratus, ponatur eorum summa 1. Igitur reliquorum trium quadratorum summa erit 2. Quare superest vt diuidamus 2. in tres quadratos, quorum quilibet sit vnitate minor. Id autem facilè fit per ea quæ ostensa sunt ac decimam quartam huius, suntque huiusmodi quadrati $\frac{144}{169}$ $\frac{121}{169}$ $\frac{25}{169}$. & quolibet ab vnitate sublato, supersunt quæsiti numeri $\frac{25}{169}$. $\frac{48}{169}$. & $\frac{120}{169}$. Posita ergo summa numerorum 1 Q. ponantur ipsi numeri $\frac{25}{169}$ C C. $\frac{1152}{28561}$ C C. $\frac{2880}{28561}$ CC. Superest vt horum summa puta 1 C C. æquetur 1 Q. vnde fit 1 N. 1. suntque quæsiti numeri ipsi $\frac{25}{169}$. $\frac{1152}{28561}$. $\frac{2880}{28561}$.

QVÆSTIO SECVNDA.

Inuenire tres numeros quadrato æquales, vt cubus summæ illorum à quolibet detractus quadratum relinquat.

Esto summa trium numerorum 1 Q. Ipsi verò sint 2 C C. 5 C C. 10 C C. vt auferendo à singulis cubum summæ, remaneant quadrati. Restat vt trium summa sit 1 Q. est autem 17 C C. ergo tandem 17 Q Q. æquantur 1. Oporteret igitur 17. esse quadratoquadratum. Atqui 17. est summa trium quadratorum vnitate auctorum. Eò itaque redacti sumus vt inueniamus tres quadratos, quorum summa ternario aucta, conficiat quadratoquadratum. Id vero nil aliud est quàm à quouis quadratoquadrato auferre ternarium, & residuum diuidere in tres quadratos. Sumatur ergo quadratoquadratus 16. cùm is ternario detracto relinquat 13. oportet diuidere 13. in tres quadratos. Sunt autem 9. $\frac{36}{289}$. $\frac{64}{289}$. quibus sigillatim addendo 1. statuemus eos in cubocubis, eritque primus quæsitorum 10 C C. secundus $\frac{11}{17}$ C C. tertius $\frac{15}{17}$. C C. Quorum summa 16 C C. æquatur 1 Q vnde fit 1 N $\frac{1}{4}$. Ad positiones. Erunt quæsiti numeri sub eadem denominatione $\frac{400}{1600}$. $\frac{484}{1600}$. $\frac{900}{1600}$. quorum summa $\frac{1}{4}$. quadratus est, & eius cubus $\frac{1}{64}$. detractus à quolibet numerorum, reliquit quadratos $\frac{9}{64}$. $\frac{25}{64}$. $\frac{49}{64}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Inuenire tres numeros dato numero æquales, vt cubus summæ eorum, quolibet adiecto, fiat quadratus. Sit datus numerus 2.

Oportet igitur diuidere 2. in tres partes, vt cuilibet addendo 8. fiat quadratus. Quamobrem eo res rediit vt diuidamus 26. qui fit ex triplo ipsius 8. adsumente binarium, in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 8. Hoc autem qui fieri possit iam ostensum est. Suntque tres quadrati 9. $\frac{1681}{1156}$. $\frac{2025}{1156}$. à quibus sigillatim auferendo 8. restant quæsitæ binarij partes. 1. $\frac{625}{1156}$. $\frac{169}{1156}$.

Sanè post hanc quæstionem, rectè subiici vigesimam secundam Diophanti, vt eam versione nostra expressimus, res ipsa clamat, cùm in ea binarius simili ratione diuidendus proponatur, additione in subtractionem mutata. Sed & numerus 22. in textu Græco manifestè habetur, quamuis deinde incuria librarij mutetur in 26. Nam Græca Diophanti verba vt habentur in codice Regio exhibuimus, quô coniectura nostra omnibus euidentior appareat, cùm ex nostra versione mendas omnes tollere facile sit. Cæterùm operatio Diophanti satis est perspicua, quia enim à cubo 8. auferendæ sunt sigillatim tres binarij partes, ita vt semper remaneat quadratus, cùm hoc idem sit atque à triplo ipsius 8. puta à 24. auferre binarium, rectè infertur numerum 22. esse diuidendum in tres quadratos, quorum quilibet sit maior quàm 6. minor autem quàm 8. Hoc vt prestem sumo trientem de 22. puta $7\frac{1}{3}$. & quæro partem quadrati quæ huic addita quadratum faciat, ea est $\frac{1}{36}$. & fit quadratus $\frac{841}{144}$. à latere $\frac{29}{12}$. Oportet ergo ita diuidere 22. in tres quadratos, vt cuiuslibet latus adæquetur $\frac{29}{12}$. Diuiditur autem suaptè natura in tres quadratos, quorum latera 3. 3. 2. Quare per adæqualitatem fingentur quæsitorum quadratorum latera 3 − 7 N. 3 − 7 N. 2 + 17 N. estque summa quadratorum 22. + 387 Q − 16 N. æqualis 22. vnde fit 1 N. $\frac{16}{387}$. sunt ergo quadratorum latera $\frac{1600}{149769}$. $\frac{1600}{149769}$. ipsi quadrati $\frac{1600}{149769}$. $\frac{1600}{149769}$. $\frac{1024}{149769}$. quos si auferas sigillatim à 8. supersunt quæsitæ binarij partes, nimirum $\frac{97753}{149769}$. $\frac{97753}{149769}$. $\frac{104345}{149769}$.

QVÆSTIO XXIII.

Τὸ δοθὲν μόριον διελεῖν εἰς τρία μόρια, ὅπως ἕκαστον αὐτῶν λείψαν τὸν ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν τετρα γώνων, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ δοθὲν μόριον μ̄ α̃ δ̃. καὶ δίον ἔστω τὸ ᾱ δ̃. διελεῖν εἰς τρία μόρια καθὼς ἐτάχθη. ὥστε δίνα ἕκαστον αὐτῶν λείψει μ̄ ᾱ δ̃. ποιεῖν τετράγωνον. οἱ ἄρα τρεῖς λείψει μ̄ γ̄ δ̃. ποιοῦσι τρεῖς τετραγώνους. καὶ ἐπεὶ ἑκάστῳ τῶν τετραγώνων προστίθημι ᾱ δ̃. δύνησόμεθα ἕκαστον τῶν ζητουμένων. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον. ὄντος δὲ τοῦ μ̄ δ̃. διελεῖν εἰς τρεῖς τετραγώνους. ὅπερ ὄντι ῥᾴδιον.

DATAM partem diuidere in tres partes, vt quælibet detracto cubo summæ ipsarum, faciat quadratum. Esto data pars $\frac{1}{4}$. & opus sit diuidere $\frac{1}{4}$ in tres partes, vt imperatum est. Oportet igitur quamlibet ipsarum, detracta $\frac{1}{64}$ facere quadratum. Proinde tres simul detractis $\frac{1}{64}$ faciunt tres quadratos. Et si cuiuis trium quadratorum addamus $\frac{1}{64}$. inueniemus singulos quæsitorum. Hoc autem facile est. Eo enim res rediit vt $\frac{1}{64}$ diuidamus in tres quadratos, quod est factu facile.

IN QVAESTIONEM XXIII.

HÆC quæstio non parum confirmat sententiam nostram de præcedente. Nam cùm in illa propositum sit datum numerum diuidere in tres partes, quarum quælibet à cubo summæ detracta quadratum relinquat. Hic è conuerso postulatur, vt datus numerus sic diuidatur in tres partes, vt à qualibet auferendo cubum summæ remaneat quadratus. Quia verò non potest cubus summæ esse minor qualibet partium, nisi in fractis tales numeri exhibeantur (cùm in integris quilibet cubus suo latere sit maior.) Idcirco proposuit Diophantus datam partem diuidere, non autem datum numerum. Est autem operatio facilis, & quæ ex dictis ad præcedentes nullo negotio intelligatur. Cum enim tres partes quæsitæ simul faciant $\frac{1}{2}$. Et à singulis auferri debeat $\frac{1}{20}$. patet hoc idem esse atque si ab $\frac{1}{2}$. seu à $\frac{10}{20}$. auferantur $\frac{1}{20}$. vnde restat $\frac{9}{20}$. diuidendus in tres quadratos, quod facilè fit quia componitur ex duobus $\frac{4}{20}$. & $\frac{5}{20}$. quorum altero puta $\frac{4}{20}$. diuiso in duos quadratos $\frac{1}{25}$. & $\frac{4}{25}$. habemus totum $\frac{9}{20}$. diuisum in tres quadratos, qui sub eadem denominatione sunt $\frac{225}{1000}$. $\frac{144}{1000}$. $\frac{400}{1000}$. & si addatur singulis $\frac{1}{20}$. seu $\frac{25}{1000}$. sunt quæsiti numeri $\frac{250}{1000}$. $\frac{169}{1000}$. $\frac{425}{1000}$. quorum summa $\frac{1}{2}$. & si à quolibet auferatur $\frac{1}{20}$. remanent prius inuenti quadrati.

Porrò & hæc & præcedens, aliæque quas ad præcedentem attulimus ad quotlibet numeros extendi possunt, & omnes sub tribus vniuersalissimis propositionibus comprehendentur, nimirum.

QVÆSTIO PRIMA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes quarum quælibet adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Explicata est à nobis ad decimam quartam huius.

QVÆSTIO SECVNDA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt auferendo quamlibet à dato numero, supersit quadratus. Oportet autem numerum à quo fit subtractio maiorem esse ea parte diuidendi numeri, quæ denominatur à numero multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 12. in quatuor partes, quarum quælibet detracta de 5. relinquat quadratum. Cùm ergo auferendo 12. à quadruplo ipsius 5. puta à 20. supersit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos, quorum quilibet sit minor quàm 5. Diuiditur autem 8. in duos quadratos 4. 4. quare diuiso 4. bis in duos quadratos, res expedietur. Erunt ergo quæsiti quadrati $\frac{144}{169}$. $\frac{64}{169}$. $\frac{100}{169}$. $\frac{100}{169}$. quos si auferas sigillatim à quinario, remanent numeri 12. partes quatuor quæsitæ $\frac{25}{169}$. $\frac{105}{169}$. $\frac{69}{169}$. $\frac{69}{169}$.

QVÆSTIO TERTIA.

Datum numerum diuidere in quotlibet partes, vt à qualibet auferendo datum numerum supersit quadratus. Oportet autem ablatitium numerum minorem esse ea parte diuidendi numeri, quam exprimit numerus multitudinis partium postulatarum.

Diuidendus esto 20. in quatuor partes, vt à qualibet auferendo 3. supersit quadratus. Quia quadruplum ipsius 3. puta 12. ablatum de 20. relinquit 8. patet 8. diuidendum esse in quatuor quadratos quoscunque, cuilibet addendo 3. fient quæsitæ partes numeri 20. Sumantur ergo quadrati ad præcedentem allati, & cuilibet addatur 3. fient numeri 20. quæsitæ partes $\frac{153}{169}$. $\frac{73}{169}$. $\frac{105}{169}$. $\frac{105}{169}$.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quouis ipsorum adscito quadratum faciat. Ponatur solidus ille 1 Q. & quærantur tres quadrati, quorum quilibet adscita vnitate faciat quadratum. Hoc autem peti potest à quouis triangulo rectangulo. Expono tria triangula rectangula, & accipiens quadratum vnius laterum circa rectum, diuido

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ὑπ' αὐτῶν τριὰς ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω ὁ ὑπὸ τῶν τριῶν τριὰς δ^ος ᾱ. καὶ ζητεῖσθω τρεῖς τετράγωνοι ὅτων ἕκαστος αὐτῷ μιᾷ μονάδος ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ ἀπὸ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. ἐκτίθεμαι τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, καὶ λαβὼν τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον μερίζω εἰς τὸν ἀπὸ τῆς λοιπῆς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τῶν ὀρθῶν. καὶ διῃρήσθω

τὰς τετραγώνους. ἵνα μὲν δ^ν ϡ^ν. τὸν δὲ ὑπερον δ^ν κε^ις. τὸν δὲ τρίτον δ^ν ξδ^ις. καὶ μιᾷ ἑκασος αὐτῶν μ^ν δ^ν α. ποιοῦν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι ἡ ὑπ' τριῶν στερεὸν ἰσωσαι δ^ν α. γίνου δὲ ὁ ὑπ' τριῶν στερεὸς κ^ν κ^ν α. δυ^ι^ν. ^ις^ν. ταῦτα ἴσα δ^ν α. καὶ πάντα εἰς τὸ αὐτὸ μέρισον, καὶ ἁπλῆ δύναμις γίνεται δ^ν δ^ν α. δυ^ι^ν. ^ις^ν. ἴσα μ^ν α. καὶ ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶς γίνεται δ^ν ρκ^ν ψ^ν. ἴσα μ^ν α. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος, εἰ ἰσῶν τετραγώνων, καὶ τὰ δ^ν ρκ^ν ψ^ν. λελυμένον αὖ ἰσῶν τὸ ζητούμενον, οὐκ ἔστιν δή. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ εὑρεῖν τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὑπὸ τῶν περὶ τὸ αὐτῶν στερεὸν πολλαπλασιαθὲν ὅλη τὸν ὑπ' τῶν βάσεων αὐτῶν στερεὸν ποιῇ τετράγωνον. * πλευρὰν ἔχοντα τὸν ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων καὶ ἐὰν πάντα πολλαπλασιάσωμεν πρὸς ἃ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ λοιποῦ ὀρθογωνίου γένηται ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ α δ^ν ὅλη τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ἑτέρου τῶν τετρώνων, καὶ ἐὰν ταύτῳ ἓν αὐτῶν γ. δ^ν. ι. ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν δύο τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῦ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ ες^ις ιβ. ὥστε καὶ ἑνὸς ἑκάστου ἑκατὸν εἰκοσιτριῶν. κβ^ν γ. τοῦτο δὲ ῥᾴδιον καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ^ν. μ^ν. με^ν. τὸ δὲ ἕτερον ι^ν. ιβ^ν. ιγ^ν. ἔχοντες οὖν τὰ τρία τρίγωνα ὀρθογώνια ἐρχόμεθα εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς. τάσσομεν τῶν ζητουμένων τετραγώνων, ὧν μὲν θ^ν. ὧν δὲ κε^ν. ὧν δὲ πα^ν. καὶ ἐὰν τὸν ἐκ τῶν δ^ν. ι^ν. στερεὸν ἰσώσωμεν δ^ν α. γίνεται ὁ ἐκ τῶν ὑποτεινουσῶν.*

* Legendum est 8. 15. 17.

eum per quadratum alterius laterum circa rectum, & inuenio quadratos, vnum $\frac{25}{81}$ Q. alterum $\frac{225}{289}$ Q. tertium $\frac{289}{625}$ Q. & quilibet ipsorum cum 1 Q. facit quadratum. Restat vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. Est autem solidus ille $\frac{1500625}{1585225}$ CC. hoc æquatur 1 Q. & omnia ad eundem denominatorem reducendo, & diuidendo per 1 Q. fiunt $\frac{1500625}{1585225}$ QQ. æqualia 1. & latus lateri æquatur, fitque $\frac{1259}{1259}$ Q. æquale 1. Est autem vnitas quadratus. Quod si etiam $\frac{1259}{1259}$ Q. quadratus esset, soluta fuisset quæstio. Non est autem. Eò igitur redactus sum, vt inueniam tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub basibus faciat quadratum, * cuius latus sit numerus multiplicatione ortus laterum circa rectum vnius triangulorum. Et si omnia diuiserimus per productum ex lateribus circa rectum inuenti rectanguli, orietur qui sit ex producto laterum circa rectum secundi, in productum laterum circa rectum alterius triangulorum. Et si vnum ipsorum statuamus 3. 4. 5. Eò deuentum est vt inueniantur duo triangula rectangula, vt productus ex lateribus circa rectum producti ex lateribus circa rectum sit 12 N. Proinde & area areæ 12. si autem 12. & 3. Hoc autem facile est, & est simile huic 9. 40. 41. Alterum * 5. 12. 13. Habentes ergo tria triangula rectangula, reuertamur ad initiò propositum. Et statuamus trium quæsitorum quadratorum, alterum 9. alterum 25. tertium 81. & si solidum ex his æquemus 1 Q. fiet 1 N. rationalis. Ad positiones. *

IN QVAESTIONEM XXIV.

VIX scio an elegantiora & subtiliora problemata, tribus quæ sequuntur, excogitari possint, ea tamen tam miserè corrupta sunt, vt hic omni ex parte restituere Diophantum, humani, vt arbitror, vires superet ingenij, nisi quis emendatiorem proferat codicem. Equidem satis apparet ad huius quæstionis solutionem requiri vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. At in duabus sequentibus inuenienda esse tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub basibus habeat rationem quadrati ad quadratum. Quomodo autem hæc lemmata expediat Diophantus percipere minimè potui. Quoniam verò nos ea perfectè demonstrauimus libro tertio porismatum, & reliqua Diophanti operatio perspicua est, verba illius quæ sanitati restitui poterant, reposuimus, reliqua vt erant relinquere malui, quàm in iis corrigendis diutius animum torquere. Moneo tantùm verba illa, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ οθ^ν. ιδ^ν. με^ν. in Vaticano codice sic haberi, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ δ^ν. ι^ν. με^ν. Quam lectionem vt pote probabiliorem, sequutus sum in mea versione, verè enim numeri 9. 40. 41. constituunt triangulum rectangulum, quod non accidit ipsis 79. 40. 41.

Porrò multa sunt hîc obseruatione digna. Primò, vt inueniat quadratum qui adscita vnitate faciat quadratum, sumit Diophantus latera trianguli rectanguli, & quadratum baseos diuidit per quadratum perpendiculi. Vt ex positis 3. 4. 5. diuidendo 9. per 16. fit $\frac{9}{16}$. quadratus quæsitus, nam illi

illi addendo 1. fit $\frac{25}{16}$. item quadratus. Cuius rei causa satis est euidens. Nam quolibet numero per seipsum diuiso, quotiens est vnitas. Quare propositis quadratis 9. & 16. quorum summa quadratum facit, puta 25. si alter per alterum diuidatur vt 16. per 9. fit $\frac{16}{9}$. cui addendo $\frac{9}{9}$. seu vnitatem, quadratum fieri necesse est. Cùm enim fractiones sint eiusdem denominationis, sufficit addere numeratores, denominatore communi retento. At numeratores ex hypothesi faciunt quadratum. Quare cùm & denominator sit quadratus erit tota fractio $\frac{25}{9}$. quadratus, vt patet. Aduerte autem si velis tres diuersos quadratos, quorum singuli adscita vnitate, faciant quadratum, sumenda esse tria triangula rectangula non similia, qualia reposuimus in textu Diophanti; nam si sumantur similia triangula, & quadrati laterum homologorum diuidantur per quadratos homologorum laterum, fiet idem quotiens, vt sumptis triangulis 3. 4. 5. & 6. 8. 10. diuiso 9. per 16. & 36. per 64. æquales fiunt quotientes $\frac{9}{16}$. & $\frac{36}{64}$. Quod accidit ob similitudinem proportionum.

Secundo expositis tribus triangulis 3. 4. 5. 5. 12. 13. & 8. 15. 17. diuiduntur basium quadrati per quadratos perpendiculorum, fiuntque quadrati $\frac{9}{16}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{64}{225}$. qui nota Q. insigniti statuuntur pro tribus quæsitis numeris, quia sic quilibet adsumens 1 Q. facit quadratum. Porro solidus sub iis contentus, fractio est, cuius numerator 14400. fit ex mutua multiplicatione numeratorum 9. 25. 64. At denominator 518400 fit ex denominatorum 16. 144. 225. mutuo ductu. Est ergo huiusmodi solidus $\frac{14400}{518400}$. Quia verò numeri ex mutua quadratorum multiplicatione orti, quadrati sunt, quorum latera fiunt ex mutuo ductu laterum quadratorum eorundem, patet 14400. esse quadratum numeri 120. qui fit ex mutuo ductu basium trium triangulorum expositorum, nempè 3. 5. 8. similiter 518400. est quadratus numeri 720. qui continetur sub perpendiculis 4. 12. 15. vnde cùm tandem $\frac{14400}{518400}$ Q. æquentur vnitati, & euidens sit vt solutio contingat rationalis oportere ipsum $\frac{14400}{518400}$. esse quadratum, hoc est 120. ad 720. rationem esse debere quæ quadrati ad quadratum: Rectè infert Diophantus rem eò deductam esse, vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub basibus ad solidum sub perpendiculis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Tertiò lemma propositum sic absoluimus propositione vndecima libri tertij porismatum. Exponatur quodlibet triangulum rectangulum 3. 4. 5. & effingantur alia duo triangula ab hypotenusa expositi trianguli, & à quolibet laterum circa rectum modo quem tradidimus quinta tertij porismatum, fiet à 5. & 4. triangulum 9. 40. 41. At verò à 5. & 3. formabitur triangulum 16. 30. 34. Tria ergo hæc triangula satisfacient proposito, nam solidus sub perpendiculis 3. 9. 16. puta 432. ad 4800. solidum sub basibus rationem habet quàm 9. ad 100. Licétque vt monuimus in scholio vndecimæ tertij porismatum, loco cuiuslibet inuentorum triangulorum, sumere aliud simile: vt loco ipsius 16. 30. 34. sumi potest 8. 15. 17. quod sanè cum aliis duobus propositum absoluit.

Denique his inuentis triangulis sic explicatur quæstio Diophanti, diuido quadratos basium per quadratos perpendiculorum, & quotientibus addo notam Q. sunt quæsiti numeri $\frac{9}{16}$. Q. $\frac{25}{144}$. Q. & $\frac{64}{225}$. Q. & solidus sub iis contentus, puta $\frac{14400}{518400}$. C C. æquatur 1 Q. & tandem $\frac{14400}{518400}$ Q Q. æquatur 1. ac proinde & latus lateri æquale est, hoc est $\frac{120}{720}$ Q. seu in minimis $\frac{1}{6}$. æquatur vnitati. Quare fit 1 N. $\frac{1}{6}$. sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{9}{36}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{64}{225}$. quorum mutuo ductu fit solidus $\frac{14400}{1866240}$. cui si addantur sigillatim ipsi quadrati, fiunt rursus quadrati $\frac{81}{36}$. $\frac{625}{144}$. $\frac{4096}{225}$. quorum latera $\frac{9}{6}$ $\frac{25}{12}$ $\frac{64}{15}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Methodum Diophanti quam non percipit Bachetus ita restituo, & explico. Quoniam primum triangulum est 3. 4. 5. & rectangulum sub lateribus 12. eò deuentum est, inquit Diophantus, vt inueniantur duo triangula vt productus ex lateribus circa rectum, producti ex lateribus circa rectum sit duodecuplus (& ratio est quia tunc productum ex lateribus vnius in productum ex lateribus alterius producet numerum qui erit planus similis 12 atque ideo eorum mutuâ multiplicatione fiet quadratus, quod vult propositio) sequitur Diophantus, proinde & area area 12. quod per se clarum est. Deinde (si autem 12 & 3) quia diuidendo 12. per quadratum 4 fit 3. & semper in multiplicatione oritur quadratum, nam quadratum diuisum per quadratum facit quadratum. Reliqua Diophanti non præstant propositum, sed ita restituemus. In hoc casu fingatur triangulum abs 7. & 2. alterum vero abs 5. & 2. & primum triangulorum erit triplum ad secundum, & duo proposito satisfacient. Regula autem generalis inueniendi duo triangula rectangula in ratione datâ hac est. Sit data ratio R. ad S. maioris ad minus, mains triangulum formabitur abs R bis + S & R. − S. Minus vero abs R. + S. bis & R. − S. aliter. Formetur primum triangulum abs R bis − S & R + S. secundum abs S bis − R. & R + S. aliter. Formetur

primum triangulum abs R sexies Et R bis — S, secundum abs R quater + S & R quater — S. bis, aliter formetur primum triangulum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, Ex iam dictis deduci potest methodus inueniendi tria triangula rectangula in proportione trium datorum numerorum modo duo dati numeri reliqui sint quadrupli, sint v. g. dati tres numeri R S. T & sint ipsi R. T. simul quadrupli S. formabuntur sic tria triangula.

Primum abs R + S. quater & R bis — S quater, secundum abs S. sexies & R — S bis, tertium abs S quater + T & S quater — T bis. sumpsimus autem R esse maiorem T.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula rectangula numero quorum area constituant triangulum rectangulum, eò enim deducetur quæstio vt inueniatur triangulum cuius basis & hypotenusa sint quadrupla perpendiculi. Hoc autem est facile & erit triangulum simile huic 17. 15. 8 tria verò triangula sic formabuntur, primum abs 49. & 2. secundum abs 47. & 2. tertium abs 48 & 1.

Hinc etiam elicietur modus inueniendi tria triangula quorum areæ sint in ratione trium quadratorum datorum quorum duo sint quadrupli reliqui ac proinde poterunt eâdem viâ inueniri tria triangula eiusdem areæ.

Imò & infinitis modis possumus construere duo triangula rectangula in data ratione ducendo vnum ex terminis aut vtrumque in quadrata data &c.

QVÆSTIO XXV.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ἐπ τούτων τριὼς λείψας ἕκαστον αὐτῶν ποιῇ τετράγωνον. πτάχθω ὁ ἐξ αὐτῶν τριὰς δ^{ος} ᾱ. καὶ πάλιν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι ἀπὸ τῶν ὀρθογωνίων. ἑνὸς μὲν ις^{ης} $^{\alpha\iota\varsigma\alpha\iota\varsigma}$. τῶν δὲ ἑτέρου κε ρξ^{ος}. τῶν δὲ ξδ^{ης} $^{\varsigma\tau\varsigma}$. τάσσω αὐτὸς ἐπ δυνάμει, καὶ μένει ἡ δ^{ος} ᾱ λείψει ἑκάτερον αὐτῶν ποιῶν τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι τὸν ἐπ τῶν τελῶν τριὼς ἰσῶται δυνάμει ᾱ. καὶ ἔστιν ὁ ἐπ τ τελῶν τριὰς κυβοκύβων β. ,χ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,αχῑ. ταῦτα ἴσα δυνάμει ᾱ. ἃ πάντα ἀφῆ δύναμιν μείζονα ἢ δ^{ος} β. ,χ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,αχῑ. ἵνα μ^{ος} ᾱ. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς τετράγωνος πλευρὰν ἔχουσα τετράγωνον. δεήσει ἄρα καὶ δ^{ος} δ^{ος} β. ,χ. ἐν μορίῳ ρκβ. ,αχῑ. εἶναι τετράγωνον, καὶ πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ δύνασθαι τρία τρίγωνα ὀρθογώνια, ὅπως ὁ ἐπ τ καθέτων τριὼς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἐπ τ ὑποτεινούσων τριῶν, ποιῇ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα πετράγωνον, ✻ καὶ ἐὰν πάντα ἀφελόντες ἀφῶμεν τὸν τῆς ὑποτεινούσης καὶ καθέτου ἑνὸς τ ὀρθογωνίων, δεήσει τῶν ὑποτεινουσῶν καὶ καθέτου τῆς ὑποτεινούσης, ἐ καθέτου πολλαπλασιασθέντα καὶ τὸν ὑποτεινούσης ἐ καθέτου ὀρθογώνου τινὸς, ἔστω τὸ ἓν τ ὀρθογώνων γ. δ. ι. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δύνασθαι δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅπως ὁ ὑποτεινούσης καὶ καθέτου τῆς ὑποτεινούσης, καὶ καθέτου ἡ κ. εἰσὶ κ. καὶ ῑ. καὶ ἔστι ῥάδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ῑ. ιβ. ι.

IN VENIRE tres quadratos, vt solidus sub ipsis contentus, quolibet ipsorum detracto, faciat quadratum. Ponatur solidus sub ipsis contentus 1 Q. & rursus quadrati qui quæruntur, sumantur ex triangulis rectangulis, vnus à $\frac{}{\text{iv.}}$ alter à $\frac{}{\text{xxv.}}$ tertius à $\frac{}{\text{lxi.}}$ statuo eos in quadratis, & manet 1 Q. quolibet ipsorum detracto, faciens quadratum. Superest vt solidus sub tribus contentus æquetur 1 Q. est autem solidus ille $\frac{}{\text{CCCC.}}$ hoc ergo æquatur 1 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur, fiunt $\frac{}{\text{CCCC.}}$ QQ. æqualia 1. Est autem vnitas quadratus, latus habens quadratum. Ergo oportebat etiam $\frac{}{\text{CCCC.}}$ QQ. esse quadratum latus habentem quadratum. Rursus itaque res eò est reducta vt inueniantur tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ductus in solidum sub hypotenusis faciat quadratum, qui latus habeat quadratum ✻. Et si omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in perpendiculum vnius rectangulorum, oportet oriatur qui fit ex producto hypotenusæ in perpendiculum, alicuius rectanguli, in productum ex hypotenusa in perpendiculum alterius, esto vnum rectangulorum 3. 4. 5. Eò itaque deuentum est, vt inueniantur duo triangula rectangula, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi,

numeri hypotenusæ & perpendiculi sit 20. ii autem 20. & 5. & est facile, quippe maius est 5. 12. 13. minus 3. 4. 5. Ab his ergo quærenda sunt alia duo, vt numerus hypotenusæ & perpendiculi sit 6. est autem maioris hypotenusa $6\frac{1}{2}$. perpendiculum 60. Minoris autem hypotenusa $2\frac{1}{2}$. qui verò in vno rectangulorum 12. & accipientes minima similium, recurrimus ad propositum initio, & ponimus solidum sub tribus contentum 1 Q. ipsorum autem quadratorum alterum 16 Q. alterum 576 Q. tertium $\frac{1}{331776}$ Q. supereſt vt solidus sub tribus, æquetur 1 Q. & omnia in 1 Q. latusque lateri æquetur, & inuenietur 1 N. 65. Ad positiones. *

τὸ δὲ ἐλάττων γ̄. δ̄. ε̄. ζητητέον οὖν δύο τοὺς ἑτέρους δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης μετὰ τοῦ ἑνὸς τοῦ ἀθροίσματος ποιῇ μον̄ ε̄. ἔστι δὴ τὰ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μον̄ ε̄. α̅ς̅ν̅. ἡ δὲ κάθετος ξ̄. τὰ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μον̄ β̄. α̅ ς̅ν̅ ὁ δὲ ἐν τῇ α̅. τ̅ ἐρθογώνων ιβ̄. καὶ λαβόντες τὰ ἐλάχιστα τ̅ ὁμοίων ἀναπέμψομεν εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάσσομεν τ̅ ἐν τ̅ τετρὰ στρὸν δ̄ α̅. αὐτῷ δὲ τῷ τετραγώνων ὃν μὲν δ̄ ις̄. ὃν δὲ δ̄ φος̄. ὃν δὲ δ̄ α̅. ἐν μορίῳ β̄. μφξα̅. λοιπὸν ὅτι τὸν ἐν τ̅ τετρὰ στρὸν ἰσῶσαι δ̄ α̅. ἐπὶ πάντα τὰ δὲ δύναμιν καὶ πλευρὰ τῇ πλευρᾷ. καὶ διόμνυται ὁ ς̄ ξῑ. δεῖ τὰς ὑποτάσεις. *

IN QVAESTIONEM XXV.

EODEM ferè logismo vtitur hîc Diophantus, ac in præcedente. Nam vt inueniat tres quadratos qui ab vnitate sigillatim detracti quadratum relinquant, sumit tria triangula rectangula vt prius, & diuidit quadratum perpendiculi cuiuslibet trianguli per quadratum hypotenusæ. Verbi gratia sumpto triangulo 3. 4. 5. diuidit 16. per 25. vnde fit $\frac{16}{25}$. quadratus qui ab vnitate hoc est à $\frac{16}{25}$. detractus relinquit quadratum $\frac{9}{25}$. cuius rei ratio ex adnotatis ad præcedentem satis innotescit. Hinc ergo patet solidum sub tribus huiusmodi quadratis contentum, fieri ex solido sub quadratis à tribus perpendiculis, diuiso per solidum sub quadratis à tribus hypotenusis. Quamobrem latus quadratum huiusmodi solidi constat ex solido sub ipsis perpendiculis diuiso per solidum sub hypotenusis; vt ergo latus hoc sit quadratus numerus vt requiritur, necesse est inueniri tria triangula rectangula, vt solidus sub perpendiculis ad solidum sub hypotenusis sit in ratione quadrati ad quadratum.

Quomodo autem inueniantur tria huiusmodi triangula, non satis mihi constat ex corruptissimis Diophanti verbis; sed illorum iacturam æquo animo ferre possumus, quandoquidem problema istud perfectè à nobis demonstratum est propositione decimaquarta libri tertij porismatum, vbi tradidimus illius constructionem hoc pacto. Exposito quolibet triangulo 5. 4. 3. Ita vt 8. duplum baseos sit maius perpendiculo 3. inueniatur per duodecimam tertij porismatum aliud triangulum vt planus sub perpendiculis vtriusque trianguli, superet planum sub basibus quadrato numero, erit illud 13. 5. 12. Iam à duobus triangulis 5. 4. 3. 13. 5. 12. effingatur tertium per decimam tertij porismatum. Cuius hypotenusa 65. fiet ex mutuo ductu hypotenusarum 13. & 5. Basis autem 63. erit summa productorum ex basi cuiuslibet trianguli in perpendiculum alterius. Denique perpendiculum 16. erit differentia productorum ex basi in basim, & ex perpendiculo in perpendiculum. Sic habebimus tria triangula; quæsita puta 5. 4. 3. 13. 5. 12. 65. 63. 16. Nam planus sub perpendiculis est 576. planus sub hypotenusis 4225. quorum vterque quadratus cùm sit, eorum vtique ratio est quæ quadrati ad quadratum.

Hoc expedito lemmate facilè soluitur quæstio Diophanti. Sit enim solidus sub quæsitis quadratis contentus 1 Q. Ipsi verò quadrati statuantur ij qui fiunt diuidendo quadratum perpendiculi cuiuslibet inuentorum triangulorum per quadratum hypotenusæ, puta $\frac{9}{25}$ Q. $\frac{144}{169}$ Q $\frac{256}{289}$ Q. fitque solidus sub ipsis contentus $\frac{331776}{4225}$ C C. æqualis 1 Q. seu $\frac{4225}{331776}$ QQ æquatur 1. Quare & latus lateri, hoc est $\frac{4225}{331776}$ Q. æquatur 1. & fit 1 N. $\frac{65}{576}$. Ad positiones. Erunt quæsiti quadrati $\frac{81}{576}$. $\frac{144}{576}$. $\frac{256}{576}$. solidus sub iis contentus est $\frac{331776}{576}$. à quo si quilibet eorum auferatur, remanent quadrati $\frac{495}{576}$. $\frac{432}{576}$. $\frac{320}{576}$. quorum latera $\frac{\sqrt{495}}{24}$. $\frac{\sqrt{432}}{24}$. $\frac{\sqrt{320}}{24}$.

OBSERVATIO D. P. F.

AD elucidationem & explicationem quæstionis 25. iuxta methodum Diophanti quam Bachetus similiter prætermisit quærenda sunt duo triangula rectangula vt productum sub hypotenusa & perpendiculo vnius ad productum sub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem datam.

Quæ sanè quæstio diù nos torsit & verò difficillimam quilibet tentando experietur, sed tandem patuit generalis ad ipsius solutionem methodus.

Quærantur duo triangula vt rectangulum sub hypotenusa vnius & perpendiculo, rectanguli sub hypotenusa alterius & perpendiculo sit duplum.

Fingatur vnum ex triangulis ab A & B. alterum ab A & D. Rectangulum sub hypotenusa prioris & perpendiculo erit B in A cubum bis + B cub. in A. bis, rectangulū verò sub hypotenusa posterioris & perpendiculo erit D. in A.C. bis + D.C. in A bis, cum igitur B in A.C. bis + B.C. in A. bis sit duplū rectanguli D in A.C. bis + D.C. in A. bis, ergo B in A.C. + B.C. in A. æquabitur D. in A.C. bis + D.C. in A. bis & omnibus abs A diuisis fiet B in A. quadratum + B.C. æquale D. in A. Q. bis + D.C. bis & per antitheſin D. C. bis — B. C. æquabitur B. in A Q. — D. in A. Q. bis, ſi igitur D.C. — B. bis C. diuiſum per B — D bis æquetur quadrato ſoluta erit quæſtio.

Quærendi igitur duo numeri loco ipſorum B & D eâ conditione vt duplum cubi vnius — alio diuiſum vel multiplicatum (eodem enim res recidit) per duplum poſterioris primo faciat quadratum, ponatur vnus eſſe 1 N + 1. Alter 1 cubus duplus prioris — cubo à poſteriore facit 1 + 6 N + 6 q + 2 C duplus autem poſterioris — priore facit 1 — 1 N. ergo ſi ducas 1 — 1 N in 1 + 6 N + 6 q — 2 C fiet quadratus, productū illud æquatur 1 + 5 N — 4 C — 2 qq. Quod æquandū quadrato ab $\frac{1}{2}$ N — 1 — $\frac{11}{4}$ q. & omnia ſtatim conſtabūt, propoſitio autem ad omnes rationes extendetur ſi loco vnius ex quærendis numeris ponatur A + exceſſus maioris rationis termini ſupra minorem, & loco alterius ille ipſe exceſſus vt iam à nobis in ratione dupla eſt factum. Hac quippe ratione ſemper vnitatum numerus euadet quadratus & æquatio erit procliuis. Hoc peracto inuenientur duo numeri qui ipſos B & D repreſentabunt & ad primam quæſtionem fiet reditus. Retractanti quæ hucuſque ad 25 quæſtionem ſcripſimus viſum erat ſtatim omnia delere quia abductio ad problema quod perfecimus non conuenit quæſtioni noſtræ. quia tamen quæſtionem aliam ad quam malè præſens problema adduxeramus rectè conſtruximus, non tam operam perdidimus, quam malè collocauimus, & ideo maneat ſcriptura marginalis intacta.

Quæſtionem ipſam Diophanteam nouo iterum examini ſubiicientes & methodum noſtram ſedulò conſulentes tandem generaliter ſoluimus. Exemplum tantum ſubiiciemus conſiſi numeros, ipſos ſatis indicaturos non ſorti, ſed arti ſolutionem deberi. in propoſitione Diophanti quærenda duo triangula rectangula ea conditione vt productum ſub hypotenusa vnius & perpendiculo ad productum ſub hypotenusa & perpendiculo alterius habeat rationem quam 5 ad 1. En duo illa triangula, primum cuius hypotenuſa 48543669109. baſis 36083779309. perpendiculum 32472275580. ſecundum cuius hypotenuſa 42636752938. baſis 41990695480. perpendiculum 7394200038.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΤΡΕΙΝ τρεῖς τετραγώνους ὅπως ὁ ἐξ ἑαυτῶν στερεὸς λειφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου αὐτῶν, ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω πάλιν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς δ^ος ᾱ. αὐτοὶ ἄρ' εἰσὶν δ^ποι τειδ^ν ὀρθογώνιον. καὶ πάλιν ἀπάγεται καὶ ἐνταῦθα εἰς τὰ ζητούμενα ἐν τῇ προτάσει. εἰ χρὴ εἶθε οὖν καὶ ἐν ταύτῃ τοῖς αὐτοῖς ὀρθογωνίοις, καὶ τάχιστα τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὧν μὲν * δ^ος κε̄. ὧν δὲ δ^ος χκε̄. ὧν ἢ δ^ν δυνάμεις α. ,δ^φπδ^. ⁋ πάλιν μέσει ὁ ἐκ τῶν ξιδν στερεὸς ἀφθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. λοιπόν ἐστι καὶ τὸν ἀπ' αὐτῶν στερεὸν ἰσῶται δυνάμει μιᾷ. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς' μείζων ῆ̄. ⁋ μέσει. *

INVENIRE tres quadratos, vt ſolidus ſub ipſis contentus, detractus ab vnoquoque ipſorum, faciat quadratum. Rurſus ſolidus ſub ipſis contentus ſtatuatur 1 Q. ipſi autem à quibuſvis rectangulis petantur. Et rurſus hîc res deuoluitur ad ea quæ in præcedente fuerunt quæſita. Si igitur in hac iiſdem vtamur rectangulis, & ponamus eorum qui quæruntur quadratorum * vnum 25 Q. alterum 625 Q. tertium 14784 Q. Et rurſus ſolidus ſub tribus contentus detractus à quolibet, facit quadratum. Supereſt vt ſolidus ille æquetur 1 Q. vnde inuenitur 1 N. maior quàm 8. & conſtat. *

IN QVAESTIONEM XXVI.

SATIS apparet ex lemmate ad præcedentem explicato pendere quæstionis huius solutionem, nam vt prius inuenienda sunt tria triangula rectangula, vt solidus sub hypotenusis ad solidum sub perpendiculis habeat rationem quadrati ad quadratum. Et sicut ibi ponebantur quæsiti quadrati $\frac{2}{81}$ Q. $\frac{144}{1681}$ Q. $\frac{4624}{707281}$ Q. ita vt auferendo quemlibet ab 1 Q. remanerent quadrati, puta $\frac{77}{81}$ Q. $\frac{1537}{1681}$ Q. $\frac{702657}{707281}$ Q. Ita hic numeratoribus in denominatores mutatis, & è conuerso, statuuntur quæsiti quadrati $\frac{81}{2}$ Q. $\frac{1681}{144}$ Q. $\frac{707281}{4624}$ Q. vt à quotlibet auferendo 1 Q. remaneant quadrati $\frac{79}{2}$ Q. $\frac{1537}{144}$ Q. $\frac{702657}{4624}$ Q. fitque solidus sub tribus quæsitis contentus $\frac{1728}{1}$ CC. æquales 1 Q. & tandem $\frac{1728}{1}$ Q. æquatur vnitati. Vnde fit 1 N. $\frac{1}{1728}$. Sunt ergo quæsiti numeri. $\frac{41}{1728}$. $\frac{25}{1728}$. $\frac{9}{1728}$. Nam solidus sub iis contentus est $\frac{1}{1728}$. quem auferendo sigillatim à quolibet ipsorum, remanent quadrati $\frac{1680}{1728}$. $\frac{1703}{1728}$. $\frac{1719}{1728}$. quorum latera $\frac{40}{42}$. $\frac{41}{42}$. $\frac{39}{42}$.

QVÆSTIO XXVII.

INVENIRE tres quadratos, vt productus ex binorum multiplicatione adscita vnitate faciat quadratum. Et quoniam quæro productum ex primo in secundum addita vnitate facere quadratum, omnia ducantur in tertium qui est quadratus. Itaque oportebit productum ex primo in secundum, ductum in tertium, hoc est solidum sub tribus contentum, cum tertio facere quadratum, sicut etiam cum primo & secundo. Id autem ante demonstrauimus. Igitur illi numeri hanc quoque soluunt quæstionem.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν προσλαβὼν μ̄ ᾱ. ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ ζητῶ τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου μ̄ μονάδος ᾱ. ποιεῖν τετράγωνον. παντα δεῖ τὸν τρίτον ὅτα τετράγωνον. ὥστε δεῖσαι τὸν ὑπὸ πρώτου, καὶ δευτέρου δεῖ τὸν τρίτον, τουτέστι τὸν ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸν μ̄ τῷ τρίτου ποιεῖν τετράγωνον. ὡς δὲ μ̄ τῷ πρώτου καὶ δευτέρου, τοῦτο γὰρ προσδιέξαμεν. ὥστε ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο τὸ ζητημα.

IN QVAESTIONEM XXVII.

REFERTVR hæc propositio ad vigesimam quartam, & iidem prorsus numeri vtramque quæstionem soluunt, vt rectè infert Diophantus, quod tamen vt euidentius fiat; sic demonstro.

A $\frac{11}{4}$. B $\frac{5}{16}$. C $\frac{336}{1}$. D $\frac{55}{64}$. G $\frac{361}{64}$.

Sint tres quadrati A B C. soluentes vigesimam quartam, ita vt solidus sub ipsis contentus quolibet adiecto quadratum faciat; dico eum qui fit à duobus quibuslibet addita vnitate fore quadratum. Ducto enim A in B fiat D. cui addita vnitate fiat G. probandum est G esse quadratum. Itaque quia ex hypothesi ducto D in C. & producto addendo ipsum C. fit quadratus. At ducere D in C & producto addere C. idem est atque ducere C in numerum vnitate maiorem ipso D, hoc est in ipsum G, sequitur ex C in G. fieri quadratum. [1] Ergo C & G sunt plani similes. [2] Quare cùm C. sit quadratus ex hypothesi, oportet & ipsum G quadratum esse. Quod demonstrandum erat.

[1] 4. noni. [2] 24. octaui.

Sunt ergo quæsiti quadrati $\frac{11}{4}$. $\frac{5}{16}$. $\frac{336}{1}$. Nam ex binorum mutuo ductu fiunt numeri $\frac{55}{64}$. $\frac{11}{5}$. $\frac{1848}{5}$ quibus addendo sigillatim vnitatem, fiunt quadrati $\frac{361}{64}$. $\frac{16}{5}$. $\frac{1849}{5}$. quorum latera sunt $\frac{19}{8}$. $\frac{4}{5}$. $\frac{43}{5}$.

QVÆSTIO XXVIII.

INVENIRE tres quadratos vt productus ex binorum multiplicatione detracta vnitate, faciat quadratum. Omnia in tertium. Itaque productus ex primo in secundum ductus in tertium, hoc est solidus sub tribus contentus, detracto tertio quadratum facit 1 sicut & idem solidus sub tribus contentus, facit quadratum detracto secundo & tertio. Hoc autem supra demonstratum est. Igitur illi numeri hoc quoque præstant.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν λείψας μ̄ ᾱ. ποιῇ τετράγωνον παντα δεῖ τὸν τρίτον. ὥστε ὁ ὑπὸ πρώτου καὶ δευτέρου δεῖ τὸν τρίτον τουτέστι ὁ ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸς λείψας τὸν τρίτον ποιεῖ τετράγωνον. ὥστε καὶ ἐκάτερον τὸν τε πρώτου καὶ τὸν δευτέρου λείψας ὁ ἐκ τ̄ τειῶν στερεὸς ποιεῖ τετράγωνον. τοῦτο δ̄ προδέδεικται. ἐκεῖνοι οὖν οἱ ἀριθμοὶ ποιοῦσι καὶ τοῦτο.

IN QVAESTIONEM XXVIII.

HÆc etiam refertur ad vigesimam quintam & iidem numeri vtramque soluunt quæstionem. Nam à solido sub tribus quadratis contento auferre, verbi gratia, tertium idem est atque ducere planum sub primo & secundo vnitate multatum, in ipsum tertium. Quare cùm solidus sub tribus contentus, detracto tertio sit quadratus, necesse est & planum sub primo & secundo detracta vnitate esse quadratum, alioquin eo ducto in tertium qui quadratus est, non posset fieri quadratus. Soluitur ergo hæc quæstio per quadratos inuentos per vigesimam quintam, nempe per quadratos $\frac{49}{144}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{1}{144}$. Etenim plani sub binis contenti sunt $\frac{1225}{20736}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{49}{144}$. A quibus auferendo sigillatim vnitatem, remanent quadrati $\frac{18769}{20736}$. $\frac{169}{144}$. $\frac{529}{144}$. quorum latera $\frac{137}{144}$. $\frac{13}{12}$. $\frac{23}{12}$.

QVÆSTIO XXIX.

ΕΤΡΕΙΝ ξεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ ὑπὸ δύο ὁποιωνοῦν ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ζητοῦντες τὸν ὑπὸ δύο ὁπωσοῦν ἀρθέντα ἀπὸ μονάδος μιᾶς ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν πάντα πολύσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ δίρειν ξεῖς ἀριθμοὺς, ὅπως ὁ ἐξ αὐτῶν τριὸς ἀρθεὶς ἀπὸ ἑκάστου ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ πεφυδείξαμεν.

INVENIRE tres quadraros, vt productus ex binorum multiplicatione detractus ab vnitate, faciat quadratum. Rursus quærentes eum qui à duobus quibuslibet sit sublatum ab vnitate, facere quadratum, si omnia ducamus in tertium; rursum eò deducimur vt inueniamus tres numeros, è quibus confectus solidus si tollatur à quouis, relinquat quadratum. Hoc autem suprà est demonstratum.

IN QVAESTIONEM XXIX.

PENDET rursus hæc propositio à vegesima sexta, & iidem quadrati vtrique quæstioni satisfaciunt. Ratio est, quia solidus sub tribus contentus detractus, verbi gratia, à tertio relinquit quadratum per vegesimam sextam. At idem quadratus fit si planus sub primo & secundo detrahatur ab vnitate, & residuum ducatur in tertium. Ergo necesse est planum ex primo in secundum detractum ab vnitate relinquere quadratum, vt scilicet eo in tertium qui quadratus est, ducto, fiat quadratus. Quod autem si planus ex primo in secundum detrahatur ab vnitate, & residuum ducatur in tertium, idem fiat numerus, atque si solidus sub tribus auferatur à tertio, ne quis scrupulus maneat, sic demonstro. Sint tres quicunque numeri A B C. & solidus sub ipsis D. quem auferendo à tertio C. remaneat K. Tum ducto A in B fiat G quo detracto ab vnitate relinquatur H. Dico si H. ducatur in C fieri K. Quia enim D. est solidus sub tribus contentus, & G planus, sub duobus A B. patet ducto C in G. fieri solidum D. At duo G H æquantur vnitati ex constructione. Quare cùm ducendo C in vnitatem, fiat ipse C. producti ex C in ipsos G H. puta D K simul æquantur ipsi C. At ex C in G fit D vt ostensum est. Ergo ex C in H fiet K. Quod erat ostendendum.

D $\frac{1}{10}$.
A $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{5}$. C $\frac{1}{4}$.
G $\frac{1}{10}$. H $\frac{1}{2}$. K $\frac{1}{10}$.

Itaque sumptis quadratis $\frac{49}{144}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{1}{144}$ per vigesimam sextam inuentis, ex binorum mutuo ductu fient $\frac{1225}{20736}$. $\frac{25}{144}$. $\frac{49}{144}$. quos auferendo sigillatim ab vnitate, remanent quadrati $\frac{18769}{20736}$. $\frac{169}{144}$. $\frac{529}{144}$. quorum latera $\frac{137}{144}$. $\frac{13}{12}$. $\frac{23}{12}$.

Cæterùm hæ tres quæstiones paulò vniuersalius proponi possunt, quod exemplo vigesimæ septimæ docuisse sufficiat.

Inuenire tres quadratos, vt qui fit ex binorum mutuo ductu, addito quouis quadratoquadrato, faciat quadratum.

Datus quadratoquadratus esto 16.

Sumo quadratos soluentes vigesimam septimam, puta $\frac{25}{144}$. $\frac{1}{144}$. $\frac{289}{144}$. quos sigillatim multiplico per latus quadratum ipsius 16. puta per 4. & fiunt quæsiti quadrati 25. $\frac{1}{9}$. $\frac{289}{9}$. quos satisfacere proposito perspicuum est. Nam primo quadratos eos esse constat, quia fiunt ex quadrato 4. in tres quadratos sigillatim ducto, idemque semper eueniet, quia latus quadratum cuiuslibet quadratoquadrati, quadratus est. Deinde cùm sint quadrupli priorum quadratorum at ex quadruplo numeri in quadruplum alterius, fiat sedecuplum producti ex numero in numerum, patet productos ex binorum multiplicatione esse sedecuplos priorum productorum. Quare si his addatur 16. puta sedecuplum vnitatis, fient numeri sedecupli ad quadratos qui fiunt si numeri per vigesimam septimam inuenti bini inter se multiplicentur, & productis addatur vnitas. Ac proinde cùm ex eo quadrato in quadratum fiat quadratus, patet propositum.

QVÆSTIO XXX.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini ſumpti, adſcitoque dato numero, faciant quadratum. Eſto datus 15. & ſit vnus quæſitorum 9. Quærendi ſunt ergo alij duo, vt quilibet illorum cum 24. faciat quadratum, & ambo ſimul cum 15. faciant quadratum. Oportet ergo quærere duos quadratos, quorum vterque cum 24. faciat quadratum. Sumamus numeros qui metiantur 24. & ſint latera circa rectum trianguli rectanguli. Eſto ſecundum $\frac{1}{4}$. oppoſitus, erit 6 N. vtriuſque horum ſemiſſis eſt $\frac{1}{2}$. & 3 N. Rurſus eſto ſecundum $\frac{1}{3}$. oppoſitus erit 8 N. vtriuſque ſemiſſis eſt $1\frac{1}{2}$ & 4 N. Sit ergo vnius quadratorum latus ab interuallo $\frac{1}{2}$. & 3 N. alterius verò latus ab interuallo $1\frac{1}{2}$ & 4 N. ſic enim vterque quadratorum cum 24. faciet quadratum. Reſtat vt & ambo iuncti cum 15. faciant quadratum. Fit autem $6\frac{1}{2}$ + 25 Q. — 9. Igitur 25 Q. + $6\frac{1}{2}$ — 9. æquantur quadrato. Eſto quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad poſitiones.

Δοθεντι ἀριθμῷ τετραγώνους τρεῖς εὑρεῖν τετραγώνους, ὅπως σὺν δύο λαμβανόμενοι οἱ τρίγωνοι, καὶ προσλαβόντες τὸν δοθέντα ἀριθμὸν, ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ιε̄. ἔστω δὴ ζητούμενόν μ̄ Ϛ̄. ζητεῖσθαι οὖν ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μ̄ κδ̄ ποιῇ τετράγωνον. συναμφότερος ἄρα μετὰ μ̄ μ̄ ιε̄. ποιῇ τετράγωνον δεῖ οὖν ζητεῖν δύο τετραγώνους, ὅπως ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μ̄ κδ̄. ποιῇ τετράγωνον. λαμβάνωμεν τοὺς μετροῦντας μ̄ κδ̄. καὶ τελείων ὀρθογωνίων πλευρὰς τὰς περὶ τὴν ὀρθήν. [ἔστω κ̄ ἀριθμοσὸν δ̄ ᵘ ᵃ̄. ὁ ἀντικείμενος ς̄ᵘ ϛ̄. συναμφοτέρων τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοσὸν β̄ ᵘ ᵃ̄. καὶ ἀριθμοὶ γ̄. δ̄ ιι] ἔστω κ̄ ἀριθμοσὸν γ̄ ᵘ ᵃ̄. ὁ ἀντικείμενος ς̄ᵘ η̄. συναμφοτέρων τὸ ἥμισυ γίνεται ἀριθμοσὸν α̃. α̃ ᵘ. καὶ ς̄ᵘ δ̄. ἔστω ἡ τοῦ ἑνὸς πλευρὰ ὑπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ β̄. καὶ ς̄ γ̄. [ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πλευρὰ ὑπὸ διαφορᾶς ἀριθμοστοῦ α̃. α̃ ᵘ. καὶ ς̄ δ̄] καὶ μέρων ἑκάτερος αὐτῶν μετὰ μ̄ κδ̄. ποιεῖ τετράγωνον. λοιπὸν ὅτι καὶ συναμφοτέρους μετὰ μ̄ ιε̄ ποιεῖ τετράγωνον. γίνεται δὲ συναμφοτέρων. α̃ δ̄. καὶ δ̄ᵘ κε̄ ϛ̄ μ̄ Ϛ̄ δυνάμεις ἄρα κε̄ [καὶ δυναμοστὸν ϛ̄. α̃ δ̄.] ϛ̄ μ̄ θ̄. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ᵘ κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ῑ ᵘ. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις

OBSERVATIO D. P. F.

HVius quæſtionis beneficio, ſequentis quæſtionis ſolutionem dabimus quæ alioquin difficillima ſane videretur.

Dato numero, quatuor inuenire numeros quorum bini ſumpti adſcitoque dato numero faciant quadratum. Sit datus numerus 15 & primum per hanc quæſtionem reperiantur tres quadrati quorum bini ſumpti adſcitoque dato numero faciant quadratum. Et ſint illi tres quadrati 25. $\frac{144}{25}$. $\frac{337}{25}$.

Ponatur primus quatuor numerorum quæſitorum 1 Q + 15.

Secundus 10 N + 25. (*quia* 25. *eſt vnus ex quadratis*, 10 N *autem eſt duplum lateris in* N.)

Tertius eâdem ratione ponatur $\frac{1}{5}$ N + $\frac{1}{10}$, *quartus denique* $\frac{25}{144}$ N + $\frac{337}{144}$. *Ita quippe inſtitutis poſitionibus tribus propoſitis partibus ſatisfit, quilibet enim numerum vnâ cum primo adſcito* 15 *facit quadratum. Supereſt vt ſecundus & tertius addito* 15, *item tertius & quartus addito* 15, *denique ſecundus & quartus, eodem addito* 15 *faciant quadratum & oritur triplicata æqualitas cuius ſolutio in promptu cum ex conſtructione cuius artificium ab hac quæſtione deſumpſimus in quolibet termino æquando reperiantur vnitates tantum quadratæ & numeri. Recurrendum igitur ad ea quæ diximus ad quæſtionem vigeſimamquartam libri ſexti.*

IN QVAESTIONEM XXX.

SVBTILITER Diophantus posito vno quadratorum ad placitum, puta 9. inuestigat reliquos. Cum enim 9. additus dato numero 15. faciat 24. certum est reliquorum quemlibet adsumpto 24. debere conficere quadratum, quia quilibet ipsorum addito 9. & 15. debet esse quadratus. Sed & vterque simul adscito 15. debet facere quadratum. Reliquum ergo est vt duo quadrati reperiantur, quorum quilibet cum 24. faciat quadratum, & eorum summa adiumens 15. sit quadratus. Hic sanè mirabili artificio ponit latera quadratorum $3\,N.-\frac{1}{18}$ & $4\,N.-1\frac{1}{4\,N}$ vnde fiant quadrati $9\,Q.-12+\frac{1}{18\,Q}$ & $16\,Q.-12+\frac{2}{4\,Q}$ quorum vterque adsumens 24. quadratum facit, puta $9\,Q.+12+\frac{1}{18\,Q}$ & $16\,Q.+12+\frac{2}{4\,Q}$ à lateribus $3\,N.+\frac{1}{18}$. & $4\,N.+1\frac{1}{4\,N}$. Equidem certum est si quadrati duo fingatur ab aliquo binomio, & à residuo quod ei respondet, interuallum quadratorum fore quadruplum plani sub partibus comprehensi, vt quadratorum à lateribus $1\,N.+3.$ & $1\,N.-3.$ interuallum est $12\,N.$ quadruplum producti ex $1\,N.$ in 3. Quare Diophantus quærens quadratum cui addendo 24. fiat quadratus, ponit pro latere residuum tale, vt planus sub partibus sit quadrans de 24. puta 6. Id vt consequatur sumit duos numeros quorum mutuo ductu fiat 24. puta 6. & 4. & vtriusque semissem capit, puta 3. & 2. nam ex semissi in semissem fit quadrans producti ex toto numero in totum numerum. Formandum ergo est residuum à 3. & 2. ponendo scilicet alterum cum signo N. puta $3\,N.$ ex altero verò formando fractionem numericam, puta $\frac{1}{18}$. & fit residuum $3\,N.-\frac{1}{18}$. in quo patet planum sub partibus esse $-6.$ atque adeo duplum illius esse $-12.$ cui addendo 24. fit $+12.$ sola signorum mutatione facta. Eadem arte fingit latus tertij quadrati, sumendo 8. & 3. quorum mutuo ductu fit 24. & capiendo semisses eorum, puta 4. & $1\frac{1}{2}$. vnde formatur residuum $4\,N.-1\frac{1}{4\,N}$ vbi etiam contingit planum sub partibus esse $-6.$ eadem de causa.

Porrò non temerè sumendi sunt duo cuicunque numeri mutuo ductu producentes 24. quales sumpsit author 6. & 4. & rursus 8. & 3. sed tales esse debent, vt duo 6. & 8. Itemque 4. & 3. constituant latera circa rectum trianguli rectanguli, vt infrà docebimus. Ideò sumit Diophantus duos quoscunque numeros 3. & 4. qui sint latera circa rectum trianguli rectanguli, & per eos diuidendo 24. nascitur alios duos 8. & 6. qui sunt etiam latera circa rectum trianguli rectanguli, quia eorum eadem est proportio, quæ ipsorum 3. & 4. vt constat per decimam nonam septimi. Vnde etiam sequitur & horum semisses, puta $1\frac{1}{2}$. & 2. Itemque 4. & 3. constituere latera circa rectum trianguli rectanguli ob identitatem rursus proportionis.

nº 3. *prop.*

Necesse est autem huiusmodi numeros constituere latera circa rectum trianguli rectanguli, vt summa quadratorum ab ipsis ortorum sit quadratus numerus, quia oportet summam quadratorum fictitiorum adscito 15. puta $25\,Q.-9+\frac{1}{4\,Q}$ esse trinomium cuius quælibet pars constet quadrato numero. At $25\,Q.$ est summa quadratorum à lateribus $3\,N.$ & $4\,N.$ & rursus $\frac{25}{4\,Q}$ est summa quadratorum à lateribus $1\frac{1}{2\,N}$. & $\frac{1}{2\,N}$. vnde patet oportere vt $3\,N.$ & $4\,N.$ Itemque $1\frac{1}{2\,N}$ & $\frac{1}{2\,N}$. sint latera circa rectum trianguli rectanguli. Vnitates verò $-9.$ æquantur quadrato qui positus est pro primo quæsitorum, vt patet.

Ingeniosa itaque laterum fictione assequutus est Diophantus, vt quælibet pars trinomij quadrato æquandi, constet quadrato numero, quod ni foret, qua quæso ratione æquaretur quadrato $25\,Q.-9+\frac{1}{4\,Q}$? Sanè si velis fingere illius latus $5\,N.+$ vel $-$ certo vnitatum numero, nil efficies, neque si ponas latus illud $\frac{1}{2\,N}$. plus vel minus certo Numerorum numero, nam vtroque modo vel incides in absurdum, vel in complexam æquationem, talemve ex qua non prodeat solutio rationalis. Itaque huiusmodi æquatio ritè nequit explicari, nisi æquando propositum numerum, vel cum $25\,Q.$ vel cum $\frac{25}{4\,Q}$. sic enim ablatis vtrimque æqualibus remanebunt 9. æquales vel $\frac{1}{4\,Q}$. vel $25\,Q.$ & res optimè succedet, quia vtrumque extremum æquationis reperitur quadratus. Posuit Diophantus $25\,Q.$ æquales $25\,Q.-9+\frac{1}{4\,Q}$. Quare tandem 9. æquantur $\frac{1}{4\,Q}$ & omnia per $1\,Q.$ fiunt $9\,Q.$ æquales $\frac{1}{4}$. Quare $1\,N.$ est $\frac{1}{6}$. Ad positiones sunt latera quadratorum $\frac{1}{6}$. & $\frac{1}{12}$. Sunt ergo tres quæsiti quadrati 9. $\frac{1}{144}$. $\frac{1}{576}$. nam bini adsumpto 15. faciunt quadratos $\frac{1}{144}$. $\frac{1}{576}$. $\frac{1}{12}$. quorum latera $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{24}$. $\frac{1}{4}$.

Quod si ponas $25\,Q.-9+\frac{1}{4\,Q}$ æquari $\frac{25}{4\,Q}$ fient 9. æqualis $25\,Q.$ & erit $1\,N.\frac{1}{5}$. eadem tamen quæ prius continget solutio, quia tunc concipiendum erit latera quadratorum fuisse $\frac{1}{5\,N}-3\,N.$ & $1\frac{1}{4\,N}-4.\,N.$ quæ per valorem Numeri resoluta, erunt vt suprà $\frac{11}{15}$ & $\frac{1}{20}$.

QVÆSTIO

QVÆSTIO XXXI.

DATO numero tres adinuenire quadratos, quorum bini sumpti detracto dato numero, faciant quadratum. Esto datus 13. Ponatur rursus quæsitorum quadratorum vnus 25. Quærendi ergo alij duo, vt vterque sigillatim cum 12. faciant quadratum, ambo verò simul detractis 13. faciant quadratum. Rursum sumimus dimensionem secundum numeros 3. & 4. fitque prioris quadrati latus ab interuallo inter $1\frac{1}{3}$ N. & $\frac{1}{12}$. alterius verò ab interuallo inter 2 N. & $1\frac{1}{12}$. Sic enim vtriusque quadratus adscito 12. facit quadratum. Supereſt vt ambo simul detracto 13. faciant quadratum. Fit autem $6\frac{1}{12}$ + $6\frac{1}{3}$ Q. — 25. Hoc ergo æquatur quadrato. Esto ipsis $6\frac{1}{25}$. & fit 1 N. 2. Ad positiones.

Δοθεντι ἀριθμῷ τρεῖς τετραγώνους, ὅπως συὶ δύο λαμβανόμενοι ϵ̓ λείψαντες τὸν δοθέντα ποιῶσι τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ιγ̄. τετάχθω πάλιν ἑνὸς τῶν ζητουμένων τετραγώνων μ̄ κᾱ. ζητητέον συὶ ἑτέρους δύο, ὅπως ἑκάτερος μὲν αὐτῶν μετὰ μ̄ ιβ̄. ποιῇ τετράγωνον. συναμφότεροι δὲ λείψαι μ̄ ιγ̄. ποιῇ τετράγωνον. πάλιν λαμβάνομεν τὸν μέζονα καὶ ἀριθμὸν ἴσον καὶ δ̄. γίνεται ἡμῖν τῆς τρίτου πλευρᾶς ὑπὸ διαφορὰς ς̄ α̃. α̃ ς̄. καὶ ἀριθμοῦ β̄. ἡ δὲ τῆς ἑτέρου ὑπὸ διαφορὰς ις̄ β̄. καὶ ἀριθμοῦ α̃. α̃ ς̄. καὶ μένει ὁ ὑπὸ τῆς ἑτερας τετράγωνος μετὰ μ̄ ιβ̄. ποιῶν τετράγωνον. λειπόν ὅτι συναμφοτέρους λείψει μ̄ ιγ̄. ποιεῖν τετράγωνον γίνεται δὲ δυναμοστὸς ς̄. α̃ ς̄. δ̄ ς̄ α̃ ῑ. λείψει μ̄ κε̄. ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω δυναμοστῶν ς̄. α̃ ς̄ καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ β̄. δεῖ τὰς ὑποστάσεις

OBSERVATIO D. P. F.

QVo artificio in superiore quæstione vsi sumus vt quatuor numeros inueniremus quorũ bini sumpti adscito dato numero conficerent quadratũ, simili in hac quæstione vti possumus, vt inueniãtur quatuor numeri quorum bini sumpti detracto dato numero conficiant quadratum. Ponendus enim primus 1 Q. + *numero dato. Secundus quadratus primus ex inuentis in hac quæstione vna cum duplo ab ipsius latere in N. & reliqua patent.*

IN QVAESTIONEM XXXI.

EX dictis ad præcedentem satis intelligitur hæc quæstio. Ponit primum quadratum 25. vnde cùm auferendo 13. à 25. supersit 12. patet quærendos duos quadratos, quorum vterque adscito 12. faciat quadratum, ita vt amborum summa detracto 13. faciat etiam quadratum. Inuenit autem duos quadratos, quorum vterque adscito 12. faciat quadratum eodem artificio quo vsus est in præcedente, & fingit eorum latera à lateribus circa rectum trianguli rectanguli, quorum mutuo ductu fiat 3. quadrans ipsius 12. Et ponit vnum latus 2 N. — $1\frac{1}{12}$ alterum $1\frac{1}{12}$ — 2 N. vnde quadratorum summa detractis 13. fit $\frac{25}{9}$ Q. — 25 + $\frac{25}{144}$ æquanda quadrato, puta $\frac{25}{169}$. Quare tandem $\frac{25}{9}$ Q. æquantur 25. & fit 1 N. 2. sunt ergo latera quadratorum quæsitorum 2. & $\frac{24}{7}$. & fiunt tres quadrati quæsiti 25. $\frac{576}{49}$. $\frac{625}{49}$. quorum bini detracto 13. relinquunt quadratos 16. $\frac{25}{49}$. $\frac{169}{49}$.

Cæterùm moneo & hanc & præcedentem infinitas recipere solutiones ex duplici capite. Primò enim primus quadratus poni potest quilibet vnitatum numerus quadratus. Deinde latera secundi & tertij variè fingi possunt, à diuersis scilicet numeris qui sint latera circa rectum diuersorum triangulorum rectangulorum non similium. Verbi gratia loco ipsorum 3. & 4 sumi poterant 8. & 15. vel 5. & 12. & alij infiniti, vt in hac quæstione si libeat vti numeris 5. & 12. sumo numeros oppositos qui scilicet in hos ducti producunt 12 hi sunt $\frac{1}{3}$ & 1. & omnium capio semisses, puta $\frac{5}{6}$. 6. $\frac{7}{6}$. fingo ergo latera quadratorum $\frac{5}{6}$ N. — $\frac{1}{12}$. & 6 N. — $\frac{7}{12}$. & patet quemlibet quadratorum adscito 12. facere quadratum. Restat vt eorum summa detractis 13. faciat quadratum, facit autem $\frac{144}{25}$ Q. — 25 + $\frac{168}{25}$ Q. hoc ergo æquetur $\frac{168}{25}$ Q. fiet $\frac{144}{25}$ Q. æqualis 25. vnde fit 1 N. $\frac{5}{12}$ suntque quadratorum latera $\frac{119}{120}$. & $\frac{169}{120}$. Itaque tres quæsiti quadrati sunt

25. $\frac{1152}{1681}$. $\frac{1681}{1681}$. quorum bini detracto 13. faciunt quadratos $\frac{676}{1681}$. $\frac{1377}{1681}$. $\frac{441}{1681}$. quorum latera $\frac{26}{41}$. $\frac{37}{41}$. $\frac{21}{41}$. videtur autem hic omissa huiusmodi quæstio.

Inuenire tres quadratos, quorum bini detracti à dato numero relinquant quadratum.

Sed hanc vt nimis facilem prætermisit Diophantus. Sit enim datus 21. patet nil aliud postulari quàm vt 21. diuidatur in tres quadratos, quales sunt 16. 4. 1. euidens quippe est si bini auferantur à 21. relinqui tertium.

QVÆSTIO XXXII.

ΕΥΡΕΙΝ δεῖς τετραγώνους, ὅπως ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῇ τετράγωνον. τετάχθω δὴ τῶν ζητουμένων ὁ μὲν δ° ᾱ. ὁ δὲ μ° δ̄. ὁ δὲ μ° γ̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. δυναμοδυνάμεως μιᾶς μ° ιϛ̄. ἴσος τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ° ᾱ. λείψει μ° ῑ̄. καὶ γίνονται λοιπαὶ δι° κ̄. ἵνα μ° γ̄. καὶ εἰ ἴσων ὁ ὑπ' αὐτῶν τετράγωνος λελυμένοι ἂν ἴων τὸ ζητούμενον, καὶ ἀπάγει εἰς τὸ δύρεῖν δύο τετραγώνους, καὶ ἀριθμόν τινα ὅπως ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος λείψας τὰς ἀπὸ τῶν ζητουμένων τετραγώνους ποιῇ ἀριθμόν τινα, ὃς πρὸς τὸν διπλάσιον τῆς ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοῦ λόγον ἔχῃ ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τετάχθωσαν οἱ ζητούμενοι τετράγωνοι, ὃς μὲν δ° ᾱ. ὃς δὲ μ° δ̄. καὶ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς δ° ᾱ μ° δ̄. καὶ ἀπὸ τούτου τετράγωνος, ἐὰν λείψῃ τὰς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνους, καταλείπει δ° ῑ̄. θέλομεν οὖν πρὸς τὸ δὶς δ° ᾱ μ° δ̄. τουτέστι πρὸς δ° β̄ μ° ῑ̄. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ παντὸς τὸ ἥμισυ. ὥστε καὶ δυνάμεις δ̄ πρὸς δ° ᾱ μ° δ̄. λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον. καὶ εἰσὶν αἱ δυνάμεις δ̄ τετράγωνοι, ὥστε καὶ δ° ᾱ μ° δ̄. ἴσαι τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς° ᾱ μ° α̈. ὅθεν ὁ ς° μ° α̈. ᾱ ς°. ἵνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων. ὁ μὲν μ° β̄. ᾱ δ°. ὁ δὲ μ° δ̄. ὁ δὲ τυχὼν μ° κδ̄ δ°. καὶ πάντα τετράκις. γίνεται ὁ μὲν μ° ϟ̄. ὁ δὲ μ° ις̄. ὁ δὲ τυχὼν μ° κδ̄. ἀναπέρχομεν ὅθεν τὸ ἐξ ἀρχῆς, καὶ τάττομεν τὸν τριῶν τετραγώνων. ἓν μὲν δ° ᾱ. ὃν δὲ μ° ϟ̄. ὃν δὲ μ° ις̄. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων δ° δ° ᾱ μ° πλζ̄. ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δ° ᾱ. λείψει μ° κδ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς μ° ιβ̄ ᾱ. τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE tres quadratos, vt compositus ex ipsorum quadratis, faciat quadratum. Statuatur quæsitorum vnus 1 Q. alter 4. alter 9. & fit compositus ex eorum quadratis 1 QQ. + 97. æqualis quadrato à latere 1 Q. — 10. & fiunt reliqui 20 Q. æquales 3. & si horum multiplicatione quadratus fieret, soluta esset quæstio. Eò itaque res rediit, vt inueniantur duo quadrati, & numerus quidam, vt qui ab eo fit quadratus, detractis quadratis duorum quæsitorum quadratorum, numerum faciat, qui ad duplum numeri ab initio sumpti rationem habeat quæ est quadrati ad quadratum. Ponantur quæsiti quadrati vnus 1 Q. alter 4. & arbitrarius numerus sit 1 Q. + 4. & huius quadratus detractis illorum quadratis, relinquit 8 Q. Hoc volumus ad duplum 1 Q. + 4. hoc est ad 2 Q. + 8. rationem habere quadrati ad quadratum. Omnium semissis sumatur. Igitur & 4 Q. ad 1 Q. + 4. rationem habebit quadrati ad quadratum. Sunt autem 4 Q. quadratus. Proinde & 1 Q. + 4. æquantur quadrato à latere 1 N. + 1. Vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. erit ergo quæsitorum quadratorum, alter 2 $\frac{1}{4}$. alter 4. oblatus numerus $\frac{1}{4}$. & omnia quater. Erit alter 9. alter 16. arbitrarius 25. Recurramus ad propositum initiò, & statuamus trium quadratorum vnum 1 Q. alterum 9. tertium 16. & fit compositus ex ipsorum quadratis 1 QQ. + 337. Hæc æquantur quadrato à latere 1 Q. — 25. vnde fit 1 N. $\frac{13}{2}$. Reliqua sunt manifesta.

OBSERVATIO D. P. F.

CVr autem non quærat duo quadratoquadrata quorum summa sit quadratus. Sanè hæc quæstio est impossibilis, vt nostra demonstrandi methodus potest haud dubie expedire.

IN QVAESTIONEM XXXII.

SVBTILITER Diophantus ſoluit propoſitum lemma quo quærit duos quadratos, & præterea numerum à cuius quadrato auferendo quadratos duorum quæſitorum quadratorum, reſiduum ad duplum eiuſdem numeri ſit in ratione quadrati ad quadratum. Etenim ponit quæſitum numerum 1 Q. + 4. At quæſitos quadratos 1 Q. & 4. ſic enim auferendo horum quadratos, à quadrato illius numeri ſupereſt 8 Q. qui ad 2 Q. + 8. debet eſſe in ratione quadrati ad quadratum; quare & horum ſemiſſes, puta 4 Q. & 1 Q. + 4. erunt rurſus in ratione quadrati ad quadratum, cùm non mutetur proportio. Ac proinde cum 4 Q. ſit quadratus, oportet & 1 Q. + 4. eſſe quadratum, cuius latus eſto 1 N. + 1. fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Sunt ergo quæſiti quadrati $\frac{1}{4}$ & 4. at quæſitus numerus $\frac{25}{4}$. & ad vitandas fractiones, omnia per 4. multiplicantur, fiuntque quæſiti quadrati 9. & 16. quæſitus numerus 25. Statuentes ergo alterum quadratorum 1 Q. alterum 9. tertium 16. fit ſumma compoſiti ex eorum quadratis 1 QQ. + 337. æqualis quadrato à latere 1 Q. − 25. & fit 1 N. $\frac{12}{1}$. Sunt itaque quæſiti quadrati $\frac{144}{169}$. 9. 16. ſumma quadratorum ab ipſis ortorum eſt $\frac{3721}{169}$. quadratus vtique à latere $\frac{61}{13}$.

Porrò animaduerſione dignum eſt quadratos, qui per aſſumptum lemma quæruntur eſſe ſemper quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli, & numerum quæſitum eſſe ſemper quadratum hypotenuſæ, ſeu ſummam eorundem quadratorum, vt vides in hypotheſi Diophantæa quadratos reperiri 9. & 16. At quæſitum numerum eſſe 25. Et tres huiuſmodi quadratos ſemper ſoluere lemma propoſitum ſic demonſtrabitur. Sint quadrati A B. quorum ſumma C. ſit etiam quadratus. Et à quadrato ipſius C. auferantur quadrati ipſorum A B. & ſuperſit G. ſumatúrque H. duplus ipſius C. dico G. ad H. habere rationem quadrati ad quadratum. Sit enim D. productus ex A. in B. eritque D. quadratus cùm fiat ex quadrato in quadratum. Itaque quia C. æquatur ipſis A B. ſimul, erit quadratus ipſius C. æqualis quadratis ipſorum A B. & duplo ipſius D. Quare cùm auferendo quadratos ipſorum A B. à quadrato ipſius C. ſuperſit G. erit G. duplus ipſius D. Ergo cùm & H. ſit duplus ad C. erit G. ad H. ſicut D. ad C. ſed D. & C. ſunt quadrati. Igitur ratio G. ad H. eſt ratio quadrati ad quadratum. Quod oſtendendum erat. 4. ſecundi.

G. 288. H. 50.
A 9. B 16. C 25.
D 144.

Hinc elicitur Canon facillimus ad ſoluendum propoſitam quæſtionem.

Sume pro duobus quæſitorum quadratorum, quadratos laterum circa rectum trianguli rectanguli. Tum diuide productum mutuo ductu eorundem, per quadratum hypotenuſæ; orietur tertius.

Verbi gratia, expoſito triangulo rectangulo 5. 12. 13. Erunt duo ex quæſitis quadratis 25. & 144. & quia ducto 25 in 144. fit 3600. diuiſo eo per quadratum hypotenuſæ, puta per 169. fit tertius quæſitorum $\frac{3600}{169}$. & ſoluta eſt quæſtio. Nam trium quadratorum quadrati ſimul faciunt $\frac{4826809}{169}$. quadratum à latere $\frac{2197}{169}$.

QVÆSTIO XXXIII.

ΟΚΤΑΔΡΑΧΜΟΥΣ καὶ πενταδράχμους χόας τις ἔμιξε,
Τοῖς θεραπόλοισι πιεῖν χρῆς' ἀποταξάμενος.
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ἑκὰς πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἀποταχθείσας δ' ἑξάμβους μονάδας,
Καὶ πεῖνται πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κπεσάμβους πλευρὰ συνθεὶς ἀμφὶ χόων.
Ὡς εἰδέναι, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέροις παῖ λέγε πενταδράχμους.

DRACHMARVM quinque, & drachmarum miſcuit octo
Quis choeas, famulis vina bibenda ſuis.
Pro cunctis pretium, numerum præbens tetragonum,
Qui præfinitas ſuſcipiens monadas
Diuerſum dat quadratum. Sed ſumma choarum
Illius exæquat conſtituitque latus.
Dic age quot choeas drachmarum comparat octo,
Drachmarum choeas, dic age, quinque, puer.

Τὸ σημαῖνον διὰ τῆς ἐπιγράμματός ἐστι τοιοῦτον. ἠγόρασέ τις δύο ἀσκοὺς οἴνου. ὧν μιᾶς τῆς ἀσκὸς ὁ χοῦς δραχμῶν η. ὧν δὲ τῆς ἀσκὸς τὸν χοῦν δραχμῶν ε. καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμὸν, ᾧ προσκείμενος μ̄ ξ̄. ποιεῖ τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τ̄ χοίων. διάστησον τὰς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους. ἔστω τὸ πλῆθος τῶν χοίων ς̄ ᾱ. ὥστε ἡ τιμὴ γενήσεται δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ ξ̄. λοιπὸν δεῖ δ̄ ᾱ ϛ μ̄ ξ̄. ποιῶ οὖν τετράγωνον. καὶ δεῖ πάσειν τὴν τῆς τετραγώνου πλευρὰν ὑπὸ ς̄ ᾱ. λείψει μ̄ ὅπου δ' ἔπεσεν. ἀλλὰ ἐπεὶ ἡ δ̄ ᾱ ϛ λήψασα μ̄ ξ̄. σύγκειται ἐκ δύο τινῶν ἀριθμῶν τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, καὶ τὸ πέμπτον τῆς τιμῆς τῶν πενταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τ̄ πενταδράχμων, τὸ ἓν ὄγδοον τῆς τιμῆς τῶν ὀκταδράχμων, ποιεῖ τὸ πλῆθος τ̄ ὀκταδράχμων. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν χοίων συνεπέσαντων ποιεῖ ς̄ ᾱ. γίγνεται σὺν τὸν δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ ξ̄. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ὅπως τὸ τῆ ἑνὸς πέμπτου, καὶ τὸ τῆ ἑτέρου ὄγδοον ποιῇς ᾱ. καὶ τοῦτο ἓν δὲ πάντοτε δύνασθαι, εἰ μὴ καταπεσεῖται ὁ ς̄ μείζων μὲν τῆ ὀγδόου δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ ξ̄. ἐλάσσων ἓν τῆ πέμπτου δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ ξ̄. ἴσαι ἄρα δ̄ λείψει μ̄ ξ̄. μείζων ϛ ε̄. ἐλάσσων ἓν ϛ ῑ. ἐπεὶ οὖν δ̄ ᾱ. λείψει μ̄ ξ̄. μείζων ἐστὶν ϛ ε̄. κοινὴ προσκείσθωσαν μ̄ ξ̄. ὥστε κὸ δ̄ ᾱ. μείζων ἐστὶν ϛ ε̄. μ̄ ξ̄. ὥστε κὸ δύναμις ᾱ. ἴσου ἐστὶν ϛ ε̄. καὶ ἀριθμῷ τινι μείζονι μ̄ ξ̄. ὥστε δῆπου τὸν ἀριθμὸν μείζονα ἕξει, ἢ ἴσον ἐλάσσονα μ̄ ια. πάλιν ἐπεὶ ἡ δύναμις ᾱ. λείψει μ̄ ξ̄. ἐλάσσων ἐστὶν ϛ ῑ. καὶ προσκείσθωσαν μ̄ ξ̄. ὥστε δ̄ ᾱ. ἴσου ἐστὶν ϛ ιᾱ. καὶ ἀριθμῷ τινι ἐλάττονι μ̄ ξ̄. ὅθεν δεῖ τὸ ς̄ διῃρῆσθαι μὴ μείζονα μ̄ ιβ̄. διῄρηται γὰρ μὴ ἐλάττονα μ̄ ια. ὥστε δῆπου τὸν ς̄ δυσὶ μείζονα μὲν μ̄ κᾱ. ἐλάσσονα ἢ μ̄ ιβ̄. ἐὰν ἓν ζητῶμεν δ̄ ᾱ λείψει μ̄ ξ̄. ἵνα τετραγώνῳ πλάσωμεν τὴν τῆς τετραγώνου πλευρὰν ὑπὸ ς̄ ᾱ. λείψαντος μονάδας τινάς, καὶ γίνεται ὁ ς̄ ἐκ τινος ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτὸν ἡρημένου, καὶ προσλαβόντος μ̄ ξ̄. καὶ προσληφθέντος ἀφ' ἑαυτὸν διπλασίονα αὐτοῦ, καὶ ἀπαγομένου εἰς τὸ δυσὶ ἕνα ἀριθμὸν ὑπερέχοντος ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος προσλαβὼν μ̄ ξ̄. καὶ προσληφθεὶς ἀφ' ἑαυτὸν διπλασίονα αὐτοῦ, τὴν προσβολὴν ποιῇ μείζονα μὲν μ̄ ια. ἐλάσσονα ἢ μ̄ ιβ̄. καὶ ἐὰν τὰ ξῶμεν

QVOD significatur hoc epigrammate tale est. Quidam emit duos cados vini: vnius quidem choam drachmis 8. alterius verò choam drachmis quinque, & pro omnibus pretium persoluit numerũ quadratum, cui addẽdo 60. fit quadratus latus habens multitudinem choarum. Distingue nunc choas octo drachmarũ, à chois quinque drachmarũ. Esto choarum multitudo 1 N. Ergo pretium erit 1 Q — 60. Restat vt 1 Q — 60. æquetur quadrato, & oportet huius quadrati latus ponere 1 N. cum defectu aliquot vnitatum. Sed quoniam 1 Q — 60. componitur ex duobus numeris, pretij scilicet choarum quæ cõstant octo drachmis, & pretij choarum quæ constant quinque drachmis, & huius pretij quinta pars, facit multitudinem choarum constantium quinque drachmis; sicut illius pretij octaua pars facit multitudinem choarum constantium octo drachmis; at multitudo omnium choarum est 1 N. Oportet 1 Q. — 60. diuidere in duos numeros, ita vt vnius quintans cum alterius octante faciat 1 N. Atqui hoc fieri non potest nisi 1 N. inueniatur maior octante de 1 Q — 60. minor autem quintante eiusdem 1 Q — 60. Erit ergo 1 Q — 60. maior quàm 5 N. minor quam 8 N. Quia igitur 1 Q — 60. maior est quàm 5 N. adiiciantur vtrimque 60. Igitur 1 Q. maior est quàm 5 N + 60. Proinde 1 Q. æquatur 5 N. & numero alicui maiori quam 60. Quare oportet 1 N. maiorem esse, vel saltem non minorem quàm 11. Rursum quoniam 1 Q — 60. minor est quàm 8 N. addantur vtrimque 60. Ergo 1 Q. æqualis est 8 N. & numero alicui minori quàm 60. Vnde oportet 1 N. reperiri non maiorem quàm 12. At demonstratum est non minorem esse debere quàm 11. Oportet igitur 1 N. inueniri maiorem quàm 11. minorem quàm 12. si autem velimus 1 Q — 60. æquare quadrato, fingemus quadrati latus 1 N. cum defectu aliquot vnitatum, & fiet 1 N. ex aliquo numero in se ducto, & adsumente 60. & per sui duplum diuiso. Eò itaque res deducta est, vt inueniendus sit numerus, cuius quadratus si adscisat 60. & summa per duplum ipsius numeri diuidatur, fiat

quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. & si quæsitum statuamus 1 N. oportebit 1 Q + 60. diuidentes per 2 N. facere quotientem maiorē quam 11. minorem quam 12. Oportet ergo 1 Q. + 60. diuiso per 2 N. quotientem fieri maiorem quàm 11. Quare 1 Q + 60. maior fit oportet quàm 22 N. Proinde 22 N. æquales sunt 1 Q. & numero alicui minori quàm 60. Quare non debet 1 N. minor esse quàm 19. Rursus oportet 1 Q + 60. diuidentes per 2. N. quotientem fieri maiorem quam 12. Quare 1 Q + 60. minor est quam 24 N. Proinde 24 N. æquantur 1 Q. & numero alicui maiori quam 60. Vnde oportet 1 N. minorem esse quam 21. Sed & ostensum est maiorem esse debere quàm 19. Oportet ergo quadratum æqualem 1 Q − 60. parantes, latus statuere 1 N − 20. Vnde inuenitur 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. Quadratus eius 132 $\frac{1}{4}$. Tollo 60. relinquuntur 72 $\frac{1}{4}$. Oportet ergo diuidere 72 $\frac{1}{4}$. in duos numeros, vt prioris quintans, cum octante posterioris faciat 11 $\frac{1}{2}$. Esto quintans prioris 1 N. Erit ergo posterioris octans 11 $\frac{1}{2}$ − 1 N. Ipsi ergo erunt, alter 5 N. alter 92 − 8 N. Hæc simul æquantur 72 $\frac{1}{4}$. & fit 1 N. $\frac{25}{69}$. Multitudo ergo choarum constantium quinque drachmis erit $\frac{25}{69}$. At multitudo choarum constantium octo drachmis erit $\frac{40}{69}$. Et reliqua sunt manifesta.

τὸν ζητούμενον ς^{ον} ᾱ. δεῖ δ^{ους} ᾱ. μ^{ους} ξ̄. μερίζοντας ἀπὸ ς^{ου} β̄ τὴν ἀπὸβολὴν ποιεῖν μείζονα μὲν μ^{ους} ιᾱ. ἐλάσσονα δὲ μ^{ους} ιβ̄. δεῖ οὖν δ^{ους} ᾱ. μ^{ους} ξ̄. μερίζοντας ἀπὸ ς^{ου} β̄ ἀπὸβολὴν ποιεῖν μείζονα μ^{ους} ιᾱ. ὥστε δ^{ους} ᾱ. μ^{ους} ξ̄. μείζων ὀφείλουσιν εἶναι ς^{ος} κβ̄. ὥστε ς^{ος} κβ̄ ἴσοι εἰσὶ δ^{ους} ᾱ. ᾧ ἀριθμῷ πάλιν ἐλάσσονι μ^{ους} ξ̄. ὥστε ὁ ς^{ος} οὐκ ὀφείλει εἶναι ἐλάσσων μ^{ους} ιϑ̄. πάλιν δεῖ δ^{ους} ᾱ. μ^{ους} ξ̄. μερίζοντας ἀπὸ ἀριθμοῦ β̄. τὸν ς^{ον} διρεῖν ἐλάσσονα μ^{ους} ιβ̄. ὥστε δύναμις ᾱ μ^{ους} ξ̄. ἐλάσσους εἰσὶν ἀριθμοῦ ρκδ̄. ἀριθμοὶ ἄρα κδ̄. ἴσοι εἰσὶν δ^{ους} ᾱ. ᾧ ἀριθμῷ πάλιν μείζονι μ^{ους} ξ̄. ὅθεν ὁ ἀριθμὸς ὀφείλει ἐλάσσων εἶναι μ^{ους} κᾱ. ἀλλὰ καὶ μείζων μ^{ους} ιϑ̄. ὥστε δεῖ δυνάμει ᾱ. λείψει μ^{ους} ξ̄. ἴσον τετράγωνον ποιοῦντα πάσειν τὴν τῶ τετραγώνου πλευρὰν ἀπὸ ς^{ου} ᾱ. λείψει μ^{ους} ᾱ. ὅθεν διρήσεται ὁ ς^{ος} μ^{ους} ιᾱ. ᾱ ς^{ος}. ὁ τετράγωνος ρλβ̄. ᾱ δ^{ους} ἄρα μ^{ους} ξ̄. λοιπαὶ μ^{ους} οβ̄. ᾱ δ^{ους}. δεῖ οὖν τὰς μονάδας οβ̄. ᾱ δ^{ους}. διελεῖν εἰς δύο ἀριθμούς, ὅπως τὸ τῶ πρώτου πέμπτον, μετὰ τῶ τῶ δευτέρου ὀγδόου ποιῇ μ^{ους} ια. ᾱ ς^{ος}. ἔστω τὸ τῶ πρώτου πέμπτον μέρος ς^{ον} ᾱ. τὸ ἄρα τῶ δευτέρου ὄγδοον ἴσαι μ^{ους} ια. ᾱ ς^{ος}. λείψει ς^{ος} ᾱ. αὐτὰ ἄρα ἴσονται, ὁ μὲν ς^{ος} ι. ὁ δὲ μ^{ους} ρξβ̄. λείψει ς^{ος} ῑ. ταῦτα ἴσα οβ̄. ᾱ δ^{ους}. ἴσαι ὁ ς^{ος} μ^{ους} οϝ ις^{ος}. τὸ ἄρα πλῆθος τῆς πενταδράχμων χοίνικες ἴσαι οϝ ις^{ος}. τὸ δὲ τῆς ὀκταδράχμων χοίνικες νζ ις^{ος}. Καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVAESTIONEM XXXIII.

QVOT mendas hinc sustulerimus æquo lectori æstimandum relinquo, qui nostram cum versione Xilandri contulerit. Sanè vt omittam reliqua, vbi legebatur in codice manu exarato, τοῖς ὀβολοῖς ποιεῖν χρησὸν ἀποταξάμενον, reposuimus flagitante sententia & lege metri, τοῖς ἀφοπολοῦσι πιεῖν χρησὸν ἀποταξάμενον, & vbi legebatur τὰς ὀκταδράχμους ποιήσουν, emendauimus τὰς ὀκταδράχμους πάσαι ἴσαν. Vtrumque ex sententia Salmasij nostri. Porrò emendato textu, non magna hic est difficultas, quæ tamen animaduersione digna censeo, hæc sunt.

Primò, quod ait Diophantus 1 Q − 60. non posse diuidi in duas partes, ita vt alterius quintans cum alterius octante faciat 1 N. nisi 1 N. statuatur maior octante, minor autem quintante ipsius 1 Q − 60. perspicuum est ex adnotatis ad quintam primi, cuius hîc auxilium implorare cogimur, & cui huiusmodi conditionem præscripsit author.

Secundò ritè infert. Si quintans de 1 Q − 60. est maior quàm 1 N. ipse 1 Q. − 60. maior est quàm 5 N. & rursus si octans de 1 Q − 60. est minor quàm 1 N. ipse 1 Q. − 60. minor est quàm 8 N. Vt ergo inueniantur termini intra quos consistere debet valor numeri, vtendum artificio quo ad quadragesimā quintam quarti, & alibi sæpè vsi sumus. Etenim quia 1 Q − 60 maior est quàm 5 N. addendo vtrimque 60. fit 1 Q maior quàm 5 N. + 60. & tandem fit 1 N. maior quàm ℞ 66 $\frac{1}{2}$ + 2 $\frac{1}{2}$. seu per approximationem maior quàm 11. Similiter si 1 Q. − 60 statuatur minor quàm 8 N. fiet 1 N. minor quàm ℞ 76 + 4. seu per approximationem minor quàm 12. Concludit ergo Diophantus 1 N. cadere debere inter 11. & 12. Quod non ita accipiendum est, vt 11. & 12, exactissimi termini censeantur, cùm enim non possint in rationalibus præscribi exactè huiusmodi termini, satis habuit Diophantus tales præscribere intra quos ritè sumi possit valor numeri. Cæterùm si exactiores requirantur, assignari poterunt 10 $\frac{1}{2}$. & 12 $\frac{1}{2}$. Malè autem assignaueris 10. & 13. cùm inter eos cadant infiniti numeri, qui nequaquam sumi possunt pro valore numeri.

Denique cum fingendo latus quadrati 1 Q − 60. fiat valor numeri, cuidam quadrato addendo 60. & ſummam diuidendo per duplum lateris illius, patet quærendum eſſe numerum per cuius duplum diuidendo quadratum ipſius, auctum numero 60. fiat quotiens maior quàm 11. minor quàm 12. Poſito ergo tali numero 1 N. fit vtique $\frac{1\,Q+60}{N}$ maior quàm 11. minor quàm 12. & omnia ducendo in 2 N. fit 1 Q + 60. maior quàm 22 N. minor quàm 24. N. Et vtraque æquatione per approximationem reſoluta, conſtat quæſitum numerum maiorem eſſe debere quàm 19. minorem quàm 21. Quare ſumit Diophantus 20. & ponit quadrati 1 Q. − 60. latus 1 N − 20. vnde fit 1 N. 11 $\frac{1}{2}$. ſumma ſcilicet choarum. Ergo totum pretium eſt quadratus 72 $\frac{1}{4}$. Quare ſupereſt vt diuidamus 72 $\frac{1}{4}$ in duas partes, ita vt quintans vnius cum octante alterius faciat 11 $\frac{1}{2}$. Hoc exequitur Diophantus per operationem quintæ primi, & reliqua ſunt manifeſta.

Porrò quod terminos ſtatuit 19. & 21. intra quos ſumi debet vnitatum numerus in latere fictitio ponendus, non ſic etiam accipiendum eſt, quod putet exactiſſimos eos eſſe, nam ſi libet exactiores præſcribentur 18 $\frac{1}{2}$ & 22 $\frac{1}{2}$. Quare huiuſmodi numerus poni poterat 19. atque etiam 21. vel 22. vel quiſlibet alius intra præſcriptos limites. Nequaquam autem 18. vel 23. vt & ratio & experientia dictat.

Quoniam verò argutum epigramma, incertum an ab ipſo confictum, vel ab alio quopiam mutuatum, nobis exhibuit Diophantus, placet hoc loco elegantiſſima aliquot epigrammata proferre, non inuicundas quæſtiones de rebus arithmeticis continentia, quæ nondum edita fuerunt, quæque pridem è codice probatiſſimo Palatino excerpta tradidit nobis vir eruditiſſimus Claudius Salmaſius, clariſſimum Burgundiæ noſtræ lumen. His ſubiiciemus verſionem noſtram totidem verſibus exaratam, feliciter, an ſecus iudicent Muſarum alumni. Tum breuiter quæſtiones ipſas explicabimus. Cætera quæ vel ad Græci ſermonis ornatum ſpectant, vel reconditæ quid ſapiunt eruditionis Salmaſio noſtro relinquemus, qui breui, vt ſtudioſos ſperare iubeo, Anthologiam innumeris auctam Epigrammatis, magno reipublicæ literariæ incremento, in lucem proferet. Vnum eſt quod moneam, maximam horum epigrammatum partem Metrodoro tribui, quibuſdam verò, alia nomina eſſe præfixa, quædam denique incertos habere authores.

I.

Ολβιε Πυθαγόρη Μουσέων Ελικώνιον ἴρυθ-
Εἰπέ μοι εἰρομένῳ ὁπόσοι σοφίης κατ' ἀγῶνα
Σοῖσι δόμοισιν ἔασιν, ἀεθλεύοντες ἄεισα.
Τοὶ δὲ ἐγὼν εἴποιμι Πολύκρατες. ἡμίσεις μὲν
Ἀμφὶ καλὰ στυδύουσι μαθήματα. τέτρατοι αὖτε
Ἀθανάτου φύσεως πεπονήαται. ἑβδομάτοις δὲ
Σιγὴ πᾶσα μέμηλε, ϲ ἄφθιτοι ἔνδοθι μῦθοι.
Τρεῖς δὲ γυναῖκες ἔασι, Θεανὼ δ' ἔξοχος ἄλλων.
Τόσσους Πιερίδων ἱεροφάντορας αὐτὸς ἀείσω.

Dic Heliconiadum decus ô ſublime ſororum
Pythagora, tua quot tyrones tecta frequentent
Qui ſub te Sophiæ ſudant in agone magiſtro.
Dicam, tuque animo mea dicta Polycrates hauri.
Dimidia horum pars præclara mathemata diſcit
Quarta immortalem naturam noſſe laborat.
Septima ſed tacitè ſedet, atque audita reuoluit.
Tres ſunt fœminei ſexus; At prima Theano.
Pieridum arcanis tot vates imbuo ſacris.

Hic perſpicuum eſt numerum quæri, cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. & $\frac{1}{7}$. ſimul adſumpto ternario ipſum quæſitum numerum conſtituant. Ponatur is 1 N. ergo $\frac{1}{2}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{7}$ N. & præterea 3. hoc eſt $\frac{11}{28}$ + 3. æquantur 1 N. vnde fit 1 N. 28. quæſitus numerus diſcipulorum. Nam eius $\frac{1}{2}$ eſt 14. At $\frac{1}{4}$ eſt 7. Demum $\frac{1}{7}$. eſt 4. quorum ſumma 25. adſciſcens 3. conficit ipſum 28. vt requirebatur. Quoniam verò multæ quæſtiones eiuſdem naturæ deinceps proponentur, ad eas ſoluendas eſto vniuerſalis Canon.

Sume minimum numerum qui habeat datas partes, tum illius datas partes ſimul aufer ab eodem numero, per reſiduum diuide datum numerum in ipſa expreſſum quæſtione, quotientem ducito in ſumptum ab initio numerum, fiet quæſitus numerus.

Vt in propoſita quæſtione, minimus numerus qui habeat $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. eſt 28. à quo aufer $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{7}$. illius, puta 25. relinquitur 3. per quem diuide 3. numerum in quæſtione expreſſum, fit quotiens 1. quem ducito in ipſum 28. fit quæſitus numerus 28.

II.

Α Κύπρις ἡ Ἐρωτα καταφιόωτα σεσηνυδα.
Τίπτε τοι ὦ τέκος ἄλγος ἐπέχραεν; ὃς δ' ἀπαμειπτο.
Πειρίδες μοι μῆλα διήρπασαν ἄλλυδις ἄλλη
Λιυόμβραι κάλπαιο· τὰ δὴ φέρον ἐξ Ελικῶνος.
Κλειὼ μὲν μήλων πέμπτον λάβε· δωδέκατον δὴ
Εὐτέρπη· ἀτὰρ ὀγδοάτῳ λάχε δῖα Θάλεια.
Μελπομένῃ δ' εἴκοσθ' ἀπάντυτο. Τερψιχόρητε
Τίξατεν. ἑβδομάτῳ δ' Ερατὼ μετεκίαθε μοίρῃ.
Η δὴ τεσσόντων με Πολύμνια τόσφιτε μήλων.
Οὐρανίη δ' ἑκατόν τε ᾗ εἴκοσι. Καλλιόπη δὴ
Βειθυνίδι μήλοισι τεσσοσίοισι βέβηκε.
Σοὶ δ' ἄρα κευφοτέρῃσιν ἐγὼ σὺν χερσὶν ἑκάτῳ
Πυτήκοντα φέρων τάδε λείψανα μῆλα θυάων.

Talibus aggreditur mœrentem Cypris Amorem.
Ecquis, nate, animo dolor insidet? Ille ita contrà.
Diripuere sinu Libethrides vndique adortæ
Decerpta ex Helicone sacro quæ mala ferebam.
Clio malorum quintante, duodecimaque
Euterpe, octaua sed gaudet parte Thalia.
Melpomenæ cessit vicesima; Nomen habenti
A me, septima. Terpsichore quadrante potitur.
Triginta me multauit Polyhymnia malis.
Vranie centum viginti. Calliopeque
Improbior, raptis discessit onusta tricenis.
Ecce tibi manibus vacuis occurro, dearum
Relliquias, quinquaginta vix mala reportans.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{4}$. simul, adsumptis numeris 30. 120. 300. 50. conficiant ipsum quæsitum numerum. Quare per Canonem supra traditum sumo minimum qui habeat datas partes, puta 840. suntque illius partes datæ 168. 70. 105. 42. 120. 210. quarum summa 715. qua detracta de 840. manet 125. per quem diuido summam datorum numerorum 30. 120. 300. 50. puta 500. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 840. fit quæsitus numerus 3360. malorum scilicet multitudo.

III.

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθους φέρον, ἐν δ' ἑκάστῳ
Ἴσον ἦλυ πλῆθος. Μῶσαι σφίσιν ἀντιβόλησαν
Εὐτέκα, καὶ μήλων σφέας ἤτεον. αἱ δ' ἄρ' ἔδωκαν
Ἴσον ἑκάστῃ πλῆθος, ἔχον δ' ἴσα ἐντέκα καὶ ξείς.
Εἰπὲ πόσον δ' ὦκαν, ὅπασως δ' ἴσα πᾶσαι ἔχωσιν.

Mala ferunt calathis Charites, æqualia cuique
Mala insunt calatho. Musarum his obuia turba
Mala petunt: Charites cunctis æqualia donant.
Tunc æqualia tres contingit habere, nouemque.
Dic quantum dederint, numerus sit vt omnibus idem.

Sensus est. Singulæ Charites habent eundem seu æqualem malorum numerum, & quælibet tradit singulis musarum æqualem numerum, hacque demum contributione facta, quælibet Charis & quælibet Musa, eundem reperitur habere numerum. Soluitur autem quæstio si iungas numerum

Charitum atque Musarum, puta 3. & 9. vnde fit 12. Quare dicendum quamlibet Charitum ab initio habuisse mala 12. vel numerum quemlibet malorum qui sit multiplex ad 12. hac tamen lege vt si sumas 12. quælibet Charis cuilibet Musæ tribuat malum vnum; si sumas 24. quælibet Charis tribuat cuilibet Musæ mala duo, & sic deinceps. Verbi gratia Ponamus. Charitum quamlibet habuisse ab initio mala 24. & dare singulis Musis mala 2. Ergo quælibet Charis tribuet Mala 18. quia sunt nouem musæ, ac proinde cuilibet Chariti relinquentur mala 6. At quælibet musa accipiens Mala 2. à qualibet Charite, habebit etiam mala 6. vt euidens est. Quare patet propositum.

IV.

Τεῦξόν μοι στέφανον, χρυσὸν, χαλκόντε κεράσας,
Καστίτερόν τ' ἅμα τοῖσι, πολύκμητόν τε σίδηρον
Μνᾶς ἑξήκοντα. χρυσὸς δ' ἐχέτω μὲν χαλκῶ
Δεκὰ μέρη τεσσῶν. χρυσὸς θ' ἅμα, καστίτερός τε
Τεσσαρὰ μέρη τετόρων. χρυσὸς δ' ἅμα ἢ δὴ σίδηρος
Τόσσα μέρη τῷ πέντε. πόσον δ' ἄρα δεῖ σε περάσαι
Λίξαι τῷ χρυσῷ, χαλκῶ πόσον, ἀλλ' ἔτι λίξαι
Καστιτέροιο πόσον, λοιπῶ πόσον εἰπὲ σιδήρου
Ὡς σε τὸν στέφανον τεύξαι μνᾶς ἑξήκοντα.

Æs, ferrum, stannum miscens, aurique metallum
Sexaginta minas pensantem finge coronam.
Æs aurumque duos simul efficiunto trientes.
Ternos quadrantes stanno mixtum impleat aurum.
At totidem quintas auri vis addita ferro.
Ergo age dic fului quantum tibi coniicis auri
Miscendum, dic quantum æris stannique requiras,
Dic quoque sufficiant duri quot pondera ferri
Præscriptam vt valeas rite efformare coronam.

Esto quantitas auri 1 N. Quia ergo aurum & æs simul sunt $\frac{4}{5}$ de 60. puta 40. erit æris quantitas 40 − 1 N. eadem de causa, erit stanni quantitas 45 − 1 N. & ferri quantitas 36 − 1 N. Quantitas ergo quatuor metallorum simul, erit 121 − 2 N. æqualis 60. vnde fit 1 N. 30 $\frac{1}{2}$. quantitas scilicet auri, ac quantitas æris est 9 $\frac{1}{2}$. stanni 14 $\frac{1}{2}$. ferri 5 $\frac{1}{2}$.

V.

Τὸ τρίτον ἀργυρέοιο σεσόμβαλε κ' τὸ τέταρτον
Τῆς φιάλης εἰς ἴν, ἓ τὸ δυωδέκατον.
Εἰς ἓ κάμινον ἔλκυσε βαλὼν, ἓ πάντα κυκήσας
Ἕξελε μοι βαλὸν, μνᾶν ἓ μοι ἐλκυσάτω.

Sume tibi Phialæ faber ingeniose trientem
Quartamque, & partem sume duodecimam.
Iniice fornaci simul omnia mixta; sed inde
Prodeat vnam æquans pondere massa minam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{12}$. simul conficiant 1. Esto is 1 N. ergo $\frac{1}{3}$ N. $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{12}$ N. simul, hoc est $\frac{1}{2}$ N. æquantur vnitati, vnde fit 1 N. 1 $\frac{1}{2}$. quot minas pendebat Phiala.

VI.

Ἔχω τὸν ἑξῆς, κ' τὸ τῶ τρίτου τρίτον.
Κἀγὼ τὸν ἑξῆς, κ' τὸ τῶ πρώτου τρίτον.
Κἀγὼ δέκα μιᾶς, κ' τὸ τῶ πρώτου τρίτον.

Æquo sequentem cum triente tertij.
Æquat sequens me, iunctus & primi triens.
Supero trientem primi ego decem minis.

Tres

Tres poſtulantur numeri, vt primus, contineat ſecundum & $\frac{1}{3}$ tertij. Secundus contineat tertium & $\frac{1}{4}$ primi. Tertius contineat 10. & $\frac{1}{5}$ primi. Statuatur tertius 1 N. + 10. ergo triens primi erit 1 N. ac proinde primus ipſe 3 N. Quia verò ſecundus continet tertium & $\frac{1}{4}$ primi, ſi tertio puta 1 N. + 10. addas $\frac{1}{4}$ primi, puta 1 N. fiet ſecundus 2 N. + 10. Reſtat vt primus æquetur ſecundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{4}$ N. + 10. addas $\frac{1}{4}$ primi, puta 1 N. fiet ſecundus 2 N. + 10. Reſtat vt primus æquetur ſecundo cum triente tertij. Quare 3 N. æquantur 2 $\frac{1}{4}$ N. + 13 $\frac{1}{3}$. & fit 1 N. 20. Sunt igitur quæſiti numeri 60. 50. 30.

VII.

Τοὺς χιλίους ϛατῆρας οὓς ἐκπσάσθαι
Λαβεῖν καλεῖῶ τὼς ἰδίους παῖδας δύο.
Πλὴν γνησίου τὸ πέμπτον ἐυξήσω δέκα
Μέρου τετάρτου τῷ λαχόντων τῷ νόθῳ.

Quos poſſidere mille ſtateras datum eſt
Sic partiantur præcipio nati duo.
Ex coniuge orti quinta pars, addat ſuper
Quadranti eorum quos nothus ſumet, decem.

Senſus eſt Volo legitimum filium de mille nummis tot accipere, vt eorum quinta pars ſuperet numero 10. quadrantem eorum quos ſumet Nothus. Ergo numerus 1000. diuidendus eſt in duas partes, ita vt quinta pars vnius ſuperet denario quadrantem alterius. Eſto pars vna 1 N. altera 1000 − 1 N. ergo $\frac{1}{5}$ N. + 10. æquari debet quintæ parti de 1000 − 1 N. hoc eſt 200 − $\frac{1}{5}$ N. æquatur $\frac{1}{5}$ N. + 10. & fit 1 N. 422 $\frac{2}{9}$. pars quæ notho cedit. Quare pars quæ legitimo competit, eſt 577 $\frac{7}{9}$.

VIII.

Ἐξ μνᾶν, ἓξ φιάλας Κροῖσος βασιλεὺς ἀνέθηκεν
Δεκάμνῃ τὼν ἑτέρων μείζονα τῆς ἑτέρας.

Mnarum ſex, Phialas ſex Crœſus dedicat, atque
Eſt maior drachma quæque priore ſequens.

Cùm quælibet minea contineat drachmas 100. minæ ſex ſunt 600. drachmæ. Quare numerus 600. diuidendus eſt in ſex partes per continuam vnitatis additionem progredientes. Eſto prima 1 N. erit ſecunda 1 N. + 1. tertia 1 N. + 2. quarta 1 N. + 3. quinta 1 N. + 4. ſexta 1 N. + 5. fit omnium ſumma 6 N. + 15. æqualis 600. vnde fit 1 N. 97 $\frac{1}{2}$. prima pars, ſunt ergo aliæ 98 $\frac{1}{2}$ 99 $\frac{1}{2}$ 100. $\frac{1}{2}$. 101 $\frac{1}{2}$. 102 $\frac{1}{2}$.

IX.

Ὡρονόμων ὄχ' ἄειστε, πόσον παριλήλυθεν ἠοῦς ;
Οσσον ἀποιχομένοιο δύο τρίτα, δὶς τόσα λείπει.

Dic quota nunc hora eſt ? ſuperat tantum ecce diei,
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Antiquorum more diem diuidentes in duodecim partes æquales, ſeu in horas 12. quas Gnomonici Planetarias vocant; Ponamus numerum tranſactarum horarum eſſe 1 N. ergo reliquus horarum numerus vſque ad noctem erit ex quæſtionis lege $\frac{1}{2}$ N. & fiet omnium horarum ſumma $\frac{3}{2}$ N. æqualis 12. Eſt ergo 1 N. 5 $\frac{1}{3}$ numerus ſcilicet horarum tranſactarum, & ſuperſunt vſque ad finem diei horæ 6 $\frac{2}{3}$.

X.

Τίπτέ με τῷ κερόων ἵππειν πληγῇσι πίεζεις
Ω πάτερ, τὰ δὲ πάντα καλὰ διεμοιρήσαιο
Παρθένοι. ἢ γὸ ἐμεῖο Μελίαιον ἕβδομα δειά.
Η δὲ δυωδεκάζων Τιτανὶς λάβεν. ἕκτον ἔχουσι
Καὶ τρίτον Ασυόχη φιλοπαίγμονες, ἢ ἧ Φίλυνται.
Εἴκοσι δ' ἁρπάξασα Θέτις λάβε. δώδεκα Θοίβη.

Ηι ὄρα καὶ δὴ γαλᾶ Γλαύκη παλάμησιν ἔχουσα
Ενδεκα· τῦτο δὲ μοι κάρυον ἐλλείπεται εἶσι.

Quid mihi pro nucibus minitaris verbera mater?
Has pulchræ inter se dispertiuere puellæ.
Septima pars flauæ cessit geminata Melissæ.
Ipsa duodecimam Titane sibi sumpsit, habentque
Sextantem Astyoche, festiua Philinna trientem,
Viginti Thetis, at rapuit Thisbe improba bix sex.
Abstulit & ridens Glauce totidem minus vnâ.
Sed numero ex omni nux hæc mihi denique restat.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}.$ simul adsumentes 20. 12. 11. 1. faciant ipsum quæsitũ numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 84. cuius partes datæ simul additæ, faciunt 73. quo ablato de 84. supereſt 11. per quem diuido summam ipsorum 20. 12. 11. 1. puta 44. fit quotiens 4. quo ducto in sumptum numerum 84. fit quæsitus numerus 336. Nam eius datæ partes sunt 96. 28. 56. 112. quorum summa 292. cui si addas summam datorum numerorum, puta, 44. fit rursus 336. vt postulabatur.

XI.

Πῦ σοι μῆλα βέβηκεν ἐμὸν τέκος; ἓξ μὲν Ινὼ
Δοιὰ, καὶ ὀγδοάτῳ μοῖραν ἔχει Σεμέλη.
Αὐτονόη δὲ τέταρτον ἀφήρπασεν. αὐτὰρ Ἀγαύη
Πέμπτον ἐμῆς κόλπων εἶχατ' ἀπαμιμφύη.
Σοὶ δ' αὐτῇ δέκα μῆλα φυλάσσεται, ἀυτὰρ ἔγωγε,
Ναί μα φίλιον Κύπριν, ἓν τόδε μοῦνον ἔχω.

Dic vbi, Nate, repostâ tibi sunt mala? Trientem
Ino habet, octantem possidet at Semele.
Quadrantem Autonoë sumpsit, properauit Agaue
Quintantem è nostro diripuisse sinu.
Mala decem seruantur adhuc tibi. Testis amica.
Sed Venus; hoc vnum iam supereſſe mihi.

Inueniendus est numerus, cuius $\frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}.$ simul adsumpto 11. conficiant ipsum quæsitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 120. cuius partes datæ simul faciunt 109. quo sublato de 120. supereſt 11. per quem diuido datum numerum 11. fit quæsitus numerus 120. & manifesta est solutio.

XII.

Δριψαμένη πότε μῆλα φίλαις διεδάσατο Μυρτώ.
Χρυσίδι μὲν μήλων πέμπτον πόρε, τέτρατον Ηροί.
Επτακαιδέκατον Ψαμάθῃ δέκατον Κλεοπάτρῃ.
Αὐτὰρ εἰκοστὸν δωρήσατο Παρθενοπείῃ.
Δώδεκα δ' Ευάδνῃ μοῦνον πόριν. αὐτὰρ ἐς αὐτὼ
Ηλυθον ἑκατὸν ἔχαζον καὶ εἴκοσι μῆλα.

Dilectis Myrto diuisit mala puellis.
Heronem quarta, sed donat Chrysida quintâ.
Dat decimam nonam Psamathæ, decimam Cleopatræ.
Pars munus cedit vicesima Parthenopææ.
Bis sex Euadne capit. Ipsi denique tanto
De numero, centum viginti mala supersunt.

Quærendus eſt numerus cuius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{11}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. ſimul adſciſcentes 12. & 120. ſeu 132. faciant ipſum quæſitum numerum. Sumo minimum qui habeat datas partes, puta 380. cuius datæ partes ſimul faciunt 248. quo detracto ab ipſo 380. remanet 132. vnde liquet ipſum 380. eſſe quæſitum numerum.

XIII.

Αιτομβρίαις ποτὶ μῆλα φίλας διεμοιρήσαντο
Ινὼ καὶ Σεμέλη δώδεκα παρθενικᾶς.
Καὶ ταῖς μὲν Σεμέλᾳ πόρεν ἄρπα, ταῖς δ' ἑλιοσκὰ
Δῶκε κασιγνήτη, μῆλα δ' ἔχει πλέονα.
Η μὲν γὰρ τελέσᾳσι τρὶς ἑβδόμα δῶκεν ἑταίραις,
Ταῖς δὲ δύω παίτων πέμπτον ἔδωκε λάχος.
Ενδεκα δ' Αστυόμη μιν ἀφείλατο, καὶ οἱ ὄλεσσεν
Μοῦνα Κασιγνήτοις μῆλα δύω φορέων.
Η δ' ἑτέρη πισύρεσσι πόρεν δύο τέτρασιν ἀμήλων.
Πέμπτῃ δ' ἑπτοίλῳ μοῖραν ἔδωκεν ἔχειν.
Τέσσαρα δ' Εὐρυχόρῃ δῶρα πόρε. τέτρασι δ' ἄλλοις
Μήλοισι Σεμέλη μίμνεν ἀγαλλομένη.

Bis ſenis Ino quondam Semeleque puellis
Pignus amicitiæ mala dedere ſuæ.
Parcior & Semele paria iſtis tradidit. Illis
Imparia exhibuit pluraque mala ſoror.
Quintam malorum partem dedit iſta duabus.
Eſt data virginibus ſeptima trina tribus.
Aſtynomeque decem, ſed & vnum ſumit. At Ino
Germanis retinet bina ferenda ſuis.
Altera bis geminas gemino quadrante puellas
Donat, ſextantem quinta puella capit,
Quatuor Eurychore. Solido Semele quoque gaudet
Quatuor è numero mala relicta ſibi.

Hic duo quæruntur numeri. Nam primum Ino mala ſua ſex puellis ita diſtribuit, vt duabus ſimul det $\frac{1}{3}$. malorum, tribus verò $\frac{1}{7}$. ſextæ autem 11. mala, quo facto remanent ei mala 2. Quare cùm minimus qui habeat datas partes ſit 35. à quo ſi auferas $\frac{1}{3}$. & $\frac{1}{7}$. puta 22. remanet 13. qui æquatur reliquis malis, patet ipſum 35. eſſe numerum malorum quæ habuit Ino. Deinde Semele quatuor puellis ſimul dat duos quadrantes ſeu $\frac{1}{2}$ ſuorum malorum, quintæ dat $\frac{1}{5}$. ſextæ mala 4. quo facto remaneat ei mala 4. Quare ſumpto 12. minimo qui habet datas partes, aufero ab eo datas partes, puta 8. remanet 4. per quem diuido reliqua mala in quæſtione expreſſa, puta 8. fit quotiens 2. quo ducto in ſumptum numerum 12. fit 24. numerus malorum Semeles. Accidit etiam primum numerum 35. eſſe imparem, ſecundum verò 24. eſſe parem & minorem primo, vt requirebat quæſtio.

XIV.

Η καρύη πολλοῖσιν ἰδιεμέρισθεν καρύοισιν
Νεῦ δὲ τις ἑξαπίνης μιν ἀπέθρισεν. ἀλλά τι φησὶν.
Εκ μὲν ἐμεῦ καρύων πέμπτον λάβε Παρθενόπαια.
Οβδοάτον ἧ Φίλιππα φέρει λάχος· ἡ δ' Αγαίπαν
Τέτρατον, ἑβδομάτῳ δ' ἐπεπήρατο Ωρειθυῖα
Εκτέῳ δ' Εὐρυνόμη καρύων ἐδράξατο μοῖραν.
Τεσσαρὰ δ' ἐξ ἑκατὸν Χάριτες διεμοιρήσαντο.
Εννάκι ἧ ἐννέα Μοῦσαι ἰσαῖ λάβον. ἑπτὰ ἧ λοιπὰ
Δῆρις ἀριθμήσασιν ἐφημένα πλοτέρεσσιν.

Quæ succisa iacet, multo nux ardua quondam
Pollebat fœtu, numerumque hac arte recenset.
Nostris ex nucibus quintam sibi Parthenopæa.
Octauamque Philinna capit, quartamque Aganippe.
Septima formosæ conceditur Orithyiæ.
Eurynome sextam è numero sibi vendicat omni.
Centenas ternæ Charites senasque tulere.
Demum Pierides nouies sumpsere nouenas.
Summis in ramis septem tamen ecce supersunt.

Oportet inuenire numerum cuius $\frac{1}{3}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.\frac{1}{7}.\frac{1}{8}.$ simul vnà cum summa numerorum 106. 81. 7. puta cum 194. faciant ipsum numerum qui quæritur. Minimus habens partes datas est 840. à quo si auferas compositum ex datis partibus, puta 743. remanet 97 per quem si diuidas datum numerum 194. fit quotiens 2. quo ducto in sumptum numerum 840. fit quæsitus numerus 1680.

XV.

Ἐπτάλοφον ποτὶ ἄστυ Γαδειρόθεν, ἕκτον ὁδοῖο
Βαίτῃ δύσεως ἄχρις ἐς ἠόνας.
Κεῖθεν δ' αὖ πέμπτον Πυλάδου μὴ φάσιον ὄδας
Ταύρῃ χθὼν βοέης ἄντυ' ἀπ' Αὐσονίης.
Πυρλεύω δὴ τι ἴνδην ἐπ' ὀρθόκραιρα ἴόντι
Οἶδον, ἡ δὲ μοῖς δωδέκατον δικάδος.
Πυρήνης ἢ μισηγὺ καὶ Ἄλπιος ὑψικάρηνος
Τέτρατον. Αὐσονίης αἶψα δυωδέκατον
Ἀρχομένης, ἤλεκτρα φαείνεται Ἠελιάδεσσι
Ὦ μάκαρ ὃς δισσὰς ἤνυσα χιλιάδας
Πρὸς δ' ἔτι πίσσ' ὅσσοι ταῖς ἑκατοντάδας ἴνδην ἐλαύνων
Ἡ γὰ Ταρπαίη μίμβλετ' ἀραιτορίη.

Quisquis adire cupis Romanam Gadibus vrbem,
Sextans ad ripam Bætidis vsque viæ est.
Quintantem hinc numera Phocensis ad arua coloni
A multa regio quæ boue nomen habet.
Inde Pyrenæi præcelsa ad culmina montis
Octans est, decimæ parsque duodecima.
Quarta Pyrenæos, gelidas iacet inter & Alpes.
Parte duodecima hinc incipit Ausonia.
Quâ Phaëtontiades sudant electra sorores.
Sed tamen vlterius millia perge duo.
Restabunt quingenta tibi tum denique, donec
Tarpeio possis sistere colle gradum.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{6}.\frac{1}{7}.\frac{1}{8}.\frac{1}{100}.\frac{1}{4}.\frac{1}{12}.$ simul vnà cum 2500. conficiant ipsum quæsitum numerum. Minimus habens datas partes est 120. & illius datæ partes simul faciunt 100. quo ablato de 120. remanet 20. per quem diuidendo 2500. fit quotiens 125. quo ducto in sumptum numerum 120. fit quæsitus 15000. numerus scilicet stadiorum quæ inter Gades & vrbem Romanam numerat Epigrammatarius.

XVI.

Εὐβλιφάεσσιν ἴκης ἱερὰ χρήδεμνα μύας
Ὄφρα σε παυδαμάτωρ χρυσὸ ἕλκωμι τόσσοι.
Οὐδὲν ἔχω, πίσσεχυμαι δ' ἐπ' ἐκ ἀγαθοῖσι τελάντων

Οἰωνοῖσι, μάτλω δ' ὧκα φίλους ἀνέδας.
Ἥμισυ δ' αὖ, τρίτατον ἢ ℰ ὄγδοον (ὦ πολύμερφοι
Ἀνθρῴπων κῆρες) ἐχθρὸν ἔχητα βλίτω.

Iustitiæ sacras ausus conuellere leges
Vt turgens auro cuncta domante forem,
Nil iam possideo, infidis quia nuper amicis,
Læua mente quater dena talenta dedi.
Nunc quoque semissem, simul octantem, atque trientem
(O duram sortem) barbarus hostis habet.

Quærendus est numerus cuius $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{8}$. simul cum 40. efficiant ipsum quæsitum numerum. Minimus habens datas partes est 24. cuius datæ partes simul faciunt 23. quo detracto de 24. supereſt 1. per quem diuidendo 40. fit 40. quo ducto in 24. fit 960. quæsitus numerus.

XVII.

Πίμπτον μοι κλήρου παῖ λάμβανε, δωδέκατον δὴ
Δέξο δάμαρ. πίσυρες δ' υἷες ὁμοιμόου
Παῖδος, ἀδελφειὴ δύω, ℰ ἀγάστονι μήτηρ
Ἑνδεκάτῳ κλήρου μοῖραν ἕκαστος ἔχε.
Αὐτὰρ ἀνεψιοὶ δύο ἢ δέκα δίχθα τάλαντα.
Εὔβουλος δ' ἑξαπὰ πέντε τάλαντα φίλος.
Πιστοτάτοις δμώεσσιν ἐλευθερίῃ ἢ ἄπονα
Μισθὸν ὑπηρεσίης, τοῖς ἢ δίδωμι τάδε.
Ὠδὶ λαμβανέτωσαν· Ὀνήσιμος εἴκοσι πέντε
Μνᾶς ἐχέτω. Δᾶος δ' εἴκοσι μνᾶς ἐχέτω.
Πεντήκοντα Σύρῳ, Σωσιτὴ δέκα, Τίβιος ὀκτώ.
Ἑπτὰ ἢ μνᾶς Σωσίτῳ παιδὶ δίδωμι Σύρου.
Ἐκ ἢ τριήκοντα κοσμήσατε σῆμα τάλαντα
Ῥίζῃτε δ' εὐδαίῳ ζανὶ θυηπολίῃ.
Διστῶν ἐς δὴ πύρῃ, ℰ ἄλφιτα, ἢ τελαμῶνας,
Εἰκαίῃ δοιδὶ σῶμα χέειν λάβετε.

Assis habe quintam, fili; charissima coniux
Sume duodecimam. Quatuor alterius
Natorum nati, fratres bini, optima mater
Vndecimam partem quilibet accipiat.
Ferte talenta decem patrueles aucta duobus
Noster & Eubulus quinque talenta ferat.
Fidis libertas famulis conceditor, hæcque
Sint longi merces munera seruitij.
Vicenas quinas sibi sumat Onesimus; atqui
Vicenas finitor Dauus habere minas.
Quinquaginta Syrus, capiat quoque Tibius octo:
At Syneto septem sint, Syneteque decem.
Triginta totis tumulum exornate talentis,
Debitaque inferno sacra parate Ioui.
Bina pyræ, cum fasciolis, dapibusque supremis
Artubus vngendis bina talenta dico.

Hic exprimuntur partes $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{11}$. $\frac{1}{12}$. & talenta 12. 5. 30. 2. 2. ac præterea minæ 25. 20. 50. 8. 7. 10. seu

minæ 120. quæ valent talenta duo , quare talentorum expressorum numerus est 53. Porrò minimus qui habeat datas partes est 660. atque idem est numerus qui quæritur, quia si ab eo abstuleris datas illius partes, puta 607. remanet 53.

XVIII.

Τύμβος ἰηὼ, κύθι δὴ πολύστονα τέκνα Φιλίννης,
Τοῖον μαψιτόκων καρπὸν ἔχων λαγόνων.
Πέμπτον ἐν ἡβάοις, τρίταλον δ' ἐνὶ παρθενίκῃσι.
Τρεῖς δὲ μιν ἀρτιγάμους δ' ὤκισε Φίλιννα κόρας.
Λοιποὶ δ' ἡελίοιο παναίμοροι ἠδὲ καὶ αὐδῆς
Τέσσαρες ἐκ λαγόνων εἰς Ἀχέροντα πέσον.

Marmore clauditur hoc proles numerosa Philinnæ,
Fruſtrà maternis edita viſceribus.
Quintantem iuuenes complent ; geminumque puellæ
Sextantem ; nuptas tres tegit iſte lapis.
Quatuor haud viſo ceciderunt ſole ſub orcum
Tranſlati ex vtero , proh dolor ! in tumulum.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{6}$. ſimul cum 7. faciant ipſum quæſitum numerum , & ſtatim per Canonem traditum inuenitur numerus 15.

XIX.

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος, ὦ μέγα θαῦμα
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἐκτὸν κουρίζειν βιότου θεὸς ἄπασι μοίρῃν.
Δωδεκάτῃ δ' ἔπιθεὶς μῆλα πόρει χλοάειν.
Τῇ δ' ἀρ' ἐπ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
Ἐκ τῆ γάμων πέμπτῳ παῖδ' ἐπένευσεν ἔτι.
Αἰαῖ αἷ πηλύγονον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς
Τοῦ ἦ ἓξ ἡ κρυερὸς μέζεν ἐλὼν βιότου.
Πένθος δ' αὖ πεύραισι σαφηνείων ἐπαύτοῖς
Τῇ ἦ πόσου σοφίῃ τέρμ' ἐπέρησε βίου.

Hunc Diophantus habet tumulum, qui tempora vitæ
Illius, mira denotat arte tibi.
Egit ſextantem iuuenis ; lanugine malas
Veſtire hinc cœpit parte duodecima.
Septante vxori poſt hæc ſociatur, & anno
Formoſus quinto naſcitur inde puer.
Semiſſem ætatis poſtquàm attigit ille paternæ
Infelix ſubita morte peremptus obit.
Quatuor æſtates genitor lugere ſuperſtes
Cogitur, hinc annos illius aſſequere.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{2}$. ſimul adſumentes 5. & 4. ſeu 9. faciãt ipſum quæſitum numerum. Is ex tradito Canone inuenietur eſſe 84.

XX.

Πάντες ὅσον βεβίωκε χρόνον, παῖς μὲν τὸ τέταρτον
Διμοίρης βεβίωκε ; γενείσκος ἦ τὸ πέμπτον.

Τὸ τρίτον εἰς ἄνδρας. πολιὸν δ' ὀτ' ἀφίκετο γῆρας
Ἑξήκοντ λοιπὰ ξεῖς ἐ δ'ἔκα γήραος ὑδῷ.

Quadrantem ætatis puerilibus egit in annis
Quintantem iuuenis decurrit, virque trientem
Democharis, cana demum accedente senecta
Bis quinos reliquum vixit tresque insuper annos.

Quæritur numerus, cuius $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{3}$. adsumentes 13. faciunt ipsum quæsitum numerum. Is inuenietur per vsitatum Canonem 60.

XXI.

Οἷον ἀδελφειός με βίησατο, πέντε τάλαντα
Οὐχ ὁσίῃ μοίρῃ πατρικὰ δασσάμενος.
Ἐπτὰ κατηγήτοιο τῶ ἐνδεκάτην πολύδακρυς
Πέμπτον ἔχω μοίρης. Ζεῦ βαθυῶ ὄπτον ἔχεις.

Vim frater facit, in partes nec diuidit æquas
Quæ nobis liquit quinque talenta pater.
Nam multum lachrymans septem illius vndecimarum
Quintam habeo partem. Iupiter ista vides?

Numerus 5. diuidendus est in duas partes, vt prioris quinta pars de $\frac{1}{11}$. seu $\frac{5}{55}$. æquentur posteriori. Esto prior 1 N. posterior 5 − 1 N. ergo $\frac{1}{55}$ N. æquantur 5 − 1 N. & fit 1 N. 4 $\frac{11}{12}$. prior pars. Igitur posterior est $\frac{13}{12}$.

XXII.

Εἶτα κυβερνητῆει, πλατυῶ πόρῳ Ἀδριακοῖο
Τίνων γῆ, ἀλὸς πόσα λείπεται οἰσίπ μίτρα.
Τὸν δ' ἀπαμείβετο. ταῦτα μέσον κριτὸς μετώπου
Κρητάου, Σικελῆς τε Πελωρίδος, ἑξάκι μίτρα
Χίλια, δοιαὶ δ' αὖτε παρεσχεδίοιο δρόμοιο
Πέμπτων διπλάσιοι Σικελῶ ὅτε πορθμίδα λείπει.

Adriacas dum findit aquas, è puppe magistrum
Nauta rogat, quantum pelagi iam restet arandum.
Ille refert. Creten inter Siculumque Pelorum
Millia sex numerant, exhausti iamque profundi
Bis gemini nobis quintantes ecce supersunt
Sicania donec remos lentemus in vnda.

Numerus 6000. secandus est in duas partes, vt prioris $\frac{1}{5}$. æquentur posteriori. Esto prior 1 N. ergo posterior 6000 − 1 N. Quare $\frac{1}{5}$. N. æquantur 6000 − 1 N. & fit 1 N. 3333 $\frac{1}{3}$. prior pars. Igitur posterior relinquitur 2666. $\frac{2}{3}$. Quot stadia restabant vsque ad Pelorum.

XXIII.

Τὸν πισύρων κρηνῶν ὁ μὲν ἤμαρ πλῆσεν ἅπασαν
Δεξαμενὴν, δύο δ' ἄλλοι, ὁδ' ἐν τρισὶν ἤμασιν ἄλλοι,
Τέτρατος ἐν πετόρισι. πόσῳ πλήσουσιν ἅπαντες;

Totum implere lacum tubulis è quatuor, vno
Est potis iste die, binis hic & tribus ille,
Quatuor at quartus. Dic quo spatio simul omnes.

Pone quatuor tubos simul implere totum lacum in 1 N. dierum. Et dic per regulam trium si primus tubus vna die implet totum lacum, seu vnum lacum, quantum implebit in 1 N. diei, inuenies 1 N. eadem ratione reperies secundum tubum implere $\frac{1}{2}$ N. tertium $\frac{1}{3}$ N. quartum $\frac{1}{4}$ N. Quare omnes simul implebunt $\frac{25}{12}$ N. Quare $\frac{25}{12}$ N. æquantur vnitati, & fit 1 N. $\frac{12}{25}$. Quare omnes tubi simul implebunt lacum in $\frac{12}{25}$. diei.

Hinc porro adsoluendas huiusmodi quæstiones formabimus huiusmodi Canonem.

Diuide vnitatem sigillatim per denominatores rationum datarum, rursus per summam quotientum diuide vnitatem, orietur quæsitus numerus.

Vt in proposita quæstione, quia denominatores rationum datarum sunt 1. 2. 3. 4. diuide vnitatem, sigillatim per 1. 2. 3. 4. fient 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. quorum summa $\frac{25}{12}$. per quam rursus diuide vnitatem, fit $\frac{12}{25}$ numerus quæsitus.

XXIV.

Οἰγέ με, καὶ πισύρεσσι ἐσιπλήσω σαρεῦσαν
Δίξαμβλυν ὥρας, χρωσὸς ἄλις σεσρέων.
Δίξιτερὸς δ' ἀρ ἰμεῖο τόσας ὑπολείπεται ὥρας
Ὅφρα μι ἰσπλήσῃ. δὶς δὲ τόσας ὁ τρίτος.
Εἰ δ' ἅμφω σὺν ἰμοὶ σεσχέειν ῥοὸν ἐς μιαν ὄγρις
Ἐν ὀλίγῃ μοίρῃ πλησόμθ' ἡματίῃ.

Me resera, & lymphas profundens quatuor horis
Subiectum implebo protinus ipse lacum.
Æquali dexter spatio, duploque siniſter
Quando fluit, vitreis hunc tubus implet aquis.
Parte sed implemus longè breuiore diei
Vno si mecum tempore vterque fluat.

Per Canonem suprà traditum diuide sigillatim vnitatem per numeros 4. 4. 8. fient quotientes $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. quorum summa $\frac{5}{8}$. per quam si diuidas rursus vnitatem fit $\frac{8}{5}$ quæsitus horarum numerus, quibus tres tubi simul lacum implebunt.

XXV.

Κύκλωψ ὦ Πολύφημος ὁ χάλκεος, οἷα δ' ἐπ' αὐτῷ
Τεύξε τὶς ὀφθαλμὸν, ἢ σόμα, ἢ παλάμην.
Κρυσοῖς συζύξας, σάζοισι δὲ πάμπαν ἔοικεν
Ἡ δ' ἵπ ἐ βλύζων φαίνετ' ἀπὸ σόματος.
Κρυσῷ δ' ἅπας ἄπακτος. ὁ μὲν παλάμης Τρισὶ μίνοις
Ἡμαπ ἰσπλήσῃ δίξαμβλυν σεσρέων.
Ἡμάπος ἥλικης, σόμασδ' ἥματος ἐν δύο πέμπτοις.
Τὶς κ' ἐίπ σεσσοῖς ἰσαθέοιπα χρόνον.

Æreus hic Cyclops Polyphemus. Respice quali
Arte, quis os, oculum finxerit, atque manum.
Occultos parti salientes cuilibet aptans
Effecit gelidas vt iaculentur aquas.
Ordine sed tali. Plenus tribus ecce diebus
Est lacus, è dextræ si fluat vnda tubo.
Vna dies oculo; geminatus sufficit ori
Quintans. Quod spatium sufficit ergo tribus?

Ex lege traditi Canonis diuide sigillatim vnitatem per 3. 1. $\frac{2}{5}$. fient quotientes $\frac{1}{3}$. 1. $\frac{5}{2}$. quorum summa $\frac{25}{6}$. per quam si diuidas rursus vnitatem, fit quæsitus numerus $\frac{6}{25}$. pars diei qua tres tubi simul lacum impleturi sunt.

XXVI.

XXVI.

Ως ἀγαθὸν κρητῆρι θεοὶ περόωσι ῥέεθρον
Οἱ ἦ δύω ποταμοὶ, ἠὲ Βρομίοιο χάεις.
Ισος δ' ὃ πάντεσσι ῥόου δρόμος, ἀλλά μιν οἶος
Νεῖλος μὴ πρηέων ἡμάτιος κορέσῃ,
Τόσσον ὕδωρ μαζῶν ἀπερδίγας. ἐν δ' ἄρα Βάκχῳ
Θυρσὸς ἐνὶ τριτάτοις ἤμασιν οἷον ἰείς.
Σὸν ἦ κίρας Αχελῶι δύ' ἤμασι. νυὶ δ' ἅμα πάντες
Ρεῖτε, ἠὲ σὺν ὤκεσι πλήσετε μὶν ὀλίγαις.

Vt miſcent pariter dulcem in Cratere liquorem
Hinc gemini fluuij, Liber & inde pater.
At non æquali ſpatio tamen influit humor
Vno namque potes nile replere die.
Tantum fundis aquæ è mammis. Tribus ecce diebus
Quod Thyrſo præbes implet Iacche merum.
Binos cornu Acheloë dies fluis. At ſimul omnes
Ite, breui Crater tempore plenus erit.

Diuide ſigillatim vnitatem per 1. 3. 2. fient quotientes 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. quorum ſumma $\frac{11}{6}$. per quam diuide rurſus vnitatem, fit quæſitus numerus $\frac{6}{11}$. pars ſcilicet dici qua tres tubi ſimul craterem implebunt.

XXVII.

Ω γύναι ὡς πενίης ἐπελήσαο. ἦδ' ὑπέκειται
Αἰὶν ἀναγκαίη κέντρα φέρουσα πόνων.
Μηδ' ἐρίων τήθεσκες ἐὴν ἅμαπ. φρισβυτέρην δὲ
Θυγατέρων, ἠὲ μιᾶν ἠὲ τρίτον εἵλκε κρόκης.
Οππότέρην ἦ μὴς φέριν ἤμισυ. νυὶ δ' ἅμα πάσας
Δόρτον ἐφοπλίζει μιηδ' ἐρύσας ὁ κανών.

Te tua paupertas mulier latet? Attamen vrget
Et duri ſtimulos ipſa laboris habet.
Quotidie vnam tu: ſed maior nata ſolebat
Lanæ cum toto nere triente minam.
Nebat nata minor ſemiſſem. Nunc tribus autem
Ex vna vobis cœna parata mina eſt.

Senſus eſt. Mater quotidie nebat minam vnam lanæ. Maior natarum $\frac{1}{3}$. vnius minæ. Minor nata $\frac{1}{2}$ vnius minæ. Nunc tres ſimul nent minam vnam tantum quotidie, quæritur quantum quælibet neat eadem ſeruata proportione. Hoc ergo nil aliud eſt quàm diuidere vnitatem in tres partes ſeruantes eaſdem rationes quas habent inter ſe 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. Quare per Canonem ſecundæ primi adde ſimul 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. fit ſumma $\frac{11}{6}$. per quam diuide vnitatem, fit quotiens $\frac{6}{11}$ quem ducito ſigillatim in ipſos 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. fient quæſiti numeri $\frac{6}{11}$. $\frac{2}{11}$. $\frac{3}{11}$.

XXVIII.

Οἱ ἦ λοιζοχόοι ζεῖς ἑσταότι ἐνθάδ' ἕκαστις
Καλλιρόῃ πέμπουτες ἐπ' ἀρίστιο λοιτρὰ·
Δεξιτερὸς μὲν ἐὼν, πανυπερτάτου ἄντα τοκῆος
Ηματος ἑκταίῃ μοίρῃ ἐνὶ τὸν δὲ κορέσσω.
Λαιὸς δ' αὖ πούρισσιν ἀπ' ἀμφιφορῆος ἐν ὥραις.
Εκ δ' ὁ μέσος τόξοιο καθ' ἥμισυ αὐτὸ τὸ μέσσον.

Φράζιο δ' ὡς ὀλίγῃ κεν ἐνιπλήσαιμεν ἐν ὥρῃ
Ex πλευρόων, τόξου τε, Ϛ ἀμφιφορῆος ἰέντες.

Qui iaculamur aquas tres hîc adſtamus Amores.
Sed variè liquidas Euripo immittimus vndas.
Dexter ego, ſummis & quæ mihi manat ab alis
Ipſum Lympha replet ſolo ſextante diei.
Quatuor aſt horis lævus verſa influit vrna
Dimidiatque diem medius dum fundit ab arcu.
Dic age quàm paucis Euripum implebimus horis
Ex arcu ſimul, atque alis, vrnaque fluentes?

Diem conſtituentes ex 12. horis, erunt quatuor horæ ⅓. diei. Quare per Canonem ſuprà traditum diuidemus vnitatem ſigillatim per ½. ⅓. ¼. fient quotientes 6. 3. 2. quorum ſumma 11. per quam diuidendo vnitatem fit 11/12 quæſita pars diei, qua tres Amores ſimul fluentes Euripum implebunt.

XXIX.

Πλινθυρσοὶ μάλα τῆτον ἐπείσομαι οἶκον ἐγεῖραι
Ημαρ δ' ἀνήφελεν τόδε σήμερον. ἠδ' ἔτι πολλοὶ
Χρηίζω, πᾶσαν δὲ τεσσαρακοντάδα δέουσαν
Πλίνθον ἔχω. σὺ δὲ μοῦνος ἐν ἤματι τόσσον ἔπυρξας.
Παῖς δέ τοι ὀκ καμάτοιο δεκαπενταέτης ἀπέληγεν.
Γαμβρὸς δ' αὖ τόσσησι κ' εἰσέτι πεντήκοντα.
Τεσσαρῆς συζυγίαις πόσας τόδε πύργος ἄειρεν.

Fictores laterum ceſſerunt nubila cœlo
Indulgete operi; domus vt mea perficiatur
Non multi deſunt lateres, finxiſſe tricenos
Sufficiet. Tantum ſolus formare ſolebas
Qualibet ipſe die: ſed centum, filius. Atqui
Illo quinquaginta minus gener edere ſuetus.
Quos peto tres pariter quot conſummabitis horis?

Cùm pater vna die conficiat 300. lateres, filius 100. gener 50. tres ſimul vna die conficiunt 450 Dic ergo per regulam trium. Si 450. lateres conficiuntur vna die quo tempore fient 300. Inuenies ⅔. diei, ſeu horis octo, ſi diem 12. horarum conſtituas.

XXX.

Δακρυὸ φωρήσαντες ἀμείβετε. οἱ γὰρ ἐνὶ γῆ ἡμεῖς
Οὓς τόδε δῶμα πεσὸν ὤλεσεν Ἀντιόχου
Δαιτυμόνας, οἷσιν γε θεὸς δαιτός τε τάφου τε
Τὸν δ' ἴσαριν χῶρον. τέσσαρες ἐκ Τεγέης
Κείμεθα. Μεσσήνης ἓξ δυώδεκα. ἐκ δέ τε πέντε
Αργεος. ἐκ Σπάρτης δ' ἥμισυ δαιτυμόνων.
Αὐτὸς δ' Αντίοχος. πέμπτου δὲ τε πέμπτον ὄλοντο
Κεκροπίδαι. τὸ δ' Τλαν πλατὺ Κόρινθε μόνοι.

Carpe viator iter lacrymans. Hîc namque iacemus
Quos domus vna cadens obruit Antiochi
Queis epulas inter crudeli occumbere letho
Fata tulere. Iacent quatuor ex Tegea
Bis ſex Meſſene; clarum quinque edidit Argos.
Dimidium Sparte Martis amica tulit.

Occidit Antiochus. Quintam quintantis Athenæ
Lugent; extinctum fletque Corinthus Hylam.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{5}$. & $\frac{1}{17}$. simul adsumentes 23. (nam tot conuiuæ numerantur) efficiant ipsum quæsitum numerum. Reperietur ergo per Canonem sæpè vsitatum, numerus 50.

XXXI.

Νικαρίτη παίζουσα συν' ἡλικιώτησι πάντα
Ὧν εἶχεν καρύων Κλειτ' ἔπορεν τὸ τρίτον.
Καὶ Σαπφοῖ τὸ τέταρτον. Ἀεισοδίκη ϛ τὸ πέμπτον.
Εἰκοσὸν Θεανοῖ, ϛ πάλι δωδέκατον.
Εἰκοσὸν τέταρτον ϛ Φιλιννίδι, ϛ περίλοιπ δὲ
Πεντήκοντ' αὐτῇ Νικαρέτῃ κάρυα.

Mittens Nicarete sociabus dona, suarum
Impertit Cliten læta triente nucum.
Sappho quarta datur. Vigesima facta Theanús
Atque duodecima est; Quintaque Aristodices.
Pars tibi cùm cessit vigesima quarta Philinni
Quinquaginta sibi Nicarete retinet.

Quæritur numerus, talis, vt illius $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{24}$. simul additæ, & adsumentes 50. conficiant ipsum qui quæritur numerum. Minimus qui habeat datas partes est 120. cuius datæ partes simul conficiunt 115. quo ablato de 120. superest per quem dinidendo 50. fit quotiens 10. quo ducto in 120. fit quæsitus numerus 1200.

XXXII.

Γνωμονικῶν Διόδωρε μέγα κλέος, εἰπέ μοι ὥρων
Ηνίκ' ἀπ' αὐτολίης πόλον ἤλατο χρύσεα κῆλα
Ηελίου· τῷ δ' ἦπυ ὅσον τρία πέμπτα δρόμοιο
Τέτρακι τόσσον. ἔπεστι μὲν ἑσπερίων ἄλλα λείπει.

Dic quota iam effluxit pars ô Diodore dies.
Auratis ex quo radiis sol gnomona tangit
Quantum decursi tres quintæ temporis, inde
Est tantum quater, hesperiis dum se occulat vndis.

Hîc numerus 12. diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat quater $\frac{1}{5}$. seu $\frac{2}{10}$ prioris; vel quod idem est 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 5. ad 12. Quare per Canonem secundæ primi addo simul 5. & 12. fit 17. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{17}$. quem duco sigillatim in 5. & in 12. fiunt quæsitæ partes $\frac{60}{17}$. & $\frac{144}{17}$. Itaque transactum tempus est horarum 3 $\frac{9}{17}$. reliquum verò est horarum 8 $\frac{8}{17}$.

XXXIII.

Ζεῦ μάκαρ, ἦ ῥά τοι ἦεν ἃ δ' ὧδε, οἷα γυναῖκες
Θεσσαλικαὶ παίζουσι; μαρέπτεται ὄμμα Σελήνης
Ἐκ μισόπωλ. Ἴδον αὐτὸς, ἴδον δ' ἐπὶ νυκτὸς ἐπ' ἠῶ
Δὶς τόσσον ὅσσα δύω, ἕκτα ϛ ἑβδόμου αἰχμάζει.

Proh superûm pater, ista placet quæ Thessala cantu
Molitur maga? Cùm Phœbe pudibunda lateret
Vidi ego. Bis tantum solis restabat ad ortum
Tertia transactæ quantum & pars septima noctis.

Numerus 12. rursus diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat $\frac{1}{7}$. & $\frac{1}{7}$. seu $\frac{2}{14}$. prioris. Quare 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 21. ad 20. Ergo per Canonem secundæ primi addo simul 21. & 20. fit 41. per quem diuido 12. fit $\frac{12}{41}$. quem duco sigillatim in 21. & in 20. fiunt quæsitæ partes $\frac{252}{41}$. & $\frac{240}{41}$. Itaque quando Eclipsis lunæ facta est, transierant horæ noctis $6\frac{6}{41}$. Restabant autem vsque ad solis ortum, horæ $5\frac{35}{41}$.

XXXIV.

Ἁπλανέων ἄστρων παρόδους δ' ὅτε τοῖον ἀλιτρὸν
Εἶπέ μοι ἠιθέη ἐμὲ χθιζὸν ἔτικτε δάμαρ.
Ἦμαρ ἴλω ὅσσόν τε δὶς ἑβδομὸν ἀντολιηθὲν
Ἑξάκις τόσσον ἴλω ἑπταρίλλου ἐς ἄλα.

Fixorum coitus Astrorum, vnaque vagantum
Dic age cùm pareret vxor amata mihi.
Lux erat, & quantum septans geminatus ab ortu
Tantum bis ter erat solis ad occubitum.

Numerus 12. denuò diuidendus est in duas partes, ita vt posterior contineat sexies $\frac{1}{7}$. id est $\frac{12}{7}$ prioris. Quare 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 7. ad 12. Addo simul 7. & 12. fit 19. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{19}$. quem duco sigillatim in 7. & in 12. fiunt quæsitæ partes $\frac{84}{19}$. & $\frac{144}{19}$. Itaque tempore partus transierant horæ diei $4\frac{8}{19}$. Restabant autem vsque ad noctem horæ $7\frac{11}{19}$.

XXXV.

Ἔγρεσθ' ἠερίνεια παρίσταμαι πίμπλοον ἕλκειν
λειπεμβίης τεσσοῦν οἴηται ὀγδοάτων.

Surgite lanificæ, lux est, reliquæque diei
Octantum effluxit portio quinta trium.

Numerus 12. diuidendus est quoque in duas partes, ita vt prior contineat quintam partem de $\frac{3}{8}$ seu $\frac{1}{40}$ posterioris. Quare 12. secandus est in duas partes seruantes rationem quam habet 3. ad 40. addo 3. ad 40. fit 43. per quem diuido 12. fit quotiens $\frac{12}{43}$. quo ducto sigillatim in 3. & in 40. fiunt quæsitæ partes $\frac{36}{43}$ & $\frac{480}{43}$. Itaque iam effluxerant horæ vnius $\frac{36}{43}$. restabant autem horæ $11\frac{7}{43}$.

XXXVI.

Σύρτοις ἐν πυάγεσσι πατὴρ θανέν, ἐκ δ' ἄρ' ἐκείνης
Πέντε τάλαντ' ἄφορα ἤλυθε νειπολίης
Οὗτος ἀδελφειὸν περφιέσσατο, ἦ γὰρ ἔμιγεν
Δαΐκεν εἷς μοίρης διπλάσιον τριτάτων
Δοιῶν, ἡμιτέρης ἦ δ' ὀγδόα μητέρι μοίρης
Ὤπασεν, ἀδὲ δίκης ἤμβροτεν ἀθανάτων.

Syrtibus in medijs pater occidit; Attamen inde
Incolumis rediit quinque talenta ferens
Optimus hic fratrum: Gemini mihi namque trientis
Duplum concessit sortis habere suæ.
At charam nostræ partis quadrante parentem
Donauit, certus non violasse deos.

Numerus 5. diuidendus est in tres partes, ita vt secunda contineat $\frac{1}{3}$ primæ. At tertia contineat $\frac{1}{3}$ secundæ. Hoc est 5. diuidendus est in tres partes seruantes easdem rationes, quas seruant 3. 4. 1. Horum ergo summa est 8. per quam diuido 5. fit $\frac{5}{8}$ quo ducto sigillatim in ipsos 3. 4. 1. fiunt quæsitæ partes $\frac{15}{8}$. $\frac{20}{8}$. $\frac{5}{8}$. Habuit igitur primus frater talentum 1. & $\frac{7}{8}$. secundi talenta 2 $\frac{4}{8}$. Mater verò $\frac{5}{8}$ vnius talenti, vel si placet talentum vnum, minas resoluere in minas 60. & minam in drachmas 100.

habuit primus frater talentum 52. drachmas 50. secundus frater habuit talenta 2. minas 30. mater denique minas 37. drachmas 50.

XXVII.

Α βάτις ἂν πατέω σων᾽ ἐμοὶ βάρος ἄλκιμον ἕλκει
Χ᾽ ἁ κρηπὶς σων᾽ ἐμεὶ τόσσα τάλαντα φέρει.
Αλλ᾽ ἐγὼ εἶος ἅπαξ παν᾽ σαν᾽ βάσιν ἐς δὶς ἀείλκω.
Καγὼ μοῦνος ἐὼν σαὶ βάσιν ἐς τρὶς ἄγω.

Quam calco basis, hæc mecum pondus trahit ingens.
Mecum æquale trahit pondus & ista basis.
Solus at ipse tuæ baseos sum pondere duplus.
Sum triplus baseos solus & ipse tuæ.

Hæc quæstio non vnam recipit solutionem, sed infinitas. Nam quæritur Numerus qui bis ita diuidatur in duas partes, vt maior priori diuisionis sit dupla ad maiorem posterioris diuisionis. At maior posterioris diuisionis sit tripla ad minorem prioris. Omnem autem numerum ita diuidi posse bis in duas partes, docuit abundè Diophantus quæstione duodecima libri primi. Satuamus verbi gratia quamlibet statuam cum sua base pendere talenta 100. Diuidetur ergo 100. in partes quæsitas per operationem Diophanti loco citato, vel per Canonem à nobis ibidem traditum, & erunt partes prioris diuisionis 80. & 20. At partes posterioris 40. & 60. quæ propositum implent.

XXXVIII.

Δός μοι δέκα μνᾶς, ἓ τρίπλεις σοι γίνομαι.
Καγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ πενταπλοῦς.

Minas decem da, triplus vt fiam tui.
At tu decem da, quintuplus fiam vt tui.

Quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 10. à secundo, sit triplus eius quod relinquitur secundo. At secundus accipiens 10. à primo, sit quintuplus ad residuum primi. Similem quæstionem tractauit Diophantus lib. 1. quæstione 15. sic autem soluitur. Esto primus 1 N. + 10. hic ergo cùm dederit 10. secundo remanebit 1 N. & erit tunc secundus 5 N. à quo si auferas 10. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 5 N. − 10. Restat vt primus accipiens 10. à secundo, sit triplus ad residuum secundi. Quare 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. triplus erit ad 5 N. − 20. ac proinde 1 N. + 20. æquatur 15 N. − 60. & fit 1 N. $5\frac{1}{7}$. sunt ergo quæsiti numeri $15\frac{1}{7}$. & $18\frac{4}{7}$.

XXXIX.

Δός μοι δύο μνᾶς, κ᾽ δίπλους σοι γίνομαι.
Καγὼ λαβὼν σοῦ τὰς ἴσας, σοῦ τριπλοῦς.

Minas duas da, duplus vt fiam tui.
At tu duas da, quadruplus fiam vt tui.

Hæc quæstio eiusdem est naturæ atque præcedens. Esto primus 1 N. + 2. hic ergo cùm dederit 2. secundo, remanebit 1 N. eritque tunc secundus 4 N. & ab eo si auferas 2. quæ accepit à primo, erit secundus ab initio 4 N. − 2. qui si dederit 2. primo fiet primus 1 N. + 4. duplus ad residuum secundi, puta ad 4 N. − 4. Quare 1 N. + 4. æquatur 8 N. − 8. vnde fit 1 N. $1\frac{1}{3}$. sunt igitur quæsiti numeri $5\frac{1}{3}$. & $4\frac{2}{3}$.

XL.

Ομηρος Ησιόδῳ ἐφιτήσαιτο πόδων τὸ τῷ Ελλήνων
πλῆθος κ᾽ τῆς Ιλίου σφετεῦσαι.

Επ᾽ ἴσσαν μαλεροῦ πυρὸς ἐχάρη ; ἐν ᾗ ἱκάνῃ
Πεντήκοντ᾽ ὀβελοὶ, σεῖ᾽ ᾗ κρέα πεντήκοντα.

Τρίς τι τεμικόσιοι ἐξ ἠϊόνας ἦσαν Ἀχαιοί.

Homerus Hesiodo interroganti quanta fuisset Græcorum multitudo aduersus Troiam militantium.

Septeni luxere foci, sed quemlibet antè
Quinquaginta caro verubus confixa tremebat,
Nongentisque veru Danaïs data fercula ab vno.

Per solam multiplicationem bis repetitam soluitur quæstio, ducito 7. in 50. fit 350. quem rursus ducito in 900. fit numerus Græcorum militum 315000. extat hoc epigramma in agone Homeri & Hesiodi Græcè edito, sed corruptum, nam initium primi versus sic legitur.

Πεντήκοντ' ἦσαν πυρὸς ἰχάεσι.

Vnde non immeritò Agonis illius author incredibilem quæ inde colligitur militum multitudinem miratur, sic enim fieret eorum numerus 2250000.

His quæ nondum edita erant Epigrammatis, subiicere libet quinque sequentia cum nostra interpretatione, ne quid ad hanc materiam pertinens hîc deesse sinamus, quamuis olim hæc edita circumferantur in Anthologia.

XLI.

Παλλὰς ἐγὼ χρυσὴ σφυρήλατος. αὐτὰρ ὁ χρυσὸς
Αἰζηῶν πέλεται δ' ὥρον ἀοιδοπόλων.
Ἡμισυ μὲν χρυσοῖο Χαρίσιος· ὀγδοάτῳ δὴ
Θέσπις. ἓ δεκάτῳ μοῖραν ἔδωκε Σόλων.
Αὐτὰρ ἐεικοστῷ Θεμίσων. Τὰ δὲ λοιπὰ τάλαντα
Ἑπτὰ, καὶ τίχνη δ' ὥρεγε Λεισσόδικος.

Aurea Pallas ego. Musis sed amica iuuentus
Materiam docto præbuit artifici
Octauam Thespis, partemque Charisius auri
Dimidiam, decimam contulit ipse Solon.
A Themisone data est vigesima. Terna talenta
Et sena; ipse opifex præstat Aristodicus.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{20}$. simul, adsumentes 9. conficiant ipsum quæsitorum numerum. Minimus habens datas partes est 40. idemque quæsitus numerus, vt constat ex Canone iam sæpè à nobis vsurpato.

XLII.

Αὐγείαν ἱρίσσατ μέγα θῆκος Ἀλκείδαο
Πλήθων βουκολίων διζήμενος. ὃς δ' ἀπάμειπτο.
Ἀμφὶ μὲν Ἀλφειοῖο ῥοὰς φίλος ἥμισυ νέμει.
Μοίρη δ' ὀγδοάτη ὄχθον Κρόνου ἀμφινέμονται.
Δωδεκάτη δ' ἀπαδοῦσι Ταραξίππειο παρ' ὄχθῃ.
Ἀμφὶ δ' ἄρ' Ἠλίδα δῖαν ἐεικοστὴ νεμέθονται.
Αὐτὰρ ἐν Ἀρκαδίῃ τεσσαρακοστῷ φερολίθῳ.
Λοιπὰς δ' αὖ λάβετε ἀγέλας τόδε πεντήκοντα.

Augæam rogat Alcides, quot pascua circùm
Errarent armenta sibi. Cui retulit ille.
Pascitur Alphæi rapidas semissis ad vndas.
Pars octaua sacro Saturni in colle vagatur.
Pone Taraxippi tumulum sextantis oberrat

Dimidium; decimæ ſemiſſem detinet Elis.
Denique in Arcadicis trigeſima ſubſtitit oris.
Quadraginta vides tamen hîc armenta relinqui.

Quæritur numerus cuius $\frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{10}. \frac{1}{10}. \frac{1}{10}.$ ſimul cum numero 50. efficiant ipſum quæſitum numerum. Minimus habens datas partes eſt 120. cujus datæ partes ſimul efficiunt 95. quo ablato de 120. ſupereſt 25. per quem diuide 50. fit 2. quo ducto in 120. fit 240. quæſitus armentorum numerus.

XLIII.

χάλκεός εἰμι λέων, κρουνοὶ δέ μοι ὄμματα δοιά,
Καὶ σόμφα, σιὼ δὲ θήναρ δεξιτεροῖο ποδός.
Πλήθει ἢ κρατῆρα δι' ἤματα δεξιὸν ὄμμα.
Καὶ λαίον τετάτοις, ἐ πεύρεσσι θήναρ.
Ἀρκιον ἓξ ὥρας πλῆσαι σόμφα. τιὼ δ' ἅμα πάντα
Καὶ σόμφα, ἐ γλῶσσα, ἠ θήναρ, εἰπὲ πόσον;

Æreus adſto leo, tubuli mihi lumina bina
Oſque etiam, dextri ſic quoque planta pedis.
Binis dextro oculo, ternis lacus iſte diebus,
Impletur læuo ſed pede bis geminis.
Ori ſufficiunt ſex horæ. Dic ſimul ergo
Quo ſpatio os, oculi, peſque replere valent.

Sumendo diem artificialem 12. horarum, cuius 6. horæ ſunt $\frac{1}{2}$. erunt numeri exprimentes rationes datas 2. 3. 4. $\frac{1}{2}$. per quos ſigillatim diuiſa vnitate fiunt quotientes $\frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. 2.$ quorum ſumma $\frac{13}{12}$ per quam rurſus diuidendo vnitatem fit quæſita pars diei $\frac{12}{13}$ ſeu horæ $3\frac{11}{13}$.

XLIV.

Ἀμφω ιδὼ ἡμεῖς εἴκοσι μνᾶς ἴλκομεν
Ζῆθός τε χ' ὦ ξύναιμος, ἀλλ' ἤν μου λάβῃ
Τρίτον, τὸ τέτρατόν τε τῶ δ' Ἀμφίονος
Ἑξ παντ' ἀνδρῶν, μητρὸς ἐρύσσεις σταθμόν.

Viginti vterque pendimus ſimul minas
Zethus ego, fraterque. Attamen ſi ceperis
Mei trientem, cum quadrante Amphionis
Senæ, parentis pondus, exibunt minæ.

Soluit ſimilem quæſtionem Diophantus lib. 1. quæſt. 5. Nam numerus 20. diuidendus eſt in duas partes, vt $\frac{1}{3}$ prioris, & $\frac{1}{4}$. poſterioris ſimul efficiant 6. Eſto poſterioris $\frac{1}{4}$. 1 N. ipſa ergo pars poſterior eſt 4 N. At triens prioris eſt $6-1$ N. ipſa prior pars $18-3$ N. At duarum partium ſumma fit $18+1$ N. æqualis 20. Ergo 1 N. eſt 2. Igitur quæſitæ partes de 20. ſunt 12. & 8. & ſatisfaciunt propoſito.

XLV.

Ἡμίονος ἐ ὄνος φορέουσαι οἶνον ἔβαινον.
Λύτὰρ ὄνος στενάχιζε ἰσῶ ἄχθει φόρτου ἐσῖο.
Τίω' ἢ βαρυστάχυσαν ἰδοῦσ' ἐρέειν ὀνείη.
Μῆτερ τί κλαίουσ' ὀλοφύρεαι οὕτω κούρη;
Εἰ μέτρον ἄμοι δοίης, ἀπλάσιον σέθεν ἔσχε.
Εἰ δὲ σὺ ἀπλάδοις, παύσως ἰσότιμα φυλάξεις.
Εἰπὲ τὸ μέζον ἄεθλον γεωμετρίης δάϊστρ.

Vnà cum mulo vinum portabat aſella,
Atque ſuo grauiter ceu pondere preſſa gemebat
Talibus at dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, ſi des menſuram, pondera geſto,
At ſi menſuram capias, æqualia porto.
Optime menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Hæc etiam quæſtio ſoluitur per decimam quintam primi. Nam quæruntur duo numeri, vt primus accipiens 1. à ſecundo ſit duplus ad reſiduum ſecundi; at ſecundus accipiens 1. à primo ſit æqualis reſiduo primi. Eſto primus 1 N. + 1. Ergo dando 1. ſecundo, remanebit primus 1 N. & tunc ſecundus erit 1 N. Quare auferendo ab eo vnitatem quam accepit à primo, fit ſecundus, vt erat ab initio 1 N. − 1. Iam ſi ab eo primus accipiat 1. fiet primus 1 N. + 2. & reſiduum ſecundi erit 1 N. − 2. Itaque 1 N. + 2. duplus eſt ad 1 N. − 2. & tandem 1 N. + 2 æquatur 2 N. − 4. Vnde fit 1 N. 6. Sunt ergo quæſiti numeri 7. & 5.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBER SEXTVS.

QVÆSTIO I.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa subtracto alterutro laterum circa rectum, faciat cubum. Esto quæsitum triangulum effictum à duobus numeris, & sit alter 1 N. alter 3. fit igitur hypotenusa 1. Q. + 9. perpendiculum 6 N. Basis 1 Q. — 9. Et hypotenusa dempto vno laterum circa rectum, hoc est 1 Q. — 9. facit 18. qui non est cubus. Vnde autem prouenit 18? Quadratus est de 3. bis sumptus. Oportet igitur inuenire numerum aliquem, vt illius quadratus bis sumptus faciat cubum. Esto quæsitus numerus 1 N. & fiunt 2 Q. æquales cubo. Esto 1 C. & fit 1 N. 2. Rursus formo triangulum ab 1 N. & non à 3. sed à 2. & fit hypotenusa 1 Q. + 4. Perpendiculum 4 N. Basis 1 Q. — 4. & manet hypotenusa detracta basi faciens cubum. Supereſt vt & perpendiculum quod est 4 N. detractum ab hypotenusa faciat cubum. Fit autem 1 Q. + 4 — 4 N. æquale cubo. Est autem quadratus à latere 1 N. — 2. si ergo æquemus cubo 1 N. — 2. soluemus quæstionem. Esto æquale 8. fit 1 N. 10. Itaque formabitur triangulum à 10. & 2. & fit hypotenusa 104. Perpendiculum 40. Basis 96. & constat.

ΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πευῇ κύβον. ἔστω τὸ ζητούμενον τρίγωνον πεπλασμένον ἀπὸ δύο ις̄. ὁ ἄρα μὲν ϛ̄ α̃. ὁ δὲ μ̄ γ̃. γίνεται δὴ ἡ μὲν ὑποτείνουσα δ̄ α̃. μ̄ ϑ̄. ἡ δὲ κάθετος ις̄ ϛ̄. ἡ δὲ βάσις δ̄ α̃. λείψει μ̄ ϑ̄. ἡ ὑποτείνουσα ἐὰν λείψῃ ἕνα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τινὰ τουτέστι δ̄ α̃. λείψει μ̄ ϑ̄. γίνεται μ̄ ιη̄. οὐκ ἄρα ἔστι κύβος. πόθεν ὁ ιη̄. ὁ ἀπὸ τοῦ Γ δὶς τετράγωνος, δὶς γὰρ ὁ ϑ̄. δεῖ οὖν εὑρεῖν ἀριθμόν τινα, ὅπως ὁ ἀπὸ τούτου τετράγωνος δὶς γενόμενος ποιῇ κύβον. ἔστω ὁ ζητούμενος ϛ̄ α̃. καὶ γίνονται δ̄ β̄. ἴσοι κύβῳ. ἔστω κ̄ α̃. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ μ̄ β̄. πάλιν πλάσσω τὸν τριγωνικὸν ἀπὸ ἀριθμοῦ α̃. καὶ ἐπὶ μὲν γ̄. ἀλλὰ μ̄ β̄. ἡ γίνεται ὑποτείνουσα δωδεκάκις α̃. μ̄ δ̄. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμῷ δ̄. ἡ δὲ βάσις δ̄ α̃. λείψει μ̄ δ̄. καὶ μένει ὑποτείνουσα λείψασα ἢ ἐν τῇ βάσει τουτέστι δ̄ α̃. λείψει μ̄ δ̄. ποιοῦσα κύβον. λοιπὸν ὅτι καὶ τὸν κάθετον ἴσον εἶναι ις̄ δ̄. λειφθεῖσαν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ποιεῖν κύβον. γίνεται ἡ δ̄ α̃. μ̄ δ̄. λείψει ις̄ δ̄. ἴσον κύβῳ. καὶ ἔστι τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ϛ̄ α̃. λείψει μ̄ β̄. ἐὰν ἓν ἀριθμὸν α̃ λείψει μ̄ β̄. ἰσώσωμεν κύβῳ, λύσωμεν τὸ ζητούμενον. ἔστω ἴσον μ̄ ηα̃ καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ μ̄ ι̃. ὅστε πλασθήσεται τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ̄ ι̃. καὶ μ̄ β̄. καὶ γίνεται ἡ μὲν ὑποτείνουσα ρ̄δ̄. ἡ δὲ κάθετος μ̄ μ̃. ἡ δὲ βάσις μ̄ ις̄. καὶ μένει.

In VI. Librum Diophanti Commentarij.

IN QVAESTIONEM I.

OPERATIO Diophanti facilis est, in qua tamen nonnulla occurrunt animaduersione digna. Quare primò aduerte à duobus numeris formari triangulum rectangulum, modo quem demonstrauimus propositione quinta tertij porismatum. Et fit hypotenusa summa quadratorum, basis interuallum eorundem, perpendiculum verò duplum multiplicationis laterum. Hinc apparet cur ab hypotenusa detracto perpendiculo, relinquatur quadratus. ' Etenim à summa quadratorum auferendo duplum producti laterum, remanet quadratus interualli laterum. Sic in priore positione detractis 6 N. ab 1 Q. + 9. fit quadratus 1 Q. + 9 − 6 N. à latere 1 N. − 3. quod est interuallum numerorum 1 N. & 3. à quibus formatur triangulum. At in secunda positione detractis 4 N. ab 1 Q. + 4. fit quadratus 1 Q. + 4. − 4 N. à latere 1 N. − 2. quod est interuallum ipsorum 1 N. & 2. à quibus effictum est triangulum.

4. 2. *perif.*

Secundò aduerte lemma quo quæritur cubus quadrati duplus infinitas recipere solutiones, & turpiter allucinari Xilandrum, qui ad sequentem quæstionem asserit nullum alium cubum præter 8. assignari posse quadrati duplum, neque in fractis, cum infiniti tales cubi assignari possint & in integris, & in fractis. Nam vt patet 2 Q. æquari possunt cuilibet cuborum numero cubico. Verbi gratia ponantur 2. Q. æquales $\frac{1}{2}$ C. fiet 1 N. 16. eritque cubus 512. duplus quadrati 256. Rursus ponantur 2 Q. æquales 8 C. fiet 1 N. $\frac{1}{4}$. Et inuenietur cubus $\frac{1}{64}$. duplus quadrati $\frac{1}{16}$. & sic de allijs. Immò eodem prorsus artificio inuenies cubos infinitos qui ad aliquos quadratos datam habeant rationem, & hinc formatur Canon vniuersalis.

Diuide denominatorem rationis datæ, per cubum aliquem, eritur latus quadrati quæsiti.

Vt si velis cubum qui sit quadrati triplus, diuide 3. per cubum aliquem, puta per 1. vel per 8. vel per 27. fient 3. $\frac{3}{8}$. $\frac{3}{27}$. quorum quadrati 9. $\frac{9}{64}$. $\frac{1}{81}$. quorum tripli, puta 27. $\frac{27}{64}$. $\frac{1}{27}$. sunt cubi, vt requiritur.

Tertiò aduerte cùm quadratus 1 Q. + 4 − 4 N. sit æquandus cubo, rectè Diophantum æquare cubo latus illius, puta 1 N. − 2. Constat enim si latus quadrati sit cubus, & ipsum quadratum fore cubum, quia ex cubo in cubum producitur cubus per tertiam & quartam noni Euclidis. Porro hac etiam ex parte infinitas solutiones quæstio recipit, nam 1 N. − 2. cuilibet vnitatum numero cubico æquari potest, æquauit Diophantus cubo 8. sed si æquasset cubo 1. fuisset 1 N. 3 & fingendo triangulum à 2. & 3. facta essent latera 13. 12. 5. quæ soluunt quæstionem, nam auferendo sigillatim vtramque laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 1. & 8. Hinc etiam elicitur huiusmodi Canon.

Sume numerum aliquem, ita vt quadratus illius sit semissis cubi; sumpto numero adde cubum quemlibet, tum ab hac summa, & à sumpto numero finge triangulum.

Verbi gratia sume $\frac{1}{2}$ cuius quadratus $\frac{1}{4}$. est semissis cubi $\frac{1}{8}$. Adde cubum 8. ad $\frac{1}{8}$ fiet $\frac{1}{8}$. tum finge triangulum ab $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{8}$. fient latera trianguli $\frac{3}{8}$. $\frac{4}{8}$. $\frac{5}{8}$. quæ soluunt quæstionem, nam sublato vtrouis laterum circa rectum ab hypotenusa, supersunt cubi 8. & 1.

Cæterùm inuento triangulo quæstionem soluente, si singula illius latera diuidas vel multiplices per aliquem eundem cubum, fiet aliud triangulum æquè proposito satisfaciens. Vt si triangulum à Diophanto inuentum 104. 40. 96. diuidas per 8. fiet aliud triangulum 13. 5. & 12. æquè benè proposito congruens, & ratio est euidens, nam interualla quibus hypotenusa 13. superat latera 5. & 12. fiunt diuidendo per 8. interualla quibus hypotenusa 104. superat latera 40. & 96. Quare cùm hæc interualla sint cubi ex hypothesi, & cubo per cubum diuiso, oriatur cubus, patet & illa interualla quibus 13. superat 5. & 12. fore cubos, quod est propositum.

QVÆSTIO II.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν ὑποτεινούσῃ περιλαβὼν ἢ ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πεπῆ κύβον. ἐπὶ πλάσωμεν τὸ ζητούμενον ἀπὸ ἀριθμῶν δύο, ὧν ὁ μεῖζων τοῦτου. γίνεται ζητεῖν τρίγωνον τίνα ὅπως ὁ διπλάσιος αὐτοῦ ἢ κύβος, ᾧ ἐστιν ὁ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ β̄. πλάσομεν δὴ τὸ ζητούμενον ἀπὸ ς̄ α̃.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt hypotenusa adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat cubum. Si formemus quæsitum triangulum à duobus numeris vt in præcedente, quærendus erit quadratus cuius duplum sit cubus, est autem is à latere 2. Fingemus er-

go triangulum ab 1 N. & à 2. & fiet ſimiliter hypotenuſa 1 Q. + 4. vnum autem laterum circa rectum 4 N. alterum denique 4 − 1 Q. Supereſt vt hypotenuſa adſcito priore latere faciat cubum; ſed & neceſſe eſt vt cum ad poſitiones veniemus 1 Q. inueniatur minor quam 4. Proinde 1 N. minor eſt quam 2. Eò itaque redacti ſumus vt inueniamus cubum minorem quàm 4. maiorem quàm 2. Eſt autem $\frac{1}{2}$. Quamobrem 1 N. + 2. æqualis eſto $\frac{1}{2}$. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Erit ergo hypotenuſa $\frac{17}{4}$. laterum circa rectum alterum $\frac{15}{4}$. alterum $\frac{8}{4}$. & conſtat.

ϗ μ$^{\alpha}$ β̄. ϗ γίνε͂ ὁμοίως ἡ μὲν ὑποτείνουσα δ$^{\alpha}$ α̅. μ$^{\alpha}$ δ̄. καὶ ἡ μὲν τῶ πρὸς ὀρθὴν ις̄ δ̄. ἡ δὲ λοιπὴ μ$^{\alpha}$ δ̄. λείψει δ$^{\alpha}$ α̅. λοιπὸν ὅτι τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ περιεχόμενον τὸν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῇ πρὸς τὴ ὀρθὴν ποιεῖ κύβον. ἀλλὰ ϗ διελθόντας εἰς τὸν ὑπάρχοντα εὑρεῖν τὸν δύναμιν ἐλάσσονα μ$^{\alpha}$ δ̄. ὁ ἄρα ς$^{\alpha}$ ἐλάσσων ἐστὶ μ$^{\alpha}$ β̄. ϗ ἁπτήσεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον ἐλάσσονα μ$^{\alpha}$ δ̄. μείζονα δὲ μ$^{\alpha}$ β̄. ϗ ὅτι μ$^{\alpha}$ κζ$^{\gamma}$. ϗ ἴσων ς$^{\alpha}$ α̅ μ$^{\alpha}$ β̄. ἴσος μ. κζ$^{\gamma}$. ϗ γίνεται ὁ ς$^{\alpha}$ ια$^{\gamma}$. ὅταν ἄρα ἡ μὲν ὑποτείνουσα τοζ$^{\gamma}$ ξ$^{\alpha}$. τῇ δὲ πρὸς τὴ ὀρθὴν, ἡ μὲν ρλε̅ ξ$^{\alpha}$. ἡ δὲ τπβ̄ ξ$^{\alpha}$. ϗ μβ̄ρι.

IN QVAESTIONEM II.

HIc multa infeliciter adnotauit Xilander. Primò enim aſſerit cubum quadrati duplum nullum eſſe præter 8. & nullum quadrati triplum præter 27. &c. quod ad præcedentem abunde confutauimus. Deinde putat alterum laterum circa rectum poni debere, vt in præcedente 1 Q. − 4. quod eſt abſurdum, nam ob talem poſitionem cogitur ſimul & ſemel æquare cubo, tum 2 Q. tum 1 N. + 2. Quare deueniendum ei ad duplicatam æqualitatem, quæ quomodo reſolui poſſit, cùm ſcilicet duo numeri ſunt ſimul æquandi cubo, nec ipſe docere potuit, nec vſquam docuit Diophantus. Denique non ſatis aperit cauſam cur 1 N. + 2. æquari debeant cubo alicui maiori quàm 2. minori quàm 4. Quamobrem vt omnia ſigillatim elucidemus.

Aduerte primo cur ſumatur numerus cuius quadratus ſit ſeſquialter cubi, & ponatur baſis trianguli 4 − 1 Q. quæ in præcedente ponebatur 1 Q. − 4. cauſam eſſe, quia vult Diophantus per huiuſmodi poſitionem ſatisfieri vni parti poſtulati, nam hypotenuſæ 1 Q. + 4. addendo baſim 4 − 1. Q. fit vtique cubus 8. Poſſe autem baſim poni 4 − 1 Q. æquè benè ac 1 Q. − 4. patet, quia baſis debet eſſe interuallum quadratorum 1 Q. & 4. Quare cum ignoretur vter eorum maior ſit, poteſt eorum interuallum eſſe 1 Q. − 4. vel 4 − 1 Q.

Aduerte ſecundò hypotenuſæ 1 Q. + 4. addendo perpendiculum 4 N. fieri quadratum 1 Q. + 4 N + 4. Quia hypotenuſa eſt ſumma quadratorum, at perpendiculum eſt duplum plani ſub lateribus, vnde patet hypotenuſæ & perpendiculi ſummam [4] æquari quadrato ſummæ laterum 1 N. + 2. Quare ſicut in præcedente reſtat vt æquemus cubo 1 N. + 2. quia ſi latus hoc ſit cubus, erit & quadratus illius cubus; [3] quandoquidem ex cubo in ſeipſum producitur cubus. [4. ſecundi.] [3. noni.]

Aduerte tertio 1 N + 2. æquari debere cubo qui ſit maior quàm 2. minor quàm 4. primum patet, nam à cubo illo auferendo 2. reſiduum æquari debet 1 N. ſecundùm ſic probatur. Quia baſis poſita eſt. 4 − 1 Q. oportet 4. maiorem eſſe quàm 1 Q. Ergo 2. maior eſſe debet quàm 1 N. fit autem 1 N. vt dictum eſt, ab aliquo cubo auferendo 2. Oportet ergo talem eſſe cubum illum, vt ab eo auferendo 2. reſiduum ſit minus quàm 2. ac proinde oportet cubum huiuſmodi, minorem eſſe quàm 4. Porrò qua ratione inueniendus ſit cubus maior quàm 2. minor quàm 4. non docet hìc Diophantus. Sed id facilè conſequemur eodem artificio quo ad decimam tertiam quinti reperit author quadratum maiorem quàm 2. minorem quàm 3. Reducantur enim 2. & 4. ad fractionem cubicam eiuſdem denominationis, puta ad octauas, fient $\frac{16}{8}$. & $\frac{32}{8}$. Inter quos cadit cubus $\frac{27}{8}$. propoſito ſatisfaciens. Sic infinitos hujuſmodi cubos reperies, & quo maior erit denominator ad quem fit reductio, eò plures cubi cadent inter numeros propoſitos, vt ſi reducas 2. & 4. ad milleſimas, fient $\frac{2000}{1000}$. & $\frac{4000}{1000}$. inter quos cadunt tres cubi propoſito apti, puta $\frac{2197}{1000}$. $\frac{2744}{1000}$. $\frac{3375}{1000}$. & ſic de alijs.

Aduerte denique hìc contingere vt multiplicando vel diuidendo latera inuenti trianguli, per eundem cubum, fiat aliud triangulum ſoluens quæſtionem. Sic loco laterum quæ inuenit Diophantus, puta $\frac{17}{4}$. $\frac{15}{4}$. $\frac{8}{4}$. ducendo omnia in 64. ſumi poſſunt 377. 135. 352. quod facile eſt demonſtrare.

Cæterùm ratio diuerſitatis in ſolutione & operatione, ex duplici capite ortum habet. Primò enim vt docuimus 1 N. + 2. æquari poteſt infinitis cubis maioribus quàm 2. minoribus quàm 4: quales ſunt $\frac{125}{64}$. $\frac{343}{64}$. $\frac{729}{64}$. &c. Deinde triangulum ipſum ab initio fingi poteſt ab 1 N. & quotlibet vnitatibus, quarum quadratus ſit ſeſquialter cubi, quales infinitos numeros dari, quicquid dicat Xilander, ad præcedentem oſtendimus. Verbi gratia fingatur ab 1 N. & $\frac{1}{4}$. erit hypotenuſa 1 Q. + $\frac{1}{16}$. Baſis $\frac{1}{4}$ N. perpendiculum $\frac{1}{8}$ − 1 Q. hocque addito ad hypotenuſam, fit cubus $\frac{1}{8}$. At baſi addita eidem hypotenuſæ fit quadratus 1 Q. + $\frac{1}{16}$. + $\frac{1}{4}$ N. cuius latus 1 N. + $\frac{1}{4}$. æquandum eſt cubo

maiori quàm $\frac{1}{4}$. minori quàm $\frac{1}{3}$. quales sunt $\frac{5}{19}$. $\frac{11}{29}$. aliique infiniti. Et vniuersaliter. Cubus quo cum fit vltima æquatio debet esse maior vnitatibus, à quibus cum 1 N. formatum est triangulum, & minor duplo earundem. Quamobrem hinc facilè est elicere Canonem.

Sume quemlibet numerum, cuius quadratus sit semissis cubi, quem aufer ab aliquo cubo qui sit maior ipso, & minor duplo eiusdem; A residuo & à sumpto numero formabis quæsitum triangulum.

Verbi gratia sume 2. quem aufer à cubo $\frac{16}{9}$. remanet $\frac{22}{9}$. à quo & à 2. forma triangulum, vel reducendo ad integros, forma triangulum à 93. & à 250. fient latera 71149. 53851. 46500. & hypotenusa adsumens basim, tum perpendiculum, facit cubos 125000. & 117649. quorum latera 50. & 49.

Quoniam verò in mentem alicui venire posset cur non proposuerit Diophantus inuenire triangulum rectangulum cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratum. Vel cuius hypotenusa detracto quolibet laterum circa rectum relinquat quadratum, non abs re fuerit monere, omissas esse huiusmodi quæstiones, quod sint impossibiles. Id autem, ne quis temerè dictum putet, sic demonstrabitur. Esto triangulum rectangulum A B C. dico siue hypotenusæ A addantur figillatim latera B. C. siue adimantur, non posse simul fieri duos quadratos. ' Etenim cùm hypotenusa A componatur ex duobus planis similibus, sint ij D major, & E minor; erit ergo B duplum medij proportionalis inter D & E cadentis. At C erit interuallum ipsorum D E. Porro ipsi D E vel quadrati sunt, vel quadratorum similes. Ponantur primò quadrati. Cùm ergo A sit summa duorum quadratorum D E. & C sit eorundem interuallum, ' patet compositum ex duobus A C. esse duplum maioris quadrati D. Ergo si compositus ex A C ponatur quadratus, sequitur ex binario in quadratum D. produci quadratum. Quod est impossibile, cùm binarius non sit quadratus, vt ostendit Clauius ad secundam noni. Rursus si ab A qui est summa quadratorum D E. auferatur C. eorundem interuallum, ' residuum duplum erit minoris quadrati E. Quare si hoc residuum ponatur quadratus, sequitur rursus ex binario in quadratum E. produci quadratum. Quod eadem de causa est impossibile. Quare in hoc casu patet propositum.

D 4. E 1.
A 5. B 4. C 3.
F 15. G 12. H 9.
K 12. L 3.

4. 3. *perisi.*

23. 1. *perisi.*

Iam verò esto triangulum rectangulum F G H. & plani similes K L. ex quibus hypotenusa F componitur, non sint quadrati; dico nihilominus sequi propositum. Nam K L. cùm sint plani similes, ' habent rationem quadrati ad quadratum; habeant ergo rationem quam quadratus D ad quadratum E. Igitur cùm sint proportionales D. E. K. L. & ab ipsis D E formetur triangulum A B C. ab ipsis K L formetur triangulum F G H. ' erunt hæc triangula similia. Itaque cùm sit A ad F. vt B. ad G ' erit summa duorum A B ad summam ipsorum F G. vt A ad F. Quia verò A est summa quadratorum D E. & B est duplum plani sub lateribus, ' patet summam ipsorum A B esse quadratum, ac proinde si & summa ipsorum F G ponatur quadratus, erit A ad F vt quadratus ad quadratum. Sed vt A ad F sic est C ad H ob similitudinem triangulorum, ac proinde vt A ad F, ' sic est summa antecedentium A C. ad summam consequentium F H. Igitur ' si summa ipsorum F H sit quadratus, oportet & summam ipsorum A C esse quadratum. Quod impossibile est, vt suprà ostendimus. Deinde quia est A ad B vt F ad G. & rursus B ad C vt G ad H. patet argumentando per conuersionem rationis, tum per rationem permutatam esse interuallum ipsorum A B ad interuallum ipsorum F G. itemque interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H. sicut A ad F. Cùm igitur interuallum quo A summa quadratorum superat B duplum plani sub lateribus, sit quadratus, ' si & interuallum ipsorum F G ponatur quadratus, erit vtrumque interuallum quadratus. Quare & interuallum ipsorum A C. ad interuallum ipsorum F H erit in ratione quadrati ad quadratum, ac proinde si interuallum ipsorum F H ponatur quadratus ' erit & interuallum ipsorum A C quadratus. Quod ostensum est esse impossibile. Quamobrem ex omni parte constat propositum.

26. *octaui.*

9. 3. *perisi.*
12. *septimi.*
4. *secundi.*

12. *septimi.*
24. *octaui.*

4. 2. *perisi.*
24. *octaui.*

Eadem quoque ratio est de cæteris omnibus potestatibus quadratis, vt pote quadratoquadratis, cubocubis, &c. Etenim inueniri non potest triangulum rectangulum, cuius hypotenusæ addendo vel adimendo vtrumlibet latus fiat quadratoquadratus, vel cubocubus. Hoc enim si daretur sequeretur dari quadratum duplum quadrati. Quod est impossibile; Aliis autem potestatibus omnibus quæ quadratæ non sunt, quales sunt cubi, quadratocubi, quadratoquadratocubi, &c. ritè applicabitur quæstio, vt exemplo quadratocuborum facile est demonstrare.

Sit ergo propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa adsumens vtrumlibet laterum circa rectum, faciat quadratocubum. Patet si sequamur ductum operationis Diophanti, eò nos adigi, vt inueniamus quadratocubum duplum quadrati, & quia omnis quadratoquadratus est quadratus, soluetur lemma si inueniamus quadratocubum duplum quadratoquadrati. Esto quadratoquadratus 1 Q Q. ergo 2 Q Q. æquantur quadratocubo, esto 1 Q C. fit 1 N. 2. estque quadratoquadratus 16. quadratocubus 32. sumentes igitur latus quadratum ipsius 16. puta 4. effingamus triangulum ab 1 N. & à 4. erit hypotenusa 1 Q. + 16. Basis 16 − 1 Q. Perpendiculum 8 N. & constat addendo basim hypotenusæ fieri quadratocubum 32. Restat vt eidem hypotenusæ addendo per-

pendiculum fiat quoque quadratocubus. Fit ergo 1 Q. + 16. + 8 N. æqualis quadratocubo. Ergo latus quadratum ipsius 1 Q. + 16 + 8 N. puta 1 N. + 4. æquabimus quadratocubo, sic enim consequemur intentum, quia ex quadratocubo in quadratocubum fit quadratocubus, vt demonstrauimus in Elementis. Porro 1 N. + 4. sic æquari debet quadratocubo, vt is sit maior quàm 4. minor quàm 8. ob causas supra explicatas. Quare cum reducendo 4. & 8. ad fractionem quodratocubicam, fiant $\frac{4096}{729}$. & $\frac{32768}{729}$. & inter eos cadat quadratocubus $\frac{46656}{729}$. huic æquabimus 1 N. + 4. fietque 1 N. $\frac{1792}{729}$. Igitur effingemus quæsitum triangulum à 4. & à $\frac{1792}{729}$ vel vtroque ad eandem denominationem redacto & communi abiecto denominatore à 128. & à 115. fietque triangulum 29609. 29440. 3159. quod soluit quæstionem: nam hypotenusæ addendo sigillatim latera, fient quadratocubi 59049. & 32768. quorum latera 9. & 8.

Eadem arte & quæstio præcedens extendetur ad huiusmodi potestates. Nam sit propositum inuenire triangulum rectangulum, cuius hypotenusa multata quolibet laterum circa rectum, relinquat quadratocubum. Effingemus vt prius triangulum ab 1 N. & à 4. & erit hypotenusa 1 Q. + 16. basis 1 Q. − 16. Perpendiculum 8 N. sic enim satisfit vni parti propositionis. Restat vt 1 Q. + 16. − 8 N. æquetur quadratocubo. Quare latus 1 N. − 4. æquandum est quadratocubo, esto is 32. fiet 1 N. 36. formetur ergo triangulum à 4. & à 36. erunt latera 1312. 1280. 288. & soluta est quæstio. Nam hypotenusa multata quolibet laterum, relinquit quadratocubos 32. & 1024. à lateribus 2. & 4.

QVÆSTIO III.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ eius numerus adsumens datum numerum, faciat quadratum. Esto datus 5. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4. N. 5 N. & fit area adscito 5. 6 Q. + 5. æqualis quadrato. Esto ipsi 9. & auferantur a similibus similia, relinquuntur 3 Q. æquales 5. & oportet speciem ad speciem, rationem habere quæ est quadrati numeri ad quadratum numerum, sed & multitudinem ad multitudinem. Itaque eo deuentum est, vt oporteat inuenire triangulum rectangulum, & quadratum numerum, vt quadratus area trianguli multatus, faciat quintam partem quadrati, quia datus est 5. Formetur triangulum ab 1 N. & $\frac{3}{4}$. & fit area 1 Q. − $\frac{3}{4}$. Esto quadrati latus 1 N. & fractio numerica tot vnitatum, quantus est duplus dati numeri, hoc est $\frac{3}{4}$. & fit quadratus 1 Q. + $\frac{9}{16}$. + 20. & si ab eo detrahamus aream, hoc est 1 Q. − $\frac{3}{4}$. relinquitur $\frac{9}{16}$. + 20. Hæc quinquies, fit $\frac{45}{16}$. + 100. æquale quadrato. Et omnia multiplicentur per 1 Q. fiunt 100 Q. + 505. æquales quadrato. Esto latus eius 10 N. + 5. Inuenitur 1 N. $\frac{15}{4}$. Ad positiones. Formabitur ergo triangulum à $\frac{15}{4}$ & $\frac{5}{4}$. Erit autem quadrati latus $\frac{225}{4}$. si ergo triangulum statuamus in numeris, & aream ipsius adscito 5. æqualem faciamus $\frac{225}{4}$ Q. reliqua fient manifesta.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ περιεχόμενος ἀριθμὸν ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ε̄. καὶ πεπλάσθω τὸ τρίγωνον διδομένην τὴν εἶδει ἀριθμὸν γ̄. ἀριθμὸν δ̄. ἀριθμὸν ε̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μ̄ μονάδων ῑ. δ̄ ς̄. μ̄ ε̄. ἴσος τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ θ̄. καὶ ἀπὸ τῆς ὁμοίων τὰ ὅμοια. λοιπαὶ δ̄ γ̄. ἴσαι μ̄ ε̄. καὶ δεῖ τὸ εἶδος πρὸς τὸ εἶδος λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὀφείλει καὶ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ πλῆθος. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ δεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμόν, ὅπως; ὁ τετράγωνος λήψας τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ τῶν τριγώνου ποιῇ πέμπτον τετραγώνου. ἐπεὶ ἡμιπλέθρου ὁ δοθεὶς μ̄ ε̄. δεῖ. πεπλάσθω τὸ ζητούμενον ἀπὸ ς̄ ᾱ. καὶ ᾱ ᾱ. ᾱ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ δ̄ ᾱ. λείψει ᾱ δ̄ ᾱ. ἔστω ἡ τῶν τετραγώνου πλευρὰ ς̄ ᾱ. καὶ ἀριθμὸς ὁ μονάδων τοσούτων ὅσων δεῖ ὁ πλασθεὶς τῷ δοθέντος ἀριθμῷ τουτέστιν ῑ ᾱ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ τριγώνου δ̄ ᾱ. ρ̄ δ̄ ᾱ ᾱ. μ̄ κ̄. καὶ ἐστὶν ἀπὸ τούτου ἄρωμεν τὸ ἐμβαδὸν, τουτέστι δ̄ ᾱ. λείψει ᾱ δ̄ ᾱ ᾱ. λοιπὸν γίνεται ρ̄ ᾱ. δ̄ ᾱ ᾱ. μ̄ κ̄. ταῦτα πεντάκις γίνεται φ̄ δ̄ ᾱ ᾱ. μ̄ ρ̄. ἴσον τετραγώνῳ, καὶ πάντα δεῖ δύναμιν ᾱ. γίνεται δυνάμεις ρ̄. μ̄ φ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. ἔστω τῶν ἀπὸ πλευρᾶς ἀριθμῶν ῑ μ̄ ε̄. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ κδ̄ ᾱ. δεῖ τὰς ὑποτάσεις, πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ κδ̄ ᾱ. καὶ ε̄ ᾱ ᾱ. ἡ δὲ τῶν τετραγώνου πλευρὰ υιγ̄ ᾱ. ἐστὶ οὖν τὸ ὀρθογώνιον τάξωμεν ἐν ἀριθμοῖς. καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ μ̄ μονάδας ῑ, πε-

ριέξον ἴσην δυνάμει ιζ̄. φξθ̄ ιγ̄. ἔστω ἡμῶν τὰ λοιπὰ δῆλα.

IN QVÆSTIONEM III.

AD quæstiones omnes huius libri reliquas nihil adnotauit Xilander, earum tum difficultate, tum insigni deprauatione deterritus. Sed & summi vir ingenij Franciscus Vieta cùm hanc ipsam quæstionem pertractandam suscepisset, Zetetico nono libri quinti parum feliciter eam explicauit; etenim methodum Diophanti minimè percipiens, aliamque viam inire coactus, quod ille vniuersalissimè proposuerat de quolibet numero ad aream trianguli addendo, ipse ad solos numeros è duobus quadratis compositos, restrinxit. Itaque nobis ob integram tot pulcherrimorum subtilissimorumque problematum enodationem, solida relicta est gloria. Quàm vt non immeritò consequamur, circa hanc quæstionem.

Aduerte primò triangulum datum specie vocari à Diophanto, illud cuius laterum proportio data est tantùm, ipsorum laterum quantitate indefinita manente, quod à tertia definitione datorum Euclidis depromptum est. Verè enim triangula omnia quæ latera habent proportionalia eiusdem speciei censeri possunt, tum ob laterum similitudinem, tum ob angulorum æqualitatem, vnde & similia vocantur ab Euclide. Idcirco Diophantus huiusmodi triangula non exhibet in vnitatibus, quia verbi gratia si exponatur triangulum 3. 4. 5. Id iam non in specie, sed in individuo exhibitum erit. Cum autem proportio laterum dabitur, sed ipsa laterum quantitas manebit indefinita, exhibendo scilicet triangulum in Numeris, vt facit Diophantus sicut 3 N. 4 N. 5 N. verè & propriè exhibitum erit triangulum in specie, cùm hæ positiones, ob numeri indeterminationem, applicari possint lateribus cuiuslibet trianguli huius speciei.

Aduerte secundò. Cum per primam operationem reperiatur 6 Q. + 5. æqualis quadrato, æquandum eum esse cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 6. puta 9 Q. 16 Q. &c. Quare oportet talem deligi quadratorum numerum vt ab eo auferendo 6. residuum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Proinde cùm 6. sit numerus areæ expositi trianguli, patet quærendum aliud triangulum, cuius area si auferatur ab aliquo quadrato, residuum ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Vnde apparet necessitas secundæ operationis, qua Diophantus huiusmodi triangulum & quadratum inuestigat.

Aduerte tertiò subtiliter fingi triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{2}$. vnde fit hypotenusa 1 Q. + $\frac{1}{4}$. perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{4}$. Basis verò 2. Quare ducto dimidio basis in perpendiculum fit area 1 Q. − $\frac{1}{4}$. Quadrati verò latus fingitur 1 N. + $\frac{1}{8}$. Et primò pars illius ponitur 1 N. vt eius quadratus puta 1 Q. elidatur ab 1 Q. qui est in area, cùm area subtrahetur à quadrato. Deinde pars altera ponitur $\frac{1}{8}$ vt eius quadratus $\frac{1}{64}$. sit eiusdem denominationis cum − $\frac{1}{4}$. qui reperitur in area, vnde commodissimè hic ab illo subtrahetur per solam additionem 1. ad 100. ob signi diuersitatem, communi retento denominatore, & relinquetur $\frac{99}{64}$. Quod si diuersi essent harum fractionum denominatores facta subtractione, relinquerentur vtique cubi, vel quadratoquadrati, vel aliæ potestates, à quibus sese expedire difficillimum esset. Tertio in hac secunda lateris parte ponuntur vnitates 10. duplum scilicet dati numeri 5. vt in quadrato reperiantur 20. vnitates duplum scilicet ipsius 10. ac proinde quadruplum ad 5. Quare cum $\frac{99}{64}$. + 20. debeat ad 5. habere rationem quadrati ad quadratum, ac proinde vno in alterum ducto oporteat gigni quadratum, patet productum ex 20. in 5. esse quadratum quia ob rationem quadruplam 20. & 5. sunt plani similes. Porrò $\frac{99}{64}$. + 100. (seu omnia ducendo in 1 Q. vt tollatur fractio) 505 + 100 Q. nulla ratione posset æquari quadrato nisi 100. esset quadratus. Vnde colligas in hac secunda lateris parte loco 10. poni posse quemlibet numerum qui sit semissis alterius qui ad 5. habeat rationem quadrati ad quadratum. Ac proinde ex hoc capite quæstionem varias recipere solutiones. Verbi gratia ponatur latus quadrati 1 N. + $\frac{1}{8}$. fiet quadratus 1 Q. + $\frac{1}{64}$. + 80. vnde auferendo aream puta 1 Q. − $\frac{1}{4}$. remanet $\frac{1}{64}$. + 80. qui ad 5. debet habere rationem quadrati ad quadratum. Quare altero in alterum ducto fit $\frac{1}{64}$. + 400. æqualis quadrato, & omnia in 1 Q. fit 8005 + 400 Q. æquandus quadrato. Quod facilè fiet, quia 400. est quadratus. Denique omissam à Diophanto solutionem quæstionis afferre non pigebit. Cùm sit 1 N. $\frac{1}{2}$. formatur triangulum à $\frac{1}{2}$. & à $\frac{1}{4}$. fitque hypotenusa $\frac{1}{4}$. perpendiculum $\frac{1}{4}$. basis 2. Latus autem quadrati est $\frac{1}{8}$. quadratus $\frac{1}{64}$. vel in eadem denominatione $\frac{1}{64}$. Itaque ponantur latera quæsiti trianguli $\frac{1}{4}$ N. $\frac{1}{4}$. N. 2 N. area adsumens 5. fit $\frac{1}{4}$ Q. + 5. æqualis quadrato $\frac{1}{4}$ Q. & auferendo vtrimque æqualia, manent $\frac{3}{4}$. æqualia 5. fitque 1 Q. $\frac{20}{3}$. At 1 N. $\frac{10}{3}$. Erunt ergo latera quæsiti trianguli $\frac{10}{3}$. $\frac{8}{3}$. $\frac{20}{3}$. fitque area $\frac{100}{9}$. cui addendo 5. fit quadratus $\frac{145}{9}$. cuius latus $\frac{12}{3}$.

Quoniam verò hinc fortè venit in mentem Francisco Vietæ quæstionem applicari posse solis numeris, qui è duobus quadratis componuntur, quia Diophantus in sua hypothesi sumpserat 5. è duobus quadratis compositum; quamuis ex ipso ductu analyseos Diophantææ satis constet, ad quemlibet numerum extendi problema, ne quis tamen superfit dubitandi locus, placet id etiam experientia comprobare. Sit ergo inueniendum triangulum, cuius area adsumens 6. qui minimè

compositus est è duobus quadratis, faciat quadratum, Itaque prius quærendum est triangulum, itemque quadratus, vt area trianguli de quadrato sublata, supersit numerus qui ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Fingatur triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{N}$. erit vt prius area 1 Q. $-\frac{1}{2}$. sit autem latus quadrati 1 N. $+\frac{1}{12}$. erit quadratus 1 Q. $\frac{1}{144}$. $+24$. à quo auferendo aream supradictam, supereſt $\frac{1}{12}$ Q. $+24$. quo ducto in 6. & omnia ducendo in 1 Q. fit tandem 144 Q. $+870$. æqualis quadrato. Fingatur latus illius 12 N. $+10$. fiet 1 N. $\frac{5}{6}$. & latus quadrati $\frac{1}{144}$. Formetur igitur triangulum abs $\frac{7}{12}$. & $\frac{5}{6}$ & constituatur in Numeris, erunt latera illius $\frac{1}{1}$ N. $\frac{1}{1}$. N. 2 N. fiet area adsumens 6. $\frac{1}{1}$ Q. $+6$, æqualis quadrato à latere suprapositio, hoc est quadrato $\frac{1}{1}$ Q. vnde tandem fit valor quadrati $\frac{1}{1}$. vel in minimis $\frac{1}{1}$. ac proinde 1 N. est $\frac{1}{1}$. per quam resoluendo hypostases, inueniuntur latera quæsiti trianguli, nimirum $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{7}{1}$. fitque area $\frac{1}{1}$. cui addendo 6. fit quadratus $\frac{1}{1}$. cuius latus $\frac{1}{1}$.

OBSERVATIO D. P. F.

Error Vietæ indè haud dubiè oritur. Supposuit vir clarissimus differentiam duorum quadratoquadratorum vt 1 qq. — 1. æquari areæ cui adjiciendo quintuplum quadrati fiat quadratus, si 5. numerus datus dividatur in duos quadratos poterit inueniri quintuplum quadrati à quo demptâ vnitate superſit quadratus.

Ponatur igitur latus quadrati quintuplicandi esse 1. N. + 1. aut alius quinis numerorum numerus + 1. quintuplum quadrati illius erit 5 Q + 10. N. + 5 cui si adiicias aream 1 Q Q — 1 fiet 1 Q Q + 5 Q + 10. N + 4. quæ summa debet æquari quadrato, hoc autem non est operosum. Cum numerus vnitatum ex hypothesi adjectâ problemati sit quadratus. Non vidit Vieta quæstionem perinde resolui posse si loco 1 Q Q — 1 sumpsisset pro areâ 1 — 1 Q Q. eò enim deducenda statim quæstio vt datus numerus 5 vel 6. vel alius quilibet in quadratum ductus adjectâ vnitate conficiat quadratum quod generaliter est facillimum cum vnitas sit quadratus.

Nos peculiari methodo quæstionem hanc & duas proximas resoluimus, cuius beneficio dum quærimus triangulum cuius area vnâ cum 5 v. g. conficiat quadratum triangulum in minimis exhibemus $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ *cuius area 20 addito 5 facit quadratum 25. sed de ratione & vsu nostræ huius methodi non est huius loci plura addere, non sufficeret sanè marginis exiguitas, multa enim habemus huc referenda.*

QVÆSTIO IV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus multatus dato numero faciat quadratum. Datus esto 6. & ponatur triangulum datum specie 3 N. 4. N. 5 N. & ob hypothesin 6 Q. — 6. æquantur quadrato. Esto ipsi 4 Q. Et rursus res eò deducitur, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, & quadratus numerus, quo de area trianguli sublato, si reliquum sexies sumatur, fiat quadratus. Formetur rursus triangulum ab 1 N. & $\frac{1}{N}$. At latus quadrati sit 1 N. cum defectu fractionis numericæ tot vnitatum, quantus est semissis dati numeri. Hoc est $\frac{1}{2}$. & fit quadratus 1 Q. $+\frac{1}{4}$. — 6. Hunc si ab area detrahamus, hoc est ab 1 Q. — $\frac{1}{2}$. relinquitur 6 — $\frac{1}{2}$. & omnia sexies, & in 1 Q. ducantur. Fiunt 36 Q. — 60. æquales

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῶ λήψας ἀριθμὸν δοθέντα ἀριθμόν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ϛ̄. καὶ πεπάχθω τὸ τρίγωνον διδυμόν τῶν εἰδῶν ϛ̄ γ̄. ϛ̄ δ̄. ϛ̄ ῑ̄. καὶ διὰ τοῦ ὑποθέσιν δ̄ ϛ̄ ἴσαι εἰσὶ τετραγώνῳ. ἔστω δ̄ δ̄. πάλιν ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅπως ὁ ἀπὸ τῶ ἐμβαδῷ ἀρθεὶς τετράγωνος, καὶ τὰ λοιπὰ ἑξάκις γενόμενα ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω πάλιν τὸ τρίγωνον ἀπὸ ϛ̄ ᾱ. καὶ ϛ̄ ᾱ. ἀπὸ τῶ τετραγώνου πλευρὰ ϛ̄ ᾱ. λείψει ἀριθμοστῶ μιᾶς δεῖ τοσούτων ὅσων ἔχει τὸ ἥμισυ τῶ πλήθους τῶ δοθέντος ἀριθμοῦ, τουτέστι γ̄ ϛ̄ ᾱ. καὶ γίνεται ὁ τετράγωνος δ̄ ᾱ. ϑ̄ ϛ̄ ᾱ. ↑ μ̄ ϛ̄. καὶ ἐστὶν αὐτῶν ἀριθμὸς ἀπὸ τῶ ἐμβαδῶ, τουτέστιν ἀπὸ δ̄ ᾱ. λείψει ᾱ ϛ̄ ᾱ λοιπὸς γίνεται μ̄ ϛ̄. λείψει ῑ ϛ̄ ᾱ. καὶ ταῦτα ἑξάκις, καὶ ποιεῖ δύναμιν γίνεται δ̄ λϛ̄

λείψει μ$^{\bar{\alpha}}$ ξ$^{\bar{\alpha}}$. ἵσον τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ις$^{\bar{\alpha}}$ ς$^{\bar{\alpha}}$. λείψει μ$^{\bar{\alpha}}$ β$^{\bar{\alpha}}$. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς$^{\bar{\alpha}}$ μ$^{\bar{\alpha}}$ ϟ$^{\bar{\alpha}}$. πλάσσεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ϟ$^{\bar{\alpha}}$ ϟ$^{\bar{\alpha}}$. καὶ γ$^{\bar{\alpha}}$ ι$^{\bar{\alpha}}$. ἡ ϟ τῶν τετραγώνου πλευρὰ λζ$^{\bar{\alpha}}$. ϟ$^{\bar{\alpha}}$ ϟ$^{\bar{\alpha}}$. καὶ εὑρὼν τὸ τρίγωνον πάσω ἐν ςϟ$^{\bar{\alpha}}$. καὶ ἀκολουθήσας τῇ προτάσει, εὑρήσω τὸν ς$^{\bar{\alpha}}$ ῥητὸν, ὃς μόνος.

quadrato. Esto latus eius 6 N. − 2. inuenietur 1 N. $\frac{1}{2}$ Formabitur ergo triangulum à $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$. Eritque quadrati latus $\frac{17}{2}$. & cùm inuenero triangulum, statuam illud in numeris, secutusque propositionem, inueniam numerum rationalem. Et constat.

IN QVAESTIONEM IV.

EX dictis ad præcedentem, omnia quæ hic peraguntur fiunt perspicua. Apparet sanè fingi quadratum à latere 1 N. − $\frac{1}{m}$. Vt in quadrato reperiantur vnitates − 6. vnde omnia per 6. multiplicando, fiat quadratus 36. Alioquin enim numerus 36 Q. − 6o. quadrato æqualis inueniri non posset, si 36. non esset quadratus. Quamobrem etiam patet, loco ipsius 3. in latere poni potuisse quemlibet alium vnitatum numerum, cuius duplum ad 6. habeat rationem quadrati ad quadratum. Verbi gratia 12. fieretque latus 1 N. − $\frac{2}{m}$. & sic de alijs.

Porrò non in pigebit tyronum gratiam integram apponere quæstionis solutionem quam prætermisit Diophantus. Cùm fiat 1 N. $\frac{1}{2}$ & latus quadrati $\frac{17}{2}$. formetur triangulum ab $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ & latera statuantur in numeris, fient $\frac{4913}{1728}$ N. $\frac{2873}{1728}$ N. 2 N. Est ergo area multata numero 6. $\frac{4913}{1728}$ Q. − 6. æqualis quadrato à latere $\frac{17}{12}$ N. puta quadrato $\frac{289}{144}$ Q. Vnde fit valor quadrati $\frac{145}{49}$. ac proinde valor numeri $\frac{1}{2}$ per quem retoluendo hypostases, fiunt quæsiti trianguli latera $\frac{1225}{1176}$. $\frac{697}{1176}$. $\frac{25}{24}$. Estque area $\frac{725}{392}$. vnde auferendo datum numerum 6. superest quadratus $\frac{1459}{392}$. à latere $\frac{37}{28}$.

QVÆSTIO V.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῶ ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ δοθεὶς μ$^{\bar{\alpha}}$ ι$^{\bar{\alpha}}$. καὶ πάλιν τετάχθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ις$^{\bar{\alpha}}$ γ$^{\bar{\alpha}}$. ις$^{\bar{\alpha}}$ δ$^{\bar{\alpha}}$. ις$^{\bar{\alpha}}$ ε$^{\bar{\alpha}}$. γίνεται μ$^{\bar{\alpha}}$ ι$^{\bar{\alpha}}$. ϟ δ$^{\bar{\alpha}}$ ε$^{\bar{\alpha}}$ ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ποιοῦ μέν ἐστιν ἴσας δυνάμεσι τετραγωνικαῖς. ἀπάγεται πάλιν εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν ὅπως ὁ τετράγωνος περιλαβὼν τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ δεκατὸν τετραγώνου. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ α ις.$^{\bar{\alpha}}$. καὶ ς$^{\bar{\alpha}}$ α$^{\bar{\alpha}}$. ἡ ϟ τῶν τετραγώνου πλευρὰ α ις.$^{\bar{\alpha}}$. ἐξ ις ι$^{\bar{\alpha}}$. καὶ γίνεται ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ ἐκ τοῦ τετραγώνου δι$^{\bar{\alpha}}$ κς$^{\bar{\alpha}}$. μ$^{\bar{\alpha}}$ ι$^{\bar{\alpha}}$. ταῦτα δεήσει, γίνεται δ$^{\bar{\alpha}}$ τξ$^{\bar{\alpha}}$. μ$^{\bar{\alpha}}$ ρ$^{\bar{\alpha}}$. ἴσαι τετραγώνῳ. καὶ τὰ τέταρτα, γίνονται δ$^{\bar{\alpha}}$ ξι$^{\bar{\alpha}}$. μ$^{\bar{\alpha}}$ κε$^{\bar{\alpha}}$. ἴσοι τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς μ$^{\bar{\alpha}}$ ε$^{\bar{\alpha}}$. ις$^{\bar{\alpha}}$ ιι$^{\bar{\alpha}}$. ὅθεν εὑρίσκεται ὁ ς$^{\bar{\alpha}}$ μ$^{\bar{\alpha}}$ π$^{\bar{\alpha}}$. δεῖ τὰς ὑπος ἀσῆς. καὶ ὁμοίως τοῖς πρὸ τούτου εὑρήσομεν.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ detractus a dato numero faciat quadratum. Esto datus 10. & rursum statuatur triangulum abs 3 N. 4 N. 5 N. fiunt 10 − 6 Q. æquales quadrato, & si æquales faciamus numero quadratorum quadrato, eò rursus deuentum est, vt inueniatur triangulum rectangulum & quadratus numerus, ita vt quadratus adsumpto areæ numero faciat decimam partem quadrati. Formetur triangulum abs $\frac{1}{m}$. & 1 N. At quadrati latus esto $\frac{1}{m}$. + 5 N. & fit compositus ex area, & ex quadrato 26 Q. + 10. Hæc decies, fiunt 260 Q. + 100. æqualia quadrato, & quadrans horum 65 Q. + 25. æquatur quadrato. Cujus latus esto 5 + 8 N. vnde inuenitur 1 N. 80. Ad positiones. Et inueniemus vt in præcedentibus.

IN QVAESTIONEM V.

HIC fingens triangulum Diophantus ab 1 N. & $\frac{1}{m}$. ponit hypotenusam 1 Q. + $\frac{1}{m}$. At perpendiculum 1 Q. − $\frac{1}{m}$. basim 2. vnde fit area 1 Q. − $\frac{1}{m}$. tum fingit quadratum à latere $\frac{1}{m}$. + 5 N. fitque quadratus $\frac{1}{m}$. + 25 Q. + 10. cui addendo aream, fit 26 Q. + 10. quo ducto in 10. fit 260 Q. + 100. æquandus quadrato. Vnde patet cur in quadrati latere posuerit 5. vt scilicet in quadrato reperiatur 10. qui ad datum numerum 10. sit in ratione quadrati ad quadratum. Fecit autem idem latus $\frac{1}{m}$. + 5 N. non sicut in præcedentibus 1 N. + $\frac{1}{m}$. vt latera & aream trianguli retineret eadem quæ priùs. Nam si posuisset latus quadrati 1 N. + $\frac{1}{m}$. ponendum fuisset perpendiculum

perpendiculum trianguli $\frac{1}{\text{Q.}}$. − 1 Q. vt etiam area fieret $\frac{1}{\text{Q.}}$. − 1 Q. res tamen æquè benè succederet, & inueniretur 1 N. $\frac{1}{\text{N.}}$. alter scilicet numerorum, à quo formari debet triangulum, cùm per operationem Diophanti alter reperiatur puta 80. Omisit autem hic etiam Diophantus integram quæstionis solutionem labori se subtrahens, ob molestas fractiones; sed hunc laborem suscipere non grauabimur. Cum 1 N. sit 80. & latus quadrati $\frac{1}{\text{N.}}$. formetur triangulum abs 80. & $\frac{1}{\text{N.}}$. & statuantur latera in numeris, fient $\frac{1}{\text{N.}}$ N. $\frac{1}{\text{N.}}$ N. 2 N. sitque area $\frac{1}{\text{Q.}}$ Q. qua detracta de numero 10 fit 10 − $\frac{1}{\text{Q.}}$ Q. æqualis quadrato, esto quadrato à latere $\frac{1}{\text{N.}}$ N. puta quadrato $\frac{1}{\text{Q.}}$ Q. fient tandem 10. æquales $\frac{1}{\text{Q.}}$ Q. vnde fit valor quadrati $\frac{1}{\text{Q.}}$. seu in minimis $\frac{1}{\text{N.}}$. vnde 1 N. est $\frac{1}{\text{N.}}$. Ad positiones erunt latera quæsiti trianguli. $\frac{1}{\text{N.}}$. $\frac{1}{\text{N.}}$. $\frac{1}{\text{N.}}$. est area $\frac{1}{\text{N.}}$. qua detracta de 10. remanet quadratus $\frac{1}{\text{N.}}$. à latere. $\frac{1}{\text{N.}}$.

Non adeo molestos numeros habebimus si numeri 65 Q. + 25. latus statuamus 5 + 5 N. Nam fiet 1. N. $\frac{1}{2}$. latus quadrati $\frac{1}{2}$. Quare formabitur triangulum à $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{2}$. eruntque latera in Numeris $\frac{1}{2}$ N. $\frac{1}{2}$ N. 2 N. & area detracta de 10. fit 10. − $\frac{1}{2}$ Q. æqualis quadrato $\frac{1}{2}$. Q. vnde fit tandem 1 Q. $\frac{1}{2}$. At 1 N. $\frac{1}{2}$. per quem resoluendo hypostases, fiunt latera trianguli quæsiti $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. Area est in minimis $\frac{1}{2}$. quam auferendo à 10. remanet quadratus $\frac{1}{2}$. à latere $\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO VI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens vnum laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. statuatur rursus triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & fiunt 6 Q. + 3 N. æquales 7. & oportet semissem numerorum in se ductum adsumere quadratos per 7. multiplicatos, & facere quadratum. Non facit autem. Oportet igitur inuenire triangulum rectangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Esto vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fiunt 3 $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. & omnia quater, fiunt 14 N. + 1. æqualia quadrato. Vt autem etiam triangulum rectangulum rationale constituamus, oportet, & 1 Q. + 1. æquari quadrato. Horum interuallum est 1 Q. − 14 N. mensuratio 1 N. secundum 1 N. − 14. Istorum interualli semissis in se facit 49. quod æquatur minori, & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Ad positiones. Pono igitur vnum laterum circa rectum trianguli $\frac{1}{2}$. alterum 1. & omnia septies & in numeris, fiet illud 24 N. hoc verò 7 N. At hypotenusa 25 N. & fit area adsumens latus secundum 84 Q. + 7 N. Hoc æquatur 7. vnde 1 N. inuenitur $\frac{1}{2}$. suntque latera trianguli 6. $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$. & constat.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἑνὶ καθέτῳ προσλαβὼν τὴν ἴσην τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν πλευρᾷ δοθείσῃ ἀριθμὸν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ζ̄. τετάχθω πάλιν ὁ τρίγωνος διδουμένῳ τῷ εἴδει ις̄ γ̄. ις̄ δ̄. ις̄ ε̄. καὶ γίνονται δ̄ ϙ̄. ις' γ̄. ἴσαι μ̄ ζ̄. καὶ δεῖ τὴν ἀριθμὴν τῷ ἡμίσει ἐφ' ἑαυτῷ προσλαβοῦσαν τὰς δυνάμεις ἐπτάκις γενομένας καὶ ποιεῖν τετράγωνον. οὐ ποιεῖται δέ, ὥστε δυνατὸν δι' ἑνὸς τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ἡμίσεως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, προσλαβὼν τὸν ἐπταπλάσιον τὸν ἐν τῷ ἑνὶ καθέτῳ, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀριθμὸς ᾱ. ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ μ̄ ᾱ. καὶ γίνονται ἀριθμοὶ γ̄. α ϙ̄. μ̄ α δ̄'. καὶ πάντα τετράκις γίνονται ϛ μ̄ ᾱ. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ῥητὸν κατασκευάσωμεν δεῖ καὶ δύναμιν ᾱ μονάδα ᾱ. ἴσας ἓξ τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ γίνεται δ̄ α λείψει ις̄ ιδ̄. ἡ μέτρησις ἀριθμοῦ ᾱ κ̄ ξ' α λείψει μ̄ ιδ̄. τῆς ὑποχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται μ̄ μθ̄. ἴσαι τῷ ἑπτάκις, καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς κδ̄ ζ̄. δῆλον τὰς ὑποτάσεις. τάσσω οὖν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ πολυώνυμον κδ̄ ζ̄. τὴν δὲ ἑτέραν μ̄ α̈. καὶ πάντα ἑπτάκις καὶ ἐν ἀριθμοῖς γίνεται ἡ μὲν ἀριθμὸς κδ̄. ἡ δὲ ἀριθμὸς ζ̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἀριθμὸς κε̄. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἑνὶ καθέτῳ μὲν δυνάμεις τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δ̄ πδ̄ ις' ζ̄. ταῦτα ἴσα μ̄ ζ̄. δῆλον ὁ ἀριθμὸς διρίσεται ᾱ ϙ̄. αἱ τῶν πολυωνύμων πλευραὶ μ̄ ε̄. μ̄ ζ δ' μ̄ κε ϙ̄. καὶ ὑφίσ-

OBSERVATIO D. P. F.

HAec propositio & sequentes aliter fieri possunt. Fingatur triangulum in hac propositione abs dato numero & vnitate & plana lateribus similia applicentur ad summam vnitatis & numeri dati, orietur quaesitus triangulus.

IN QVAESTIONEM VI.

HIc deuenitur ad regulas compositas, vt liquet tum ex prima operatione, in qua 6 Q. + 3 N. æquantur 7. tum ex secunda, in qua 84 Q. + 7 N. æquantur 7. has autem æquationes resoluit Diophantus modo sibi familiari quem explicauimus ad trigesimam tertiam primi, sumendo scilicet quadratum semissis numeri Numerorum, (qui numerus est vnum laterum circa rectum sumpti trianguli) & huic quadrato addendo productum ex dato numero 7. in numerum quadratorum, qui est numerus areæ. Quamobrem rectè infert. Inueniendum esse triangulum, vt quadratus semissis vnius laterum circa rectum, adsumens septuplum areæ, faciat quadratum. Huius trianguli latera circa rectum ingeniosè ponuntur 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cuius septuplum $3\frac{1}{2}$ N. cui addendo quadratum semissis secundi lateris, fit $3\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. æqualis quadrato, & omnia in 4. ad tollendas fractiones, fit 14 N. + 1. æqualis quadrato. Porrò vt tria latera trianguli sint rationalia, cum latera circa rectum posita sint 1 N. & 1 oportet vt eorum quadrati simul faciant quadratum hypotenusæ. Quare oportet vt 1 Q. + 1. sit æqualis quadrato. Iam ergo duplicata occurrit æqualitas, cùm æquandi sint quadrato tum 14 N. + 1. tum 1 Q. + 1. Reliqua sunt manifesta. Cur in lemmatis solutione adiiciantur denominatores, ratio est quia inuento triangulo soluente lemma propositum, si sumatur quodlibet aliud simile, id æquè benè proposito satisfaciet, vt demonstrare in promptu est. Sint A B latera circa rectum trianguli rectanguli, & sit D. quadratus semissis ipsius A. sitque E area trianguli, & datus numerus C. quo ducto in E fiat F. additisque simul F D. fiat G. quadratus. Tum sumantur H K latera circa rectum alterius trianguli similis priori, cuius area sit M. qua ducta in C. fiat N. & sit L. quadratus semissis ipsius H. additisque L N. fiat P. dico P. esse quadratum. Quia enim vt A ad H. sic est semissis ipsius A. ad semissem ipsius H. [1] At quadrati D L. sunt in duplicata ratione laterum, patet D ad L. duplicatam esse rationem rationis A ad H. [2] sed & ob similitudinem triangulorum area E ad aream M. est in duplicata ratione lateris A ad latus H. est ergo D ad L. vt E ad M. Quia verò idem C ductus in E & in M. producit F & N. [3] est F ad N. vt E ad M. ergo est etiam F ad N. vt D ad L. Quamobrem [4] & antecedentium summa puta G. est ad summam consequentium P. sicut vnus antecedentium D ad vnum consequentium L. sed D L sunt quadrati. Ergo G ad P. habet rationem quadrati ad quadratum, [5] ac proinde cùm G sit quadratus ex hypothesi, erit & P. quadratus. Quod erat demonstrandum.

F 2352. G 2401.
D 49. E 336.
A 14. B 48.
C 7
H 28. K 96.
L 196. M 1344.
N 9408. P 9604.

11. *octani.*
2. 3. *Pauis.*
17. *septimi.*
12. *septimi*
24. *octani.*

Facile quoque est examinare an numeri à Diophanto inuenti soluant quæstionem sunt enim latera trianguli δ. $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{4}$. est autem area $\frac{15}{16}$. cui si addas alterum latus, puta $\frac{7}{4}$. fit vtique præscriptus numerus 7.

QVÆSTIO VII.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῦ λείψας ἢ ἵνα τὴν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ ἢ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ζ. καὶ πάλιν ἐπὶ τάξεως αὐτὸ διδόμενον τῷ εἴδει, ἀπάγει εἰς τὸ ζητῶν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γινόμενον, καὶ προσλαβὸν τὸν ἐπιπλάνον τῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῦ ποιῇ τετράγωνον. ἕ ἔυρητε, ὁ ὢν ζ. κε̄. τάσσω οὖν ἐν ϛ̄ᵉ. ἕ τὸ ἐμβαδὸν λείψας τὸν ἵνα τὴν περὶ τὴν ὀρθὴν γίνονται δυνάμεις πδ̄. λείψει ἀριθμοὶ ζ. ταῦτα ἴσα μ̄ ζ. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ α̃ ϛ̄. δηλ. τὰς ὑποκάσης.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus vno laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 7. Et rursum si statuamus triangulum datum specie, res eò deducitur vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt vnius laterum circa rectum semissis in se ductus, & adsumens septuplum areæ faciat quadratum. Et inuentum est, nempe 7. 24. 25. statuo ergo in numeris, & area multata vno laterum circa rectum facit 84 Q − 7 N. Hæc æquantur 7. & fit 1 N. $\frac{1}{3}$ Ad positiones.

OBSERVATIO D. P. F.

Fingatur triangulum abs dato numero & vnitate & plana lateribus similia applicentur ad differentiam dati numeri & vnitatis, hæc quæstio per viam quâ hujusmodi duplicatas æqualitates infinitis modis resoluimus infinitas recipit solutiones. Modum autem quo vtimur tetigimus & explicauimus infra ad quæstionem 24.

Imò & ſolutiones illæ infinitæ aptantur 4. Sequentibus quæſtionibus, quod nec Diophantus nec Bachetus animaduertit. Cur autem neque Diophantus neque Bachetus ſequentem quæſtionem addiderunt? Innenire triang. rectang. vt vnum ex lateribus aream multatum faciat datum numerum. Certè hanc videntur ignoraſſe quia non ſtatim ſe prodit in reſolutione duplicatæ æqualitatis. Verùm ex noſtrâ methodo facilè poteſt inueniri, ſimiliter in ſequentibus quæſtionibus tertius hic caſus ſuppleri poteſt.

IN QVAESTIONEM VII.

EX dictis ad præcedentem hîc omnia fiunt manifeſta, cùm ab eodem lemmate pendeat ſolutio quæſtionis. Fit autem 1 N. $\frac{1}{2}$. ac proinde quæſiti trianguli latera ſunt $\frac{1}{2}$. 8. $\frac{17}{2}$. Area eſt $\frac{17}{4}$. vnde ſi auferas alterum latus, puta $\frac{1}{2}$ remanet vtique datus numerus 7.

QVÆSTIO VIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt area adſumens vtrumque laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſum ſtatuatur triangulum datum ſpecie. Et rurſum eo res deducitur vt inueniatur triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum. Ponamus denuo vnum laterum circa rectum 1 N. alterum 1. & fit vt quæramus $\frac{1}{4}$ Q. $+\frac{1}{2}$ N. $+\frac{1}{4}$. æqualia quadrato, & omnia quater. Fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquale quadrato. Sed & 1 Q. + 1. æquari debet quadrato. Horum interuallum eſt 14 N. menſuratio 2 N. ſecundum 7. Iſtorum interualli ſemiſſis in ſe facit 1 Q. + 12 $\frac{1}{4}$ − 7 N. æquale 1 Q. + 1. & fit 1 N. $\frac{8}{14}$. eſt ergo triangulum $\frac{45}{14}$. 1. & $\frac{28}{14}$. & $\frac{53}{14}$. & omnia per 28. fit igitur triangulum 45 N. 28 N. 53 N. & fit area adſumens vtrumque latus circa rectum 630 Q. + 73 N. quod æquatur 6. & fit 1 N. rationalis. Ad poſitiones.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτὸ περιλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέραις τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ ϛ̄. καὶ πάλιν τετράγωνον δεδομένους τῷ εἴδει, καὶ πάλιν ἀπαίτεται εἰς τὸ εὑρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ μὴ τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. καὶ πάλιν ὑποκείσθω μία τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς̄ ā. ἡ δὲ ἑτέρα μ̄ ā. καὶ γίνεται ζητεῖν δ̄ ā ᾱ. ες̄ ζ̄ϛ̄. μ̄ ā ᾱ. ἴσα τετραγώνῳ. καὶ παντὸς τετράκις, γίνεται δύναμις ā. ες̄ ιδ̄. μ̄ ā. ἴση τετραγώνῳ. ἡ ὑπεροχὴ ες̄ ιδ̄. ἡ μέζονος ες̄ β̄. καὶ μ̄ ζ̄. τῆς τούτων ὑπεροχῆς τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ γίνεται δύναμις ā. μ̄ ιβ̄. ā ᾱ. λείψει ἀριθμῷ ζ̄. ἴσοι δυνάμει ā. μ̄ ā. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ μ̄ ᾱ. ἴσα ἄρα τὸ τρίγωνον μ̄ μ̄ ᾱ. μ̄ ā. μ̄ νγ̄ ᾱ. καὶ πάντα εἰς κῡ. γίνεται ἄρα τὸ τρίγωνον ἀριθμῷ μ̄ε̄. ἀριθμῷ κῡ. ἀριθμῷ νγ̄. καὶ γίνεται τὸ ἐμβαδὸν μὴ συναμφοτέρας τὰς περὶ τὴν ὀρθὴν δυνάμεων χλ̄. ἀριθμῷ σγ̄. ἵνα μ̄ ϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ ῥητός. δῆλον τὰς ὑποκειμένας.

IN QVAESTIONEM VIII.

RVRSVS ex adnotatis ad ſextam, operationis Diophanti ratio ſatis innoteſcit, ne tamen illius breuitas, tyronibus pariat obſcuritatem, age paulò fuſius eam explicemus. Quærentes triangulum, vt quadratus ſemiſſis ſummæ laterum adſumens ſextuplum areæ faciat quadratum ponimus latera circa rectum 1 N. & 1. vnde fit area $\frac{1}{2}$ N. cujus ſextuplum 3 N. At ſemiſſis ſummæ ſuprapoſitorum laterum eſt $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{2}$. cuius quadratus $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. cui addendo 3 N. fit $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{7}{2}$ N. + $\frac{1}{4}$. & omnia quadruplicando fit 1 Q. + 14 N. + 1. æquandus quadrato. Sed etiam vt hypotenuſa ſit rationalis oportet 1 Q. + 1. æquari quadrato. Ergo duplicata occurrit æqualitas. Interuallum itaque numerorum eſt 14 N. & numeri quorum mutuo ductu id fit ſumuntur 2 N. & 7. cautè, qualia multa fieri animaduertimus paſſim libro tertio. vnde tandem fit 1 N. $\frac{8}{14}$. alterum laterum circa rectum, nam alterum poſitum eſt 1. Quare hypotenuſa erit $\frac{53}{14}$. & abjectis denominatoribus conſtituitur triangulum ſpecie, 45 N. 28 N. 53 N.

fitque area 630 Q. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit 630 Q. + 73 N. æqualis 6. vnde fit 1 N. $\frac{1}{73}$. ſunt ergo latera circa rectum quæſiti trianguli $\frac{1}{73}$. & $\frac{43}{73}$. hypotenuſa $\frac{53}{73}$. vnde fit area $\frac{630}{5329}$. cui addendo ſummam laterum circa rectum, fit $\frac{4329}{5329}$. ſeu 6. vt requirebatur.

QVAESTIO IX.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ λήψας τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ τῇ βάσει τοῦ ὀρθίου ποιῇ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς ϛ̄, καὶ πάλιν ἐπὶ τάξομεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ὁμοειδὲς τῷ εἴδει, γίνεται ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τῆς βάσεως τοῦ ὀρθίου τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν τὸν ἑξαπλάσιον τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ ποιῇ τετράγωνον. τοῦτο δὲ προδέδεικται. καὶ ἔστιν κη̄. μδ̄. νγ̄. τάττω οὖν αὐτῶν ἀριθμούς. καὶ πάλιν γίνεται δυνάμεις χλ̄. λείψει εἰς ϟ̄. ἴσαι μ̄ ϛ̄. ὅθεν διορίσεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ ϛ̄ λ̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus ſumma laterum circa rectum faciat datum numerum. Eſto datus 6. Et rurſus ſi ſtatuamus quæſitum triangulum datum ſpecie, fit vt quærendum ſit triangulum rectangulum, vt ſummæ laterum circa rectum ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens ſextuplum areæ, faciat quadratum. Hoc autem iam antè eſt demonſtratum, & eſt 28. 45. 53. Pono itaque hæc in numeris, & fit tandem 630 Q. — 73 N. æquale 6. vnde inuenitur 1 N. $\frac{1}{73}$. Ad poſitiones.

OBSERVATIO D. P. F.

ADdi poteſt ex noſtra methodo ſequens quæſtio; Inuenire triangulum rectangulum vt ſumma laterum multata aream conficiat datum numerum.

IN QVAESTIONEM IX.

EX præcedentium explicatione, ſatis hæc ſit dilucida. Integram ſolutionem omiſit Diophantus, quæ talis eſt. fit 1 N. $\frac{1}{73}$. Quare latera quæſiti trianguli reperiuntur $\frac{28}{73}$ $\frac{45}{73}$ & $\frac{53}{73}$. Area verò eſt $\frac{630}{5329}$. vnde ſi detrahas ſummam laterum circa rectum, remanet $\frac{4329}{5329}$. ſeu 6. vt poſtulabatur.

QVAESTIO X.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ περιλαβὼν τὸν ἐν συναμφοτέρᾳ, τ ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τ βάσεως τ ὀρθίου ποιῇ δοθέντα ς̄. ἔστω ὁ δοθεὶς μ̄ δ̄. καὶ πάλιν τάξομεν αὐτὸ διδειγμένον τῷ εἴδει. ἀπάγει) πάλιν εἰς τὸ δίρειν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως συναμφοτέρας τ τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τ βάσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ προσλαβὼν τ τῷ ἐμβαδῷ τετραπλάσιον ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ ς̄ ᾱ. καὶ ἀπὸ ς̄ ᾱ. μ̄ ᾱ. ἐπεὶ συναμφοτέρας τ τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τ βάσεως τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ δ̄ δ̄ ᾱ κ̄ δ̄. δ̄ ς̄. ϛϛ̄ δ̄. μ̄. ᾱ. ὁ δὲ τετραπλάσιον τῷ ἐν τῷ ἐμβαδῷ κ̄ ῆ. δ̄ ιβ̄. ϛϛ̄ δ̄. ὥστε διπλῆ ζητεῖν δ̄ δ̄ ᾱ. κ̄ ιβ̄. δ̄ ιη̄. ϛϛ̄ η̄. μ̄ ᾱ. ἴσους τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ πλευρᾶς δῑ ᾱ. ϛϛ ς̄. ↑ μ̄ ᾱ. καὶ γίνεται) ὁ ϛ̄ ὁ δ̄. πλάσει) ἄρα τὸ τρίγωνον ἀπὸ ὁ δ̄. καὶ θ̄ δ̄. καὶ ἁπλᾶ τετράκις πλα-

INVENIRE triangulum rectangulum vt areæ numerus adſumens ſummam hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Eſto datus 4. Rurſus ſtatuemus triangulum datum ſpecie, & eo reducimur, vt inueniamus triangulum rectangulum, vt numerorum hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum ſummæ ſemiſſis in ſe ductus, & adſumens quadruplum areæ faciat quadratum. Formetur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. & ſummæ hypotenuſæ & alterius laterum circa rectum ſemiſſis in ſe, fit 1 Q Q. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. Quadruplum autem areæ eſt 8 C. + 12 Q. + 4 N. Itaque oportet quærere 1 Q Q. + 12 C. + 18 Q. + 8 N. + 1 æqualia quadrato. Eſto latus eius 1 Q. + 6 N. — 1. & fit 1 N. $\frac{1}{4}$. formabitur ergo trian-

gulum abs ½ & ¼ & omnia quater. Formabitur rursum triangulum a 9. & 5. & sumens minima similium, statuo ipsum in numeris, fit 28 N. 45 N. 53 N. Et est numerus areæ adsumens summam hypotenusæ & alterius laterum circa rectum 630. Q. + 81 N. æqualis 4. & fit 1 N. 39/81. Ad positiones.

θέσει) καὶ πάλιν τὸ τρίγωνον ὑπὸ δ. καὶ ἐπεὶ ἐλαβον τὰ ἐλάχιστα τῶν ὁμοίων πλευρῶν αὐτὸν ἐν ις½. γίνονται ις κη. ις μθ. ις νγ. καὶ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ μὴ συναμφοτέρας τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν δ½, χλ ις πα. ἴσος μὲ δι. καὶ γίνεται ὁ ς' δ ι'. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις.

IN QVAESTIONEM X.

IMPRIMIS monendus est lector, hanc & sequentem propositionem in codice Xilandri malè ordinem immutare, cùm sequens statuatur ibi decima, & hæc vndecima. Rectius in codice regio suum quemque obtinet locum, in quo vno codex ille nobis hucusque fuit auxilio, in reliquis omnibus nimis infeliciter cum codice Xilandri consentiens. Sed & euidens est Diophantum in sequente quæstione vndecima, supponere totam fere decimæ huius constructionem, vt de harum propositionum ordine nullus superfit dubitandi locus. Hic porro cum inueniendum sit triangulum, vt quadratus semissis compositi ex hypotenusa, & ex altero laterum circa rectum, adsumens quadruplum areæ faciat quadratum, formatur triangulum ab 1 N. & ab 1 N + 1. fitque hypotenusa 2 Q. + 2 N. + 1. basis 2 N. + 1. perpendiculum 2 Q. + 2 N. Area verò est 2 C. + 3 Q. + 1 N. cuius quadruplum 8 C. + 12 Q. + 4 N. summa autem hypotenusæ & baseos est 2 Q. + 4 N. + 2. cuius semissis 1 Q. + 2 N. + 1. cuius quadratus fit 1 QQ. + 4 C. + 6 Q. + 4 N. + 1. cui addendo quadruplum areæ, fit 1 QQ. + 12, C. + 18 Q. + 8 N. + 1. æquandus quadrato. Huius autem latus cur ponatur à Diophanto 1 Q. + 6 N. − 1. satis superque docuimus ad vigesimam nonam quarti, nimirum hac ratione tolluntur quadratoquadrati, cubi & vnitates, manetque æquatio inter duas proximas species quadratos & numeros. Nam fiunt 16 Q. æquales 20. N. vnde fit 1 N. 5/4. Quare formandum est triangulum à ½. & ¼ & omnia per 4. multiplicando, fingitur triangulum à 5. & 9. suntque latera 106. 56. 90. quæ diuidendo per 2. vt habeatur nimirum triangulum eiusdem speciei in integris, fiunt 53. 28. 45. cuius rei ratio ex demonstratis ad sextam satis liquet. Ponuntur ergo latera quæsiti trianguli 53 N. 28. N. 45 N. & est area 630 Q. cui addendo summam hypotenusæ 53 N. & lateris 28 N. fit 630 Q. + 81 N. æqualis 4. vnde fit 1 N. 39/81. per quem resoluendo hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli 4347/81. 2212/81. 3485/81. Area est 324/81. cui si addas summam hypotenusæ & primi lateris fit 4347/81. seu 4. vt requirebatur.

Cæterùm eodem prorsus artificio soluetur quæstio quæ à Diophanto prætermissa est, cùm tamen ad hanc tractationem pertineat nimirum.

Inuenire triangulum rectangulum, vt areæ numerus adsumens hypotenusam datum faciat numerum. Esto datus 4.

Patet quærendum prius triangulum, vt quadrato semissis hypotenusæ addendo quadruplum areæ, fiat quadratus. Fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. erit semissis hypotenusæ 1 Q. + 1 N. + ¼. cujus quadratus 1 QQ. + 2 C. + 2 Q. + 1 N. + 1/16. cui addendo quadruplum areæ, puta 8 C. + 12 Q. + 4 N. fit 1 QQ. + 10 C. + 14. Q. + 5 N. + 1/16. æqualis quadrato. Ponatur latus illius 1 Q. + 5 N. − ¼. fient tandem 10 N. æquales 10. Q. Quare 1 N. est 1. & fingendum est triangulum ab 1. & à 2. fiuntque latera 5. 3. 4, quæ si statuantur in numeris, fiet area cum hypotenusa 6 Q. + 5 N. æqualis 4. vnde fit 1 N 9/20. sunt ergo quæsiti trianguli latera 2 9/20. 2. 1 9/20 fitque area 1 9/20 cui si addas hypotenusam fit numerus 4. vt postulabatur.

QVÆSTIO XI.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ multatus summa hypotenusæ & alterius laterum circa rectum, faciat datum numerum. Esto datus 4. Rursum si statuamus triangulum datum specie, eò ducimur vt inueniamus triangulum rectangulum, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῶ λήψας τὸν ἐν συναμφοτέρα τῆς τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πιῆ δοθέντα ἀριθμόν. ἔστω ὁ δοθεὶς μονάδες δ'. καὶ πάλιν ἐπὶ τάξωμεν αὐτὸ διδεδμόν τῷ εἴδει, ἀπάγει εἰς τὸ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῶ πεντάκις ληφόμενος πρὸς συναμ-

φοτέρων τῆς ἐν ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ ἥμισυ ἐφ' ἑαυτὸ ποιῇ τετράγωνον. καὶ δεχθήσεται ὅτι ὄζιν κη̄. μδ̄. ργ̄. τάσσω αὐτὸν ἐν ες^ις καὶ γίνονται δ^ι χλ̄. λείψει ις̄ σᾱ. ἴσαι μ^ι δ^ι. καὶ γίνεται ὁ χ^ι ᾱ ῑ. ὅθεν πρὸς ὑποστάσεις.

summæ ex hypotenusa, & altero laterum circa rectum, faciat quadratum, & demonstratum est esse 28. 45. 53. Pono illud in numeris, & fiunt 630 Q. — 81 N. æquales 4. & fit 1 N. $\frac{1}{1}$. Ad positiones.

IN QVAESTIONEM XI.

HVIVS quæstionis solutio pendet omnino à lemmate ad præcedentem assumpto. Nam inuento triangulo vt quadruplum areæ additum quadrato semissis compositi ex hypotenusa & altero laterum, faciat quadratum, constituitur in Numeris, puta 53 N. 28 N. 45 N. & fiunt tandem 630 Q. — 81 N. æquales 4. vnde 1 N. fit $\frac{1}{1}$. Quare quæsiti trianguli latera reperiuntur $\frac{53}{1}$. $\frac{28}{1}$. $\frac{45}{1}$. Area est $\frac{630}{1}$ vnde auferendo summam hypotenusæ & baseos, puta $\frac{81}{1}$. remanet $\frac{4}{1}$. seu 4. vt postulabatur.

Eodem etiam artificio soluetur hæc quæstio.

Inuenire triangulum rectangulum, vt area, detracta hypotenusa, faciat datum numerum.

Datus esto 4. Quæretur triangulum, vt prius, vt quadruplum areæ additum quadrato semissis hypotenusæ, faciat quadratum, quale inuentum est ad præcedentem 5. 4. 3. statuatur ergo in Numeris, & sint quæsiti trianguli latera 5 N. 4 N. 3 N. fient ergo 6 Q. — 5 N. æquales 4. vnde fit 1 N. $\frac{9}{1}$. Ad hypostases. Sunt quæsiti latera trianguli $\frac{45}{11}$. 4. $\frac{36}{11}$. Estque area $\frac{180}{121}$. vnde si auferas hypotenusam, remanet $\frac{4}{11}$ seu 4. vt postulabatur.

OBSERVATIO D. P. F.

ADdi potest ex nostra methodo sequens quæstio; Inuenire triangulum rectangulum vt summa hypotenusæ & alterius lateris circa rectum multata aream faciat datum numerum imo & sequens addi potest Bacheti commentarijs; Inuenire triangulum vt hypotenusa detracta aream faciat datum numerum.

QVÆSTIO XII.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ἡ ὑποτείνουσα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ ὁ ἐν τῇ μείζονι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ τετράγωνος. ἔτι δὲ ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ μετὰ ἐλάσσονος τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω τρίγωνος ὑπὸ ἀριθμῶν δύο, καὶ ὑποκείσθω ἡ μείζων τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γνωμένη ἐκ τοῦ δὶς ὑπ' αὐτῶν. δεῖ δὴ εὑρεῖν δύο ες^ους ὅπως ὁ δὶς ὑπ' αὐτῶν ᾖ τετράγωνος. καὶ ἡ ὑποτείνουσα ᾖ ὑπερέχει τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν τῆς ὑποτεινούσης τῶν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνον, ποιῇ τετράγωνον. τούτου δὴ ἐν παντὶ δυσὶν ἀριθμοῖς, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος ᾖ διπλασίων. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ὑπὸ ς^ου ᾱ. καὶ ες β̄ καὶ λύται δύο τῷ ὑποταγμένῳ, λοιπὸν ζητοῦμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου μετὰ τὴν ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ δ^ις δ^ι ς̄. δ^ις ῑ. ἐπὶ πάντα τοῦτο δύναμιν, γίνεται δ^ις ς̄. μ^ι γ̄. ἴσαι τετραγώνῳ. ζητήσομεν ἄρα ἀριθμόν τινα, ὅπως οἱ ἐξ ἀπ' αὐτοῦ τετραγωνοι μετὰ μ^ι γ̄. ποιῶσι τετράγωνον. ἔστι δὴ μονὰς ᾱ. καὶ ἄλλοι ἄπειροι ἀριθμοί. ὥστε τὸ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt & interuallum laterum circa rectum, & ipsum maius latus, sit quadratum. Et præterea area cum minore laterum circa rectum, faciat quadratum. Formetur triangulum à duobus numeris, & supponatur maius laterum circa rectum fieri ex duplo producti multiplicationis ipsorum. Oportet ergo inuenire duos numeros, vt duplum multiplicationis eorum sit quadratus, & excessus dupli multiplicationis eorum super interuallum quadratorum ab ipsis ortorum, faciat quadratum. Hoc autem accidit duobus quibusuis numeris, quando maior minoris est duplus. Formetur ergo triangulum abs 1 N. & 2 N. & satisfit duabus propositi partibus. Superest vt videamus an area trianguli cum minore laterum circa rectum faciat quadratum fit autem 6 QQ. + 3 Q. & omnia per 1 Q. diuidantur. Fiunt 6 Q. + 3. æqualia

quadrato. Quæremus igitur aliquem numerum, cuius ſex quadrati adſumpto ternario faciant quadratum. Hujuſmodi autem eſt 1. & alij infiniti numeri. Ergo quæſitum triangulum rectangulum formabitur ab 1. & 2.

ζητούμεν ὀρθογώνιον ἴσαι περιλαμβάνειν ὑπὸ μ̄ᵒ ᾱ. καὶ μ̄ᵒ β̄.

Lemma.

Duobus datis numeris, quorum ſumma ſit quadratus. Inuenientur infiniti quadrati, quorum quilibet ductus in vnum datorum & adſumens alterum, faciet quadratum. Sint duo dati numeri 3. & 6. & oporteat inuenire quadratum, qui ductus in 3. & adſumens 6. faciat quadratum. Eſto quæſitus quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. & fiunt 3 Q. + 6 N. + 9. æqualia quadrato, & ſolui poteſt infinitis modis, quia vnitates ſunt quadratæ. Eſto igitur latus quadrati 3 − 3 N. & fit 1 N. 4. erit igitur quadrati latus 5. & alij infiniti inuenientur.

Λῆμμα.

Δύο δοθέντων ἀριθμῶν ὧν τὸ συνθεμα ποιῇ τετράγωνον. διρίσκονται ἄπειροι τετράγωνοι, ὧν ἕκαστος πολλαπλασιασθεὶς ὑπὸ ἑνὸς τῶν δοθέντων, καὶ προσλαβὼν τὸν ἕτερον ποιεῖ τετράγωνον. ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ δύο ὁ τε γ̄. καὶ ὁ ϛ̄. καὶ δεῖν ἔστω προστυρεῖν τετράγωνον. ὃς πολλαπλασιασθεὶς ὑπὸ τὸν γ̄. καὶ προσλαβὼν τὸν ϛ̄. ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος. δ̄ᵘ ᾱ. ις̄ β̄. μ̄ᵒ ᾱ. καὶ γίνονται δ̄ᵘ γ̄. ις̄ ϛ̄. μ̄ᵒ θ̄. ἴσαι τετραγώνῳ, ὃ δυνατὸν ὅτι ἀπειραχῶς διρεῖν διὰ τὸ τὰς μονάδας εἶναι τετραγωνικάς. ἔστω οὖν τοῦ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ᵒ γ̄. λείψει ις̄ γ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ μ̄ᵒ δ̄. ἴσαι ἄρα ἀπὸ τῶ τετραγώνου πλευρᾶ μ̄ᵒ δ̄. ὃ ἕτερον ἄπειροι διρίσκονται.

IN QVAESTIONEM XII.

SVPPONIT in primis Diophantus huiuſmodi Theorema.

Si fuerint duo numeri in proportione dupla, tam duplum producti eorum multiplicatione, quam exceſſus eiuſdem dupli producti ſuper interuallum quadratorum, quadratus eſt.

Quod ita demonſtratur. Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum G. dico tum duplum producti ex A in B. tum exceſſum eiuſdem dupli producti ſuper G. eſſe quadratum, etenim quia B eſt duplus ad A patet D eſſe quadruplum ipſius C. eo quod quadrati ſunt in duplicata ratione laterum. Sed productum ex A in ſuum duplum B æquatur duplo quadrati ipſius A. ac proinde duplum producti ex A in B. æquatur quadruplo quadrati ipſius A. hoc eſt quadruplo ipſius C. Igitur quadratus D. eſt duplum producti ex A in B. Quod erat primo probandum. Deinde patet ex hypotheſi exceſſum D ſuper G eſſe ipſum quadratum C. Quare ex omni parte conſtat propoſitum. Idcirco Diophantus fingit triangulum ab 1 N. & 2 N. vt duabus propoſiti partibus ſatisfiat; nam latera circa rectum ſunt 4 Q. & 3 Q. quorum maius eſt quadratus vt patet; exceſſus verò illius ſuper minus, eſt etiã quadratus puta 1 Q. Reſtat ergo vt area minore latere adſumpto faciat quadratum, facit autem 6 QQ. + 3. Q. æquale quadrato, & omnia per 1 Q. diuidendo, fit 6. Q. + 3. æquandus quadrato.

A 3. B 6.
C 9. D 36.
G 27.

Hic ſanè Diophantus non vſitata prius ratione, quadrato æquat numerum ex duabus ſpeciebus non proximis compoſitum, quales ſunt quadrati & vnitates, quamuis neutra ipſarum numero exprimatur quadrato. Vt autem hoc fieri poſſit, quærendus eſt quadratus quo per 6. multiplicato, & producto addendo 3. fiat quadratus. Quod quidem poſſibile eſt, quia 6. & 3. ſimul conficiunt quadratum, & res abſoluitur per aſſumptum lemma. Quia verò vnitas quadratus eſt, & non mutat numerum quem multiplicat, ſequitur ex eo quod 6. & 3. conficiunt quadratum 9. vnitatem ſumi poſſe loco quadrati quæſiti. Vnde fit etiam 1 N. 1. Quamobrem fingitur triangulum ab 1. & 2. & fiunt latera 5. 4. 3. quæ ſoluunt quæſtionem.

Porrò facilè eſt auxilio lemmatis aſſumpti alias reperire ſolutiones. Ponamus enim quadratum quæſitum 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 6. & producto addendo 3. fit vtique 6 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus cùm infinitis modis fingi poſſit, quia vnitatum numerus quadratus eſt, patet infinitas reperiri poſſe ſolutiones. Verbi gratia ponatur latus hoc 3 − 3 N. fiet 1 N. 10. Quamobrem quæſitus quadratus eſt 121. quo ducto in 6. fit 726. cui addendo 3. fit 729. quadratus

à latere 27. Quare si 6 Q. + 3. æquemus quadrato 729. fiet 1 N. 11. Ac proinde fingatur triangulum ab 11. & 22. eruntque latera 605. 484. 363. quæ soluunt quæstionem, nam maius laterum circa rectum puta 484. est quadratus à latere 22. & illius excessus super 363. est 121. quadratus à latere 11. Area verò addito minore latere facit 88209. quadratum à latere 297. Itaque notandus est modus iste, quo æquabimus quadrato quemlibet quadratorum & vnitatum numerum, quamuis neuter sit quadratus, dummodo vterque simul conficiat quadratum.

Et vt aliquid addamus Diophanto, aio æquationem quoque explicari posse quamuis quadratorum, & vnitatum numeri simul non conficiant quadratum, dum reperiatur quadratus aliquis qui ducto in numerum quadratorum, & producto addendo numerum vnitatum fiat quadratus, quod sanè perficiemus per huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum multiplicato, altero ad productum addito fiat quadratus, inuenientur alij quadrati idem præstantes.

Sint dati 5. & 16. Nam ducto quadrato 4. in 5. & producto addendo 16. fit quadratus 36. Quærendus ergo est alius quadratus quàm 4. qui hoc idem præstet. Esto latus illius 2 + 1 N. fiet quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 36 + 20 N. + 5 Q. æqualis quadrato. Hic autem infinitæ dari possunt solutiones, quia vnitatum numerus est quadratus. Fingatur verbi gratia latus huius quadrati 6 − 3 N. fiet 1 N. 14. eritque quæsiti quadrati latus 16. ipse quadratus 256. quo ducto in 5. & producto adiiciendo 16. fit 1296. quadratus à latere 36.

Immò quod de multiplicatione dictum est, intelligendum quoque de diuisione, & scias eadem arte solui huiusmodi lemma.

Datis duobus numeris, si altero per quadratum diuiso, & altero ad quotientem addito fiat quadratus, inuenientur alij infiniti quadrati idem præstantes.

Sint dati numeri 96. & 12. Nam diuiso 96. per quadratum 4. fit quotiens 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quærendus ergo alius quadratus quàm 4. qui præstet idem ponatur eius latus vt prius 2 + 1 N. erit quadratus 4 + 4 N. + 1 Q. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{96}{4+4N+1Q}$. & huic addendo 12. fit $\frac{144+48N+12Q}{4+4N+1Q}$. æqualis quadrato. Est autem denominator quadratus. Quare superest vt numerator 144. + 48 N. + 12 Q. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia 144 est quadratus, & fingetur latus illius 12 − 6 N. & fiet 1 N. 8. Quare latus quæsiti quadrati est 10. ipse quadratus 100. per quem diuidendo 96. fit quotiens $\frac{24}{25}$. cui addendo 12. fit $\frac{324}{25}$. quadratus à latere $\frac{18}{5}$. Quòd autem 144. necessariò sit quadratus, patet, ex eo quòd 144. fit addendo ad 96. productum ex 4 in 12. Quare cùm ex hypothesi 24. & 12. simul faciant quadratum 36. si vterque per aliquem quadratum multiplicetur, erit & summa productorum quadratus. Atqui ducto 4. in 24. fit 96. & ducto eodem 4. in 12. fit 48. Igitur summa ipsorum 96. & 48. puta 144. quadratus est, ille scilicet qui fit ducto 4. in 36.

Hoc autem lemmate mirificè juuatur operatio Diophanti, quæ aliter fortuita videatur. Nam si finxisset triangulum ab aliquibus alijs numeris in ratione dupla constitutis, puta à 2 N. & 4 N. fuissent latera 20 Q. 16 Q. 12 Q. vbi laterum quidem circa rectum interuallum, itemque maius ipsorum, quadratus est, sed area minore assumpto. Fit 96. QQ + 12 Q. & omnia diuidendo per 1 Q. fit 96 Q. + 12. æqualis quadrato. Atqui 96. & 12. simul non conficiunt quadratum. Quare per ea quæ tradit author, non constat quomodo 96 Q. + 12. possit æquari quadrato, & eius lemma hîc vsui esse non potest. Per nostrum autem lemma facilè res expedietur, nam si diuidas 96. per quadratum 4. fit 24. cui addendo 12. fit quadratus 36. Quare per allatum lemma inuenientur infiniti quadrati ab ipso 4. diuersi qui præstabunt idem, & infinitas exhibebunt solutiones. Nam inuento verbi gratia quadrato 100. per quem diuidendo 96. fit $\frac{24}{25}$. quo addito ad 12. fit quadratus $\frac{324}{25}$. æquabimus 96 Q. + 12. quadrato $\frac{324}{25}$. vnde fiet 1 N. $\frac{6}{10}$. Quare formabitur triangulum ab $\frac{4}{10}$. & $\frac{3}{10}$. & erunt latera circa rectum $\frac{7}{10}$. $\frac{24}{100}$. quorum maius, itemque interuallum ipsorum quadratus est. Area verò est $\frac{168}{1000}$. cui addendo minus latus $\frac{4}{10}$. fit quadratus $\frac{576}{625}$. à latere $\frac{24}{25}$.

Tota tamen hæc operatio, adhuc labare videtur, nisi probetur aream trianguli sic diuidi posse per aliquem quadratum, vt quotienti addendo, minus laterum circa rectum, fiat quadratus. Quamobrem ne hîc scrupulus hæreat, sic pronuncio.

Si à datis duobus numeris in proportione dupla formetur triangulum rectangulum, eius area per quadratum minoris datorum diuisa, fit quotiens, quo addito minori laterum circa rectum, conflatur quadratus noncuplus ad priorem quadratum.

A 2. B 4.
C 4. D 16.
E 96. F 12.
G 24.

Sint in ratione dupla A minor & B maior, quorum quadrati C D. quorum interuallum F. ergo cum vt probatum est in adnotatis ad initio D sit duplum producti ex A in B. sunt D F latera circa rectum trianguli. Quare ducto semisse ipsius D in F fiat area E. qua diuisa per C. sit quotiens G. dico summam duorum F G esse quadratum noncuplum ad ipsum C. Etenim quia vt probatum est ab initio D quadruplus est ad C. sequitur subtracto C ab ipso D. residuum F esse triplum ad C. Quare cùm semissis ipsius D ducitur in F. ducitur

F. ducitur duplum ipsius C in triplum eiusdem. Igitur E continet sexies quadratum ipsius C. itaque diuidendo E per C. quotiens G est sextuplus ad C. cui si addatur F. triplus ad eundem C. fiet vtique summa ipsorum F G noncupla ad C. ac proinde quadratus, cùm sit noncuplum quadrati C. Quod demonstrandum erat.

Superest vt moneam, verba illa postrema quæ virgulis inclusimus, γίνεται δὴ δ^ο δ^ο &c. à nobis suffecta esse in locum istorum quæ in codice manu exarato corruptissima leguntur. γίνεται δὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆ δ̄. ς̄. τῆς ὑπὸ τῆ ς^ο δ^ο δ^ο. ὅ ἐν τῇ τὸν τ̄ ἐπὶ τελείαν τὸν ὑπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνον, καὶ πάντα ὡσαύτως τὸν ὑπὸ τῆ ἐλάσσονος τετράγωνον. A quibus tamen si quis commodum sensum elicere potuerit, per me licet, vt nostra deleat, & meliora reponat.

QVÆSTIO XIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adsumens alterutrum laterum circa rectum, faciat quadratum. Statuatur triangulum datum specie 5 N. 12 N. 13 N. & fit 30 Q. + 12 N. æquandus quadrato, esto quadrato 36 Q. & fit 1 N. 2. & cùm 1 N. sit 2. oportebit vt etiam 30 Q. + 5 N. sit quadratus. At non est. Itaque eo compellimur, vt inueniamus quadratum aliquem quo multato numero 30. & per residuum diuiso 12. & quotientis quadrato per 30. multiplicato, & adsumente quintuplum sui lateris fiat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. & si inde auferatur 30. & per residuũ diuidatur 12. fit 12. denominatione partis 1 Q. — 30. cuius quadratus est 144. denominatione partis 1 QQ. + 900 — 60 Q. Hoc tricies cum quintuplo sui lateris, facit 60 Q. + 2520. sub denominatione partis 1 Q Q. + 900 — 60 Q. æquale quadrato, & est pars quadratus. Oportet igitur & 60 Q. + 2520. quadratum esse, hoc est oportet quadratum aliquem ductum in 60. & adsumentem 2520. facere quadratum. Si ergo formantes rectangulum, curauissemus vt 60. adscito 2520. faceret quadratum, soluta esset quæstio. Fit autem 60. ex mutuo ductu laterum circa rectum. At 2520. est solidus contentus sub majore laterum circa rectum, & sub interuallo laterum circa rectum, & sub area. Eoque res rediit, vt inueniendum sit triangulum rectangulum, vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum, interuallo eorundem, & area contento, faciat quadratum. Et si constituamus maius laterum circa rectum, quadratum numerum, & omnia per ipsum diuida-

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐπὶ τῇ ἐμβαδῷ αὐτῆ περιεχόμενος τὸν ἐπὶ ἑκατέρᾳ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν πλευρᾶ τετράγωνον τετάχθω τὸ τρίγωνον διδόμενον τῷ εἴδει ις̄ ῑ ις̄ ιβ̄. ις̄ ιη̄. ἔστω δὲ λ̄. ις^ων ιβ̄. ἴσοι τετραγώνῳ, καὶ ἔστω δ^ο λς̄. καὶ γίνεται ὁ ς^ος β̄. καὶ τῆ ς^η ὅπως μ^ος β̄. λείπῃ καὶ δ^ο λ̄. ις^ων ō. ἑνὶ τετραγώνου. οὐκ ἔστι ἄρα. ἀπάγεται οὖν εἰς τὸ δύρειν τετράγωνόν τινα ὃς λείψας τὸν λ̄. ἀριθμὸν, ὡσαύτως τὸν λοιπὸν μερισθῆ ὁ ιβ̄. καὶ ὁ γνόμενος ἀριθμὸς ἐφ' ἑαυτὸν τετρακοντάκις καὶ πολλαπλασίονα τῆ δυριθμοῦ ἀριθμῆ ποιῇ τετράγωνον. ἔστω ὁ ζητούμενος τετράγωνος δ^ο ᾱ. καὶ ἐὰν λείψῃ τὸν λ̄. καὶ ὡσαύτως τὸν λοιπὸν μερισθῆ ὁ ιβ̄. γίνεται μ^ος ιβ̄. ἐν μορίῳ δυνάμεις ᾱ. λείψει μ^ος λ̄. ὁ τετράγωνος γίνεται ρμδ̄. ἐν μορίῳ δ^ο δ^ο ᾱ. μ^ος π̄. λείψει δυνάμεων ξ̄. ταῦτα τετρακοντάκις μῆ τῆ πολλαπλασίονος τῆς ἑαυτῆ πλευρᾶς γίνεται δ^ο ξ̄. μ^ος βφκ̄. ἐν μορίῳ δ^ο δ^ο ᾱ. μ^ος π̄. λείψει δ^ο ξ̄. ἴσον τετραγώνῳ. καὶ δεῖ τὸ μόριον τετράγωνος. καὶ διήσω ἄρα δυνάμεις ξ̄. μ^ος. βφκ̄. ἑνὶ τετράγωνον. τουτέστι δεῖ τετράγωνόν τινα ἑξακοντάκις γνόμενον, καὶ προσλαβόντα μ^ος βφκ̄. ποιεῖν τετράγωνον. ἐὰν οὖν πλάσαντες τὸ ὀρθογώνιον κατασκευάσωμεν τὸν ξ̄. μῆ τῆ βφκ̄. ποιεῖν τετράγωνον. λύσομεν τὸ ζητούμενον. γίνεται δὲ ὁ μὲν ξ̄. ἐκ τῆ ὑπὸ τῆν περὶ τὴν τῶν ὀρθῶν. ὁ δὲ βφκ̄. ἐκ τῆ περιεχομένου ἐκ τῆς μείζονος τῆν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆς ὑποβοχῆς τῆν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆ ἐμβαδῆ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ δύρειν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως, ὁ ὑπὸ τῆν περὶ τὴν ὀρθὴν αὐτὸ, προσλαβὼν τὸν περιεχόμενον ἔκτε τῆς μείζονος τῆν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τῆ ἐμβαδῆ αὐτὸ, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὴν μείζονα τῆν περὶ τὴν ὀρθὴν τετράγωνον ἀριθμὸν ἓ, καὶ ἅπαντα ὡσαύτως παρ' αὐτὴν, ζητήσωμεν τὸν ἐπὶ τῆ ἐλάσσονι τ̄ περὶ τὴν ὀρθὴν. μῆ τῆ

ὑπὸ τῆ ἐμβαδῆ ϗ τῆς ὑποχῆς τ περὶ τὴν ὀρθὴν, τετράγωνον. ✻ ἀπάγεται εἰς τὸ δύο ἀριθμοὺς δοθῆναι τετ ἐμβαδῆ, ϗ τῆς ἐλάσσονος τ περὶ τὴν ὀρθὴν, ✻ ἀνπὶς ζητεῖν τετράδωνόν τινα, ὃς πολλαπλασιαδεὶς δθὴ ἑνὰ τ δοθέντων, ϗ προσλαβὼν τ ἕτερον ποιῆ τετράγωνον. ταῦτα ϗ λήμματα προεδείχθη. ϗ ἔστι τὸ ὀρθογώνιον γ̄. δ̄. ε̄. τάττω αὐτὸν ἐν ςς̄ιν, ϗ γίνεται ζητεῖν δ̄ᵅ ς̄. ςς̄ιε δ̄. ἴσους τετραγώνῳ. ϗ δ̄ᵅ ς̄. ςς̄ι γ̄. ἴσους τετραγώνῳ, ϗ πάλιν ἀνὰ ἀπολύσιμον τ μείζονα ἰσότητα γίνεται ὁ ς̄ᵅ μ̄ δ̄. ἐν μορίῳ δ̄ᵅ ᾱ γ̄ μ̄ ε̄. ἡ ἄρα δύναμις γίνεται μ̄ ις̄. ἐν μορίῳ δ̄ᵅ δ̄ᵅ ᾱ μ̄ λς̄ λείψει δ̄ᵅ ιβ̄. ἴσαι ἄρα δυνάμεως ἑξαπλασίων μ̄ ςς̄ τελῶν. δ̄ᵅ ιβ̄. μ̄ κδ̄ι. ἐν μορίῳ δ̄ᵅ δ̄ᵅ ᾱ. μ̄ λς̄ γ̄ δ̄ᵅ ιβ̄. δυνάμεις ἄρα ιβ̄ μ̄ κδ̄. ὀφείλουσι ἴσαι εἶναι τετραγώνῳ. ϗ ἀπάγεται εἰς τὸ δύο τετράγωνον, ὃς πολλαπλασιαδεὶς ὁπὶ τὸν ἐλάσσονα τ δοθέντων, ϗ προσλαβὼν τὸν μείζονα ποιεῖ τετράγωνον. ἔστι δὴ ὁ κᾱ. ὥστε ἡ δύναμις γίνεται μ̄ κᾱ. ὁ ἄρα ς̄ ἴσαι μ̄ ᾱ. ζητοῦντες οὖν δ̄ᵅ ς̄ ςς̄ιε δ̄ι. ἰσοῦται τετραγώνῳ. πεπλάσθω ἴσον δ̄ᵅ κᾱ. ϗ γίνεται ὁ ἀριθμὸς δ̄ ιθ̄. ἴσαι ἄρα τὸ τρίγωνον ιβ̄ ιθ̄. ις̄ ιθ̄ ᾱ ιθ̄. καὶ μθ́ου.

mus, quæremus minus laterum circa rectum additum plano sub area & interuallo laterum circa rectum contento, esse quadratum. Oportet igitur datis duobus numeris, areæ scilicet, & minoris laterum circa rectum, ipsis adinuenire quadratum aliquem, qui ductus in vnum datorum, & adsumens alterum, faciat quadratum. Hæc autem lemmata suprà sunt demonstrata. Et est rectangulum 3. 4. 5. statuo id in numeris, fitque vt quæram 6 Q. + 4 N. æquales quadrato, & 6 Q. + 3 N. æquales quadrato. Et rursum si absoluamus maiorem æqualitatem, fit 1 N. 4. denominatione partis 1 Q. − 6. ergo quadratus erit 16. denominatione partis 1 Q Q. + 36 − 12 Q. Quamobrem sextuplum quadrati adscitis 3. N. erit 12 Q. + 24. denominatione partis 1 Q Q + 36 − 12 Q. Proinde 12. Q. + 24. æquari oportet quadrato. Et res eò rediit vt inueniatur quadratus, qui ductus in minorem datorum, & adsumens maiorem faciat quadratum. Est autem 25. Quare 1 Q. est 25. & 1 N. 5. Igitur quærentes æquare quadrato 6 Q. + 4 N. æquabimus quadrato 25 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{5}$. Est ergo triangulum $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{5}$. & constat.

OBSERVATIO D. P. F.

VNius tantùm speciei triangula Diophantus exhibet propositum adimplentia, Sed ex nostrâ methodo suppetunt infinita diuersa speciei triangula quæ ex Diophanteo per ordinem deriuantur.

Sit igitur inuentum triangulum 3. 4. 5. cuius hæc est proprietas vt qui fit mutuo ductu laterum circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem, & areâ contento faciat quadratum. Ab eo deducendum aliud eiusdem proprietatis, sit maius ex lateribus circa rectum trianguli quæsiti 4. minus vero 3 + 1 N. Rectangulum sub lateribus circa rectum adscito solido sub maiore laterum circa rectum interuallo eorundem & areâ contento, facit 36 − 12 N. − 8 Q. quæ ideo debent æquari quadrato. Cum autem latera 4 & 3 + 1 N. sint latera circa rectum trianguli rectanguli, debent etiam eorum quadrata iuncta æquari quadrato. Quadrata illa iuncta faciunt 25 + 6 N + 1 Q. quæ idcircò etiam æquanda quadrato. Et orietur duplicata æqualitas, nam 36 − 12. N − 8 Q. & etiam 25 + 6 N + 1 Q. debent æquari quadrato. Eius æquationis duplicatæ solutio est in promptu.

IN QVÆSTIONEM XIII.

MVLTA sunt hîc obseruatu dignissima. Sed cùm tres operationes instituat Diophantus, eas sigillatim percurrendo, omnia dilucidabimus.

In prima operatione sumit quemlibet triangulum datum specie, puta 5 N. 12 N. 13 N. fitque area 30 Q. cui addendo sigillatim latera circa rectum, fiunt 30 Q. + 12 N. & 30 Q. + 5 N. simul æquandi quadrato. Non est autem locus duplicatæ æqualitati, quoniam quadratorum numerus 30.

non est quadratus. Quamobrem alio, & sanè mirabili artificio vtitur Diophantus. Sumit enim alterum numerorum quadrato æquandorum, puta 30 Q. + 12 N. quem facit quadrato æqualem. Id autem facillimum est sumendo quemlibet quadratorum numerum quadratum, maiorem quàm 30. vt 36 Q. vnde fit 1 N. 2. & sanè per hunc Numeri valorem resoluendo 30 Q. + 12 N. fit quadratus. Sed vt valida sit æquatio, oportet vt per eundem valorem Numeri resoluendo quoque 30 Q. + 5 N. fiat quadratus. Quod non accidit, nam cùm 1 N. sit 2. quadratus est 4. atque adeo 30 Q. sunt 120. cui addendo 5 N. seu 10. fit 130. qui neutiquam quadratus est.

Necessitas ergo secundæ operationis hinc innotescit. Nam vt æquemus quadrato 30 Q. + 12 N. sumimus aliquem quadratum maiorem quàm 30. à quo auferendo 30. & per residuum diuidendo 12. fit valor Numeri. Quare vt alter numerus 30 Q. + 5 N. sit æqualis quadrato, oportet vt quotientis illius quadratus tricies sumptus, adscito quincuplo eiusdem quotientis, fiat quadratus. Ponit itaque quæsitum quadratum 1 Q. vnde auferendo 30. fit 1 Q. − 30. per quem diuidendo 12. fit quotiens $\frac{1}{12}$ Q. − 2½. huius quadratus est $\frac{1}{144}$ Q. − 5 Q. + 6¼. cuius trigecuplum est $\frac{30}{144}$ Q. − 150 Q. + 187½. cui addendo quincuplum ipsius lateris $\frac{5}{12}$ Q. − 12½. puta $\frac{5}{12}$ Q. − 12½. fit $\frac{30}{144}$ Q. − 149 $\frac{7}{12}$ Q. + 174 $\frac{3}{4}$. fit autem hæc additio reducendo $\frac{1}{144}$ Q. − 149 $\frac{7}{12}$ Q. + 174 $\frac{3}{4}$. ad denominationem alterius numeri cui additur, nempe ducendo 60. in 1 Q. − 30. vnde fit 60 Q. − 1800. quo addito ad 4320. fit numerator fractionis quæ est summa numerorum additorum, puta 60 Q. + 2520. manetque idem denominator, puta 1 Q Q − 60 Q. + 900. Igitur vt consequamur quod hac secunda operatione intenditur, oportet vt $\frac{1}{144}$ Q Q − 149 $\frac{7}{12}$ Q. + 174 $\frac{3}{4}$. æquetur quadrato, & quidem denominatorem satis constat esse quadratum, cùm factus sit a latere 1 Q. − 30. Numerator autem restat æquandus quadrato, quod quidem optimè fieret per lemmata ad præcedentem tradita, si summa ipsorum 60. & 2520. esset quadratus, vel si reperiretur quadratus per quem multiplicando vel diuidendo 60. & producto, quotientive addendo 2520. fieret quadratus. Quod cùm fieri non possit, apparet necessitas tertiæ operationis. Sed prius considerandum est vnde proueniant 60. & 2520. & quidem manifestum est 60. produci ex mutua multiplicatione laterum circa rectum, nempe ex 12. in 5. At 2520. ait Diophantus esse solidum sub maiore laterum circa rectum, sub ipsorum interuallo laterum, & sub area contentum, quod quidem ita se habere non statim apparet. Quare id demonstrandum est. Hoc autem nil aliud est, quàm huiusmodi Theorema.

Datis duobus numeris inæqualibus, & tertio quocunque, si tertius ducatur in quadratum maioris duorum datorum, fit numerus æqualis solido sub tribus datis contento, & solido sub maiore duorum datorum, interuallo eorundem, & tertio dato.

F 4320. E 144. D 7. C 30. A 12. B 5. G 1800. H 360. K 60. L 2520.

Sint dati numeri A maior & B minor, & tertius quicunque C. ipsorum autem A B. interuallum esto D. & ipsius A quadratus sit E. Quo ducto in C fiat F. Tum ducatur A in B & fiat K. quo ducto in C. fiat G. solidus sub tribus C A B. Ducto autem C in A fiat H. quo ducto in D. fiat L. solidus sub tribus C A D. dico F æqualem esse duobus solidis G L. Nam sumptis tribus numeris A bis, & C semel idem fiet numerus, quouis ordine ij inter se ducantur. At ex A in A fit E. quo ducto in C fit F. ergo idem F fiet ducendo A in C. & productum H in A. Quare ex H in A fit F. solidus item G. sub tribus C A B contentus, fiet ducendo C in A & productum H in B. Quare G fit ex H in B. At ex constructione ex eodem H in D fit solidus L. Cùm ergo B D. simul æquentur ipsi A. numeri G L. producti ex H in ipsos B D. æquabuntur producto ex H in ipsum A. At ex H in A producitur F. vt ostensum est. Igitur solidi G L simul æquantur ipsi F. quod erat demonstrandum. *3. 2. porism.* *1. secundi.*

Hinc porrò sequi quod ait Diophantus manifestum est, si operatio illius diligenter consideretur. & A B statuantur latera circa rectum trianguli, & C ponatur area. Itaque in tertia operatione quærendum est triangulum rectangulum, vt planus contentus sub lateribus circa rectum, adiecto solido sub maiore laterum, interuallo eorundem laterum, & area contento, sit quadratus. Sic autem ratiocinatur Diophantus. Si concipiamus tam planum, quàm solidum supradictum diuidi per maius latus, orietur inde minus latus, hinc verò planus sub area & interuallo laterum contentus. quare si maius latus ponatur quadratus, sufficiet vt summa minoris lateris, & plani sub interuallo & area contenti, sit quadratus, sic enim ex quadrato in quadratum, fiet quadratus. Igitur oportet constituere triangulum rectangulum, ita vt maius laterum circa rectum sit quadratus, & præterea planus sub interuallo laterum & area contentus, adscito minore latere faciat quadratum, vel certè (quod omisit Diophantus) idem planus per aliquem quadratum diuisus, det quotientem cui adiiciendo minus latus, fiat quadratus. Id autem præstabit, quoduis triangulum per præcedentem inuentum, nam & maius laterum, circa rectum erit quadratus, & ipsum interuallum laterum, quadratus erit; & area adscito minore latere faciet quadratum. Quare cùm planus sub area & interuallo laterum contentus, diuidetur per quadratum illum qui est interuallum laterum, quotiens fiet ipsa

area quæ adſciſcens minus latus faciet quadratum ex hypotheſi; ac proinde per lemma quod vltimum attulimus ad præcedentem, planus ſub area & interuallo laterum contentus, adiciſcens minus latus, infinitis modis æquari poterit quadrato.

Hæc ad integram quæſtionis huius intelligentiam dicta ſufficerent. Sed libet præterea in tyronum gratiam, tertiam Diophanti operationem, quam ille breuiter perſtrinxit, fuſius explicare. Sumo triangulum per præcedentem inuentum, & conſtituo illud in Numeris, puta 5 N. 4 N. 3 N. fitque area 6 Q. cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt 6 Q. + 4 N. & 6 Q + 3 N. æquandi quadrato. Quare per ea quæ diximus de neceſſitate ſecundæ operationis, oportet inuenire quadratum, à quo auferendo 6. & per reſiduum diuidendo 4. fiat quotiens, cuius quadratus ſexies ſumptus, & adſumens triplum ſui lateris faciat quadratum. Quadratus ille eſto 1 Q. hic dempto 6. & per reſiduum diuidendo 4. fit . cuius quadratus . cuius ſextuplum . cui addendo triplum lateris, puta . vel ſub eadem denominatione . fit vtique ſumma . quam æquare oportet quadrato, & cùm denominator ſit quadratus, ſupereſt vt æquemus quadrato numeratorem 12 Q. + 24. Quod facilè fit quia 12. & 24. ſimul efficiunt quadratum 36. & vtendum lemmate quod ad precedentem attulit Diophantus. Quia enim quadratus quæſitus debet eſſe maior quàm 6. (vt æquari poſſit 6. Q. + 4 N.) oportet quærere quadratum maiorem quàm 6. qui ductus in 12. & adſumens 24. faciat quadratum ſit eius latus 1 N. + 1. fiet quadratus ductus in 12. & adſumens 24. 12 Q. + 24 N. + 36. cuius cuius latus eſto 6 + 5 N. fit 1 N 4. Ergo latus quadrati eſt 5. ipſe quadratus 25. Quare 6 Q. + 4 N. æquantur 25 Q. & fit 1 N. . eſtque triangulum quæſitum . . . fitque area . cui addendo ſigillatim latera circa rectum, fiunt quadrati . & . à lateribus . & . Poſſunt autem infinitæ dari ſolutiones, vtendo eodem triangulo 3. 4. 5. Quia per lemma præcedentis loco 25. inueniri poſſunt alij infiniti quadrati, verbi gratia ſi numeri 12 Q. + 24 N. + 361. ponas latus 6 − 4 N. fiet 1 N. 18. eritque latus quadrati 19. ipſe quadratus 361. Quare 6 Q. + 4 N. æquabitur 361 Q. & fiet 1 N. . erunt igitur latera trianguli . . . Area . cui addendo latera circa rectum, fiunt quadrati . & . à lateribus . & .

Ceterum moneo, caſu accidere in hypotheſi Diophanti, vt planus ſub lateribus, puta 12. adſumens 24. ſolidum ſub maiore laterum, interuallo laterum & area contentum, faciat quadratum, quod accidit quia interuallum laterum 3. & 4. eſt vnitas; ſed ſi aliud ſumatur triangulum præcedenti ſatisfaciens, id non continget. Quare vt vniuerſalis reddatur operatio Diophanti, in alio triangulo libet rem experiri. Sumatur triangulum per præcedentem inuentum 363 N. 484 N. 605 N. fiet area adſumens ſigillatim latera circa rectum 87846 Q. 484 N. & 87846 Q. + 363 N. & vtrumque oportet æquare quadrato. Quare inueniendus eſt quadratus à quo detrahendo 87846. & per reſiduum diuidendo 484. fiat quotiens, cuius quadratum ducendo in 87846. & producto addendo quod fit ex eodem quotiente in 363. fiat quadratus. Et vt rem compendio abſoluam, eò redactus, eſto vt æquem quadrato 175692 Q. + 5144613144. & numerus quadratorum eſt planus ſub lateribus circa rectum 484. & 363. contentus. At numerus vnitatum eſt ſolidus ſub maiore latere 484. ſub interuallo laterum 121. & ſub area 87846. contentus. Porro vtriuſque numeri ſumma minimè quadratum facit. Sed quia quadrato per quadratum diuiſo fit quadratus, diuido vtrumque numerum per maius laterum circa rectum, puta per 484. qui quadratus eſt ex lege præcedentis, & fit 363 Q. + 10629366. æquandus quadrato. Vbi quoque quadratorum & vnitatum numeri ſimul additi non conficiunt quadratum. Sed quia quadratorum numerus 363. eſt minus laterum circa rectum, at vnitates 10629366. conficiunt planum ſub area 87846. & ſub interuallo laterum 121. (qui quadratus eſt ex lege præcedentis) & ſumma areæ & minoris lateris, conficit etiam quadratum, ex eiuſdem præcedentis lege. Patet cùm 363. & 87846. ſimul faciant quadratum, ſi quadratus 121. ducatur in vtrumque, & productorum ſummam fore quadratum, at ex 121. in 87846. fit 10629366. vt dictum eſt. Igitur ſi & 121. ducatur in 363. & producto adiiciatur 10629366. fit quadratus. Quare per lemma præcedentis à nobis ampliatum 363 Q. + 10629366. infinitis modis æquari poterit quadrato, ſic autem æquari debet quadrato, vt valor quadrati excedat 87846. quia quadratus ille æquari debet 87846 Q. + 484 N. Ponatur ergo quadrati latus 1 N. + 11. fiet ipſe 121 + 22 N. + 1 Q. Quo ducto in 363. & producto addendo 10629366. fit 10673289 + 7986 N. + 363. Q. æquandus quadrato, & facilè fit, quia vnitates ſunt quadratæ. Ponatur ergo latus illius 3267 + 19 N. fiet 1 N. 58080. cui addendo 11. fit latus quadrati 58099. ipſe quadratus 3374564281. Igitur 87846 Q. + 484 N. æquabimus 3374564281 Q. & fiet 1 N. . per quem reſoluendo latera trianguli quæ poſita erant 363 N. 484 N. 605 N. fiet quæſitum triangulum . . . eius area eſt . Quæ adſumens ſigillatim latera circa rectum, facit quadratos . & . quorum latera . &

Supereſt vt moneam loco verborum quæ primò aſteriſcis incluſimus, legi in codice manuſcripto; καὶ ἔστι ὁ ξ ἐπὶ τετραγώνου πρὸς δυνάμει ἑξακοσταπέντε μονάδας μιᾷ. καὶ ποιεῖ πεζάγωνον. ἐπὶ οὖν ἐλάσσω τοῦ ὀρθογωνίου κατασκευάσωμεν, &c. Secundo ver-

loco legebatur, ἀπάγεται εἰς τὸ β̄. ἀειθμὲς ὄντας τῆ ἰμβαδῷ, καὶ τῆς ὑπαρχῆς τὸν τ̄ αὐτῆς ζητεῖν, &c.

QVÆSTIO XIIII.

INVENIRE triángulum rectangulum, vt numerus areæ multatus alterutro laterum circa rectum, faciat quadratum. Rursum si constituamus id datum specie sicut in præcedente, eò res redit vt inueniendum sit triangulum rectangulum simile huic 3.4.5. Ponatur ergo in numeris, & fit 3 N. 4 N. 5 N. Et 6 Q. — 4 N. æquantur quadrato. Et si statuamus quadratum minorem quàm 6. fiet 1 N. 4 sub denominatione partis excessus quo 6. superat quadratum aliquem. Et si ponamus quadratum 1 Q. opus erit tali existente numero, æquare etiam quadrato 6 Q. — 3 N. & 1 Q. sexies sumptus est 96. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12. Q. lateris autem triplum est 12. sub denominatione partis 6. — 1 Q. hoc est 72 — 12 Q. sub denominatione partis eiusdem, & si hoc auferamus à 96. sub denominatione eiusdem partis, relinquuntur 12 Q. + 24. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12 Q. & est pars quadratus. Proinde oportet æquare quadrato 12 Q. + 24. & est 1 N. 1. Pono igitur 6 Q. — 4 N. æquales 1 Q. & fit 1 N. $\frac{4}{5}$. Erunt igitur quæsiti rectanguli latera $\frac{12}{5}$. $\frac{16}{5}$. 4. & si nolis vti vnitate, statue quadrati latus 1 N. + 1. Itaque triplum quadrati adicito 6. fit 3 Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato. Hoc autem facile est, & inuenietur 1 N. non maior quàm $\frac{4}{5}$. At quadrati latus quod est 1 N. + 1. non erit maius quàm $\frac{9}{5}$. Et inde ortus quadratus sublatus de 6. faciet numerum rationalem.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἰμβαδῷ αὐτῆ λήψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῷ περὶ τὴν ὀρθὴν ποιῇ τετράγωνον. πάλιν ἐπὶ τάξεως αὐτὸ διδομένου τῷ εἴδει ὁμοίως περὶ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ δύνασθαι τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅμοιον τῷ γ̄. δ̄. ε̄. τετάχθω οὖν ἐν ἀειθμοῖς, καὶ γίνεται ἀειθμῷ γ̄. ἀειθμῷ δ̄. ἀειθμῷ ε̄. καὶ δ^{ο} ς̄. λείψει ις δ̄. ἴσοι τετραγώνῳ. καὶ ἐὰν τάξωμεν τὸν τετράγωνον, ἐλάττονα δυνάμεων ς̄. ἄρχεται ὁ ς^{ο} μ^{ι} δ̄. ἐν μερίῳ τῆς ὑπαρχῆς ἢ ὑπερέχει ὁ ς̄. τετραγώνου τινός. καὶ ἐὰν τάξωμεν τ̄ τετράγωνον δ^{ν} α̅ γίνῃ πλειόνου ὄντος τοῦ ς^{ι} δ^{ο} ς̄ τ̄ ις γ̄. ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. ἓ ἡ μὲν δύναμις ἐξάκις ὄζει μ^{ι} ις̄. ἐν μερίῳ δ^{ο} δ^{ο} α̅ μονάδος λς̄ λείψει δ^{ο} ιβ̄. τῆς δὲ πλευρᾶς τετπλασίων μ^{ι} ιβ̄. ἐν μερίῳ μ^{ι} ς̄. λείψει δ^{ο} α̅. τουτέστι μ^{ι} οβ̄. λείψει δ^{ο} ιβ̄ ἐν μερίῳ τῷ αὐτῷ καὶ ἐὰν ταῦτα αἰρεθῇ ἀπὸ μ^{ι} ις̄. ἐν μερίῳ τῷ αὐτῷ λοιπαὶ εἰσὶ δ^{ο} ιβ̄. μ^{ι} κδ̄. ἐν μερίῳ δ^{ο} δ^{ο} α̅. μ^{ι} λς̄. λείψει δ^{ο} ιβ̄. καὶ ὄζει τὸ μόνειν τετράγωνον. ὥστε καὶ δεῖ δ^{ο} ιβ̄. μ^{ι} κδ̄. ἰσῶται τετραγώνῳ καὶ ὄζειν ὁ ς^{ι} μ^{ι} α̅. τάσσω ὧν δ^{ο} ς̄. λείψει ις δ̄. ἴσοι δ^{ο} α̅. καὶ γίνεται ὁ ς^{ι} μ^{ι} δ̄ ς^{ν}. ἴσονται οὖν τῷ ζητουμένου ὀρθογωνίου πλευραὶ ιβ̄ ς^{ν}. ις^{ν} δ̄. καὶ ἐὰν μὴ θέλῃς χρήσασθαι μονάδι. τάξον τὸν τῆ τετραγώνου πλευρὰν ς^{ι} α̅. μ^{ι} α̅. ὥστε ὁ τετράγωνος ἓξις, καὶ μονάδες ς̄. ποιοῦσι δ^{ο} γ̄. ς^{ιε} ς̄. μ^{ι} δ̄. καὶ ταῦτα ἴσα τετραγώνῳ ποιεῖν ῥᾴδιόν ὄζει, ἓ διορισθήσῃ ὁ ς^{ι} ἡ μείζων ιγ δ^{ο}. ἧς τετραγώνου πλευρὰ, ἡ ὄζειν ς^{ι} α̅. μ^{ι} α̅ ἔσται ἡ μείζων κβ δ^{ο}. καὶ ὁ ἀπὸ τούτων τετράγωνος ἀρθεὶς ἀπὸ μ^{ι} ς̄. ποιεῖ ς^{ιι} ῥητόν.

IN QVAESTIONEM XIV.

EX adnotatis ad præcedentem, omnium quæ hîc aguntur rationem reddere facillimum est. Mirum fortasse alicui videre possit, cùm in hac quæstione vtendum sit subtractione loco additionis qua vtendum erat in præcedente, cur tamen ad extremum maneat idem numerus 12. Q. + 24. æquandus quadrato. Huius autem symptomatis causa est, contrarietas additionis & subtractionis vnà cum admixtione contrariorum signorum pluris & minoris. Nam in præcedente oportebat addere 12 Q. — 72. ad 96. in hac autem oportet de 96. subtrahere 72 — 12 Q. Quare euidens est, & summam illam, & hoc residuum, eundem efficere numerum, puta 12 Q. + 24. vnde satis apparet demonstrationes ad præcedentem allatas, & hîc locum habere.

Cæterùm cùm ad æquandum quadrato 12 Q. + 24. oporteat quærere quadratum qui ductus in 12. & adsumens 24. faciat quadratum, sumit Diophantus pro huiusmodi quadrato vnitatem, quod

fieri posse docuimus ad duodecimam, quia 12. & 24. simul conficiant quadratum, & quia talis quadratus sumendus est minor quàm 6. vt æquari possit 6 Q. – 4 N. sic posito quod 6 Q. – 4 N. æquentur 1 Q. fit 1 N. $\frac{2}{3}$. & sunt latera quæsiti trianguli $\frac{4}{3}$. $\frac{5}{3}$. 4. estque area $\frac{40}{9}$. vnde auferendo sigillatim latera circa rectum, supersunt quadrati $\frac{16}{9}$. & $\frac{25}{9}$.

Quod autem ad extremum, ait Diophantus, loco vnitatis, sumi posse alium quadratum, verum est implorando auxilium lemmatis ad duodecimam allati. Id tamen cautè agendum, quia quadratus ille debet esse minor quàm 6. Quare sic ratiocinatur Diophantus. Imprimis loco 12 Q. + 24. sumit 3 Q. + 6. cuius rei duplex assignari potest causa. Prima est quod ipsius 12 Q. + 24. sumit quadrantem 3 Q. + 6. suo more, vt rem in minimis conficiat, & euidens est si 3 Q. + 9. æquetur quadrato, fore vt & eius quadruplum 12 Q. + 24. sit quadratus. Secunda causa, quæ mihi magis arridet pendet ex dictis ad duodecimam. Quia enim 12. est planus sub lateribus trianguli per duodecimam inuenti, at 24. est solidus sub maiore laterum, sub interuallo eorundem, & sub area contentus, diuidendo vtrumque per maius laterum circa rectum, puta 4. (qui est quadratus ex lege duodecimæ) fiunt numeri 3. & 9. Quorum prior est minus laterum circa rectum, posterior est planus sub area & interuallo laterum, quare hoc diuiso per interuallum laterum (quod etiam æquatur quadrato ex lege duodecimæ) oritur ipsa area, quæ rursus per duodecimam adscito minore latere facit quadratum. Quamobrem ex vltimo lemmate quod ibidem attulimus, constat 3 Q. + 6. æquari posse infinitis modis quadrato. Ponatur eius latus 1 N. + 1. erit quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. quo ducto in 3. & producto addendo 6. fit 3. Q. + 6 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus fingetur 3 – certo Numerorum numero, sed quia quæsitus quadratus debet esse minor quàm 6. cum latus proximum ipsius 6. sit $\frac{5}{3}$. oportet latus quadrati quæsiti esse minus quàm $\frac{5}{3}$. Quare cùm ponatur hoc latus 1 N. + 1. si à $\frac{5}{3}$. auferas vnitatem, remanet $\frac{2}{3}$. quo patet minorem esse debere 1 N. Proinde cùm æquando quadrato 3 Q. + 6 N. + 9. debeat fieri valor Numeri, à quodam quadrato multato ternario, diuidente sextuplum sui lateris auctum senario, si ponatur huiusmodi quadratus 1 Q. fiet $\frac{6}{3}$ $\frac{\text{N.}}{\text{Q.}}$ $\frac{3}{3}$. minor quàm $\frac{2}{3}$. & tandem fit 54 N. + 54. minor quàm 13 Q. Qua æquatione, vt par est, per approximationem resoluta, fit 1 N. maior quàm 5 $\frac{1}{13}$. Quare numerus Numerorum in latere fictitio ponendus excedere debet 5 $\frac{1}{13}$. Ponatur verbi gratia latus illud 3. – 6 N. fiet 1 N. $\frac{11}{13}$. Quare latus quadrati quæsiti, quod positum erat 1 N. + 1. erit $\frac{24}{13}$. ipse quadratus $\frac{576}{169}$. Proinde 6. Q. – 4 N. statuemus æqualem $\frac{576}{169}$ Q. & fiet 1 N. $\frac{11}{13}$. Quamobrem erit quæsitum triangulum $\frac{35}{13}$. $\frac{132}{65}$. $\frac{157}{65}$. fit area $\frac{2310}{169}$. vnde auferendo sigillatim latera circa rectum, manent $\frac{1225}{4225}$. & $\frac{5184}{4225}$. quadrati à lateribus $\frac{35}{65}$. & $\frac{72}{65}$.

Quod si lubeat vti triangulo 363 N. 484 N. 605 N. fient æquales quadrato 87846 Q. – 484 N. & 87846 Q. – 363 N. & ductum Diophanti sequentes, tandem inueniemus 175692 Q. + 514461344. æqualem quadrato, & omnia diuidendo per 484. maius laterum circa rectum, quod est quadratum, fiet 363 Q. + 10629366. æqualis quadrato. Quod fieri potest infinitis modis, quia ducendo in 363. quadratum 121 (interuallum scilicet laterum circa rectum) & producto addendo 10629366. fit quadratus. Quia verò oportet quadratum quæsitum minorem esse quàm 87846. sumemus ipsum 121. vel inueniemus alium eodem quo suprà artificio. Quod si sumamus 121. fiet 87846 Q. – 484 N. æqualis 121 Q. vnde fit 1 N. $\frac{11}{13}$. Sunt ergo quæsiti trianguli latera $\frac{1573}{715}$. $\frac{1716}{715}$. $\frac{2431}{715}$. estque area $\frac{1348830}{511225}$. à qua detrahendo sigillatim latera circa rectum, manent quadrati $\frac{1225}{511225}$. & $\frac{1296576}{511225}$. quorum latera $\frac{35}{715}$. & $\frac{1116}{715}$.

OBSERVATIO D. P. F.

EX nostrâ Methodo soluetur sequens quæstio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt alterutrum laterum circa rectum multatum aream faciat quadratum.

QVÆSTIO XV.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἰσάκις αὐτῷ λείψας τὸν ἐν ἑκατέρᾳ τῆς περιεχούσης, καὶ μιᾶς τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. ἔστω τὸ τρίγωνον διηρημένον τοῦ ἐλάσσονος ἀριθμοῦ γ. ἀριθμοῦ δὲ ς ι. καὶ πάλιν γίνεται ζητεῖν δ° ς ⌈ ις ι. ἵνα τετράγωνόν ᾖ. καὶ δ° ς λείψει ις γ. ἵνα τετράγωνόν ᾖ. καὶ ἐὰν ποιήσω δ° ς ⌈ ις γ ἵνα τετράγωνόν ᾖ. γίνεται ὁ ς° μ° γ. ὁ ἐν μορίῳ μ° ς ⌈ δ° α. καὶ

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusa quàm altero laterum circa rectum detracto, faciat quadratum. Esto triangulum datum specie 3 N. 4 N. 5 N. & rursus oportet quærere 6 Q. – 5 N. æqualia quadrato, & 6 Q. – 3 N. æqualia quadrato. Et si fecero 6 Q. – 3 N. æqualia quadrato, fit 1 N. 3. sub denominatione partis 6 – 1 Q. & tali

inuento numero, 6 Q. fiunt 54. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12 Q. & oportet à 54. sub denominatione partis 1 QQ. + 36 — 12 Q. auferre 90 — 15 Q. sub denominatione eiusdem partis, & reliqua æqualia facere quadrato. Et pars quidem quadratus est. Ergo etiam 15 Q. — 36. æquanda sunt quadrato. Atque hæc quidem impossibilis est æquatio, quia 15. in duos non diuiditur quadratos. Non autem omnino impossibile est quod initiò erat propositum. Oportet ergo determinare de triangulo. Facti sunt enim 15 Q. ex quodam quadrato minore quàm areæ numerus, ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum. At quæ desunt vnitates 36. fiunt ex solido contento sub area, & vno laterum circa rectum, & interuallo quo hypotenusa superat idem latus. Eò itaque res deducta est, vt prius oporteat inueniri triangulum rectangulum, & quadratum numerum minorem area, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, detracto solido contento sub area, prædicto latere, & interuallo quo hypotenusa superat idem latus, faciat quadratum. * Factum esse ex duplo producti eorum, & omnia diuidamus per productum ex hypotenusa in prædictum latus, quæremus rursus alium quendam quadratum, quo ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum in primum latus interualli quadratum. * Et si statuamus eos à quibus triangulum effingetur, planos similes, dissoluemus quæstionem. Formetur triangulum abs 4. & 1. At quadratus, vt minor sit numero areæ, esto 36. & formans triangulum statuo illud in numeris 8 N. 15 N. 17 N. & fit numerus areæ detracto vno laterum circa rectum 60 Q. — 8 N. Hæc æquantur 36 Q. & fit 1 N. ½. Ad positiones. Erit triangulum ⅜. ⅞. ½. & manet.

πιόντα δίρειθέντος αἱ δυνάμεις ἐξ γίνηται μ̄ νδ̄ ἐν μερίῳ δ̄ δ̄ α̅ μ̄ λς̄ γ δ̄ ιβ̄, ϗ δεῖ ὑπὸ μ̄ νδ̄. ἐν μερίῳ δ̄ δ̄ α̅. μ̄ λϛ̄ γ δ̄ ιβ̄ ἀφῃρῆν μ̄ ϛ̄ γ δ̄ ιβ̄ ἐν μερίῳ τῷ αὐτῷ, ϗ τὰ λοιπὰ ποιεῖν ἴσα τετραγώνῳ. ϗ ἔστι τὸ μέσον τριγώνου. ὥστε ϗ δ̄ ιβ̄ λείψει μ̄ λς̄. ἴσοι τετραγώνῳ. ϗ αὐτὴ μὲν ἡ ἰσότης ἀδύνατός ἐστι διὰ τὸ τὸ ιε̄ μὴ διαιρεῖσθαι εἰς δύο τετραγώνους. οὐ πάντος δὲ τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἀδύνατόν ἐστι. δεῖ οὖν διορίζεσθαι πάλιν τὸ ζητούμενον. γεγόνασι γὰρ αἱ μὲν δυνάμεις ιε̄. ἕκαστος τετραγώνου ἐλάσσονος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, πολλαπλασιασθέντος ἑνὸς τοῦ ὑπὸ ὑποτεινούσης, ϗ μιᾶς τοῦ πλευροῦ τοῦ ὀρθίου. αἱ δὲ ἐν λείψει μ̄ λς̄. ἐν τῷ στερεῷ τῷ περιεχομένῳ ἔχοντι τὴν ἐμβαδὸν, ϗ μιᾶς τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθίου, ϗ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τὴν ἐκπεμπομένην τῆς ὀρθῆς. ϗ ἁπτέται εἰς τὸ πρότερον δίρειν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἐλάσσονα ὄντα τῆς ἐμβαδοῦ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἑνὶ τοῦ ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθίου λείψει τὸ στερεὸν τὸ περιεχόμενον, ἔχοντι τὴν ἐμβαδὸν, ϗ τῆς ἐκπεμπομένης τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθίου, καὶ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ἐκπεμπομένου τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθίου, πάλιν τετράγωνον. ϗ γενήσεται ἐκ τῶν δὶς ὑπ' αὐτῶν, ϗ πάντα διὰ πάντων μερίσω διὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης ϗ τῆς προεκπεμπομένης μιᾶς τῆς τοῦ ζητουμένου πάλιν ἄλλον τινὰ τετράγωνον πολλοῦ δεῖ τοῦ ὑπὸ ὑποτεινούσης, ϗ μιᾶς τῆς τοῦ ἐμβαδοῦ, δεῖ ἢ πρώτου τοῦ ὑπεροχῆς τετράγωνον. * ϗ ἐὰν τάξωμεν τοὺς πλάσαντας τὸ ὀρθογώνιον ὁμοίους τῷ δοθέντι πλαλύσωμεν τὸ ζητούμενον. πεπλάσθω τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ̄. δ̄. ϗ μ̄ α̅. ὁ ἐστὶ τετραγώνου ἴσου, ἵνα ἐλάσσων ᾖ τοῦ ἐμβαδοῦ, μ̄ λς̄. ϗ πλάσας τὸ τρίγωνον, πλάσω αὐτὸ ἐν ςῑᾱ. ἔσαι ςῑ. ρ̄. ςῑ. ιε̄. ςῑ ιζ̄. ϗ γίνεται ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ λείψας ἕνα τῇ πλευρᾷ τοῦ ὀρθίου δ̄ ξ̄. λείψει ςῑ ρ̄. ταῦτα ἴσα δ̄ λς̄. ϗ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ α̅ ν̄. ὅθεν τὰς ὑποστάσεις. ἔστω ἄρα τὸ τρίγωνον ρ̄. ν̄. ιε̄ ν̄. ϗ λοιπόν.

IN QVAESTIONEM XV.

Hic quod attinet ad primam operationem, cùm ea similis sit omnino operationi duarum præcedentium, nihil est quod nos moretur. Quod autem ait Diophantus 36. esse solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & interuallo inter hoc & hypotenusam, idem est prorsus cum theoremate ad decimam tertiam demonstrato. Denique quod ait 15 Q. — 36. æquari non posse quadrato quia 15. non diuiditur in duos quadratos, pendet ab iis quæ mox ostensuri su-

mus. Necessitas autem secundæ operationis euidenter colligitur ex defectu prioris. Nam ad hoc vt 15 Q. − 36. possit æquari quadrato, oportet inuenire quadratum quo ducto in 15. & à producto auferendo 36. maneat quadratus. Et cùm quadratus inueniendus æquari debeat 6 Q. − 4 N. curandum est, vt sit minor numero areæ 6. Quia ergo 15. est planus sub hypotenusa & altero laterum, at 36. est solidus sub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenusam, euidens est quærendum esse triangulum, & quadratum minorem area trianguli, vt quadrato ducto in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, fiat numerus à quo detrahendo solidum sub area, prædicto latere, & interuallo inter idem latus & hypotenusam, relinquatur quadratus.

Equidem triangulum fingendum esse ait Diophantus à duobus numeris qui sint plani similes; sed qua ratione id colligat, & vnde sumendus sit quadratus, non constat ex corruptissimis illius verbis quæ idcirco asteriscis inclusimus more nostro. Quorum tamen defectum vt ego suppleam, pronuncio, quadratum illum, eum esse qui fit ex quadrato interualli dictorum planorum similium, in quadratum qui fit ex mutua eorundem multiplicatione. Quod vt demonstrem, & simul rei obscurissimæ lucem afferam, aliqua prius suppono.

Primùm suppono, in quolibet triangulo effecto per methodum à Diophanto traditam, quamque demonstrauimus propositione quinta lib. tertij porism. hypotenusam superare quadrato numero, latus illud quod fit bis ex mutua multiplicatione numerorum à quibus effectum est triangulum. Quod euidens est, quia hypotenusa est summa quadratorum, à qua si auferatur duplum multiplicationis laterum, supereſt quadratus interualli laterum per quartam secundi porismatum.

Secundo suppono, interuallum duorum quadratorum esse maius quadrato interualli laterum, quod ipsum iam demonstrauimus ad sextam secundi.

Tertiò suppono, in triangulo effecto à duobus planis similibus, si excessus hypotenusæ super latus illud quod æquatur interuallo laterum, ducatur in alterum latus, fieri quadratum. Sint enim plani similes A B. quorum quadrati C D. quorum summa E. interuallum F. tum ex A in B fiat H. cuius duplum G. ' eritque E F G. triangulum rectangulum. Sit ergo K excessus E super F. & ducto K in G. fiat L. dico L esse quadratum. Quia enim A B sunt plani similes, ' erit H quadratus. Et quia E est summa duorum C D. At F. est eorundem interuallum, detracto F ex E. ' reliquus K erit duplus ipsius D. Cùm ergo G. K. sint dupli quadratorum H D. sequitur G ad K habere rationem quadrati ad quadratum, ' ac proinde G K sunt plani similes, ' & productus ex eorum mutuo ductu, puta L. quadratus est. Quod demonstrandum erat.

H 16.
A 8. B 2.
C 64. D 4.
E 68. F 60. G 32.
K 8. L 256.

Y. 3. porism.
1. noni.
23. 1. porism.
26. octaui.
3. noni.

His positis, totum quod supponitur à Diophanto, sic demonstrabitur. Sint plani similes A B à quibus fingatur triangulum C D E. ita vt E sit duplum quadrati K. qui fit ex A in B. At D sit interuallum quadratorum ab ipsis A B. Ductoque K in D. fiat area M. Rursus interuallum ipsorum C E. sit G. quadratus per primum suppositum. quo ducto in quadratum K fiat quadratus H. Item ducto C in E fiat L. quo ducto in H fiat P. & rursus ducto E in M. fiat R. quo ducto in G. fiat Q. Dico si Q. solidus sub area M. altero laterum circa rectum E, & sub G interuallo inter idem latus & hypotenusam, auferatur ab ipso P. qui fit ex quadrato H in L planum sub hypotenusa C & prædicto latere E contentum, residuum esse quadratum, & ipsum quadratum H esse minorem area M. ac denique ipsum L componi ex duobus quadratis. Primùm sic ostendo. Ex E in D producatur N. & ex interuallo ipsorum C D in E. fiat F quadratus per tertium suppositum. Tum consideratis tribus numeris D E K. Quia ex D in K fit M. quo ducto in E fit R. ' fiet idem R. si E ducatur in D. & productus N in K. Igitur R fit ex N in K. Rursus eadem de causa consideratis tribus G K N. Quia ex K in N. fit R vt ostensum est, & ex R in G fit solidus Q. idem Q. fiet ducto K in G. & producto H in N. Igitur Q. producitur ex H in N. At per constructionem ex eodem H in L. fit P. Ergo P. superat Q. numero qui fit ex H in interuallum ipsorum L N. Atqui cùm ex eodem E in ipsos C D. fiant L N. patet etiam L superare N. numero qui fit ex E. in interuallum ipsorum C D. hoc est quadrato F. Igitur P. superat Q. producto ex H in F. sed hic productus est quadratus, cùm vterque H F quadratus sit. Ergo P. superat Q. quadrato numero; quod erat intentum. Deinde quadratum H minorem esse area M. probatur. Etenim cùm ex eodem K in ipsos G D. producantur H M, & D sit maior quàm G per secundum suppositum, constat & ipsum M maiorem esse quàm H. Quod erat propositum.

A 4. B 1.
F 16.
C 17. D 15. E 8.
G 9. H 36. K 4.
L 136. M 60. N 120.
P 4896. Q 4320. R 480.

3. 1. porism.

Denique L componi ex duobus quadratis constat ex septima tertij porismatum, quia scilicet producitur ex C in E quorum vterque componitur ex duobus quadratis, puta C ex quadratis ipsorum A B. At E ex duplo quadrati K. vnde etiam per Scholium propositionis citatæ apparet ipsum L componi tantum semel ex duobus quadratis, quia B non componitur ex quadratis inæqualibus. Sunt autem quadrati ex quibus L componitur, ipse H qui fit ex K in G. & quadratus qui fit ex eodem K in quadratum summæ amborum A B.

Ex

Ex his sanè quæ cum incredibili labore commenti sumus, causa omnium quæ peragit Diophantus fit manifesta. Reliqua operatio nil habet difficultatis, cum sit penitus similis operationi duarum præcedentium. Eam tamen in studiosorum gratiam non pigebit adnicere. Formatur triangulum à 4. & 1. & constituitur specie, puta 17 N. 15 N. 8 N. fit area multata tum hypotenusa, tum latere tertio 60 Q. − 17 N. & 60 Q. − 8 N. Quare vtrumque æquare oportet quadrato, quod si 60 Q. − 8 N. æquemus quadrato, quærendus erit quadratus quem auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fiat quotiens cuius quadratum ducendo in 60. & à producto auferendo quod fit ex 17. in supradictum quotientem, remaneat quadratus. Esto quæsitus quadratus 1 Q. hunc auferendo à 60. & per residuum diuidendo 8. fit quotiens $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. cuius quadratus $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. quo ducto in 60. fit $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. vnde si auferas productum ex 17. in $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. puta $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. seu sub eadem denominatione $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. remanet $\frac{\ldots}{\ldots}$ Q. æquandus quadrato. Quare cum denominator sit quadratus, superest vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato, quod facilè fit, quia ex supra demonstratis quadrato 36. ducto in 136. & à producto auferendo 4320. remanet quadratus. Est ergo 1 Q. 36. Quamobrem 60 Q. − 8 N. æqualis erit 36 Q. & fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. erunt igitur trianguli latera $\frac{1}{2}$. $\frac{15}{2}$. $\frac{17}{2}$. fit area $\frac{30}{4}$. vnde auferendo tum $\frac{1}{2}$. tum $\frac{15}{2}$. remanent quadrati $\frac{15}{4}$. seu 4. & $\frac{1}{4}$. seu 1.

Cæterùm quæstio infinitas recipit solutiones, tum quia loco ipsorum 4. & 1. sumi possunt quilibet alij plani similes à quibus effingatur triangulum. Tum quia sumptis iisdem 4 & 1. inueniri possunt infiniti quadrati loco ipsius 36. vel minores ipso 36. vel etiam maiores, qui tamen non excedant aream 60. quibus ductis in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus, vt docebimus ad sequentem.

QVÆSTIO XVI.

DATIS duobus numeris, si aliquo quadrato in vnum eorum ducto, & altero de producto subtracto, fiat quadratus; inuenietur & alius quadratus maior quadrato prius sumpto, qui hoc idem præstet. Dentur duo numeri 3. & 11. & quadrato aliquo, puta à latere 5. ducto in 3. & à producto detracto 11. fiat quadratus à latere 8. Oporteat inuenire alium quadratum maiorem quàm 25. qui hoc ipsum præstet. Esto latus quadrati 1 N. + 5. fit quadratus 1 Q. + 10 N. + 25. Huius triplum dempto 11. fit 3 Q. + 30 N. + 64. æquale quadrato; fit eius latus 8 − 2 N. & fit 1 N. 62. Est ergo latus 67. quadratus 4489. qui præstat imperata.

Δτο ἀριθμοὺς δοθῆναι, ἐὰν πετ' ἀγωνός τις πολλαπλασιάσῃ δύο τινὰ αὐτὸν καὶ λείψας τ ἕτερον, ποιῇ τετράγωνον. διόρισις) καὶ ἕτερος τετράγωνος μείζων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τετραγώνου, ὃς τὸ αὐτὸ ποιῇ. δεδόσθωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅτε γ̄. καὶ ὁ ιᾱ. καὶ τετράγωνός τις ὁ ἀπὸ τοῦ ε̄. πολλαπλασιασθεὶς ὅτε τ γ̄. ἔλειψας τ ιᾱ. ποιείτω τετράγωνον, τὸν ὅτε ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ η̄. δεῖ δὴ ἡμᾶς ζητεῖν ἕτερον τετράγωνον μείζονα τοῦ κε̄. τὸ αὐτὸ ποιοῦντα. ἔστω ὁ τετραγώνου πλευρὰ ς̄ ᾱ μ̄ ῑ. ὁ τετράγωνος γίνεται δ̄ ᾱ ις̄ ῑ μ̄ κε̄. ταῦτα τρὶς γ μ̄ ιᾱ. γίνεται δ̄ γ ις̄ λ̄ μ̄ ξδ̄. ἵνα τετραγώνῳ ἀπὸ πλευρᾶς μ̄ η γ ις̄ β̄. καὶ γίνεται ὁ ς̄ μ̄ ξβ̄. ἔτι δεκὰ ἡ πλευρὰ μ̄ ξζ̄. ὁ τετράγωνος ͵δυπδ̄. καὶ ἐστὶ ποιεῖ τὸ ὑποκείμενον.

IN QVAESTIONEM XVI.

Hîc omnia sunt perspicua. Cæterùm quod vult Diophantus quadratum quæsitum maiorem esse quadrato exposito, id agit ob sequentem quæstionem, in qua tale quid postulatur, & ad quem hæc est veluti lemma. Sed hoc non est sic accipiendum, quasi verò simili fere operatione, non possimus etiam inuenire quadratum minorem. Sint enim iidem 3. & 11. dati numeri, & quadratus 25. ductus in 3. faciat 75. vnde auferendo 11. supersit quadratus 64. volo reperire alium quadratum minorem ipso 25. qui hoc idem præstet. Pono latus eius 5 − 1 N. erit quadratus 25 − 10 N. + 1 Q. quo ducto in 3. & ex producto auferendo 11. supersit 64 − 30 N. + 3 Q. æqualis quadrato. cuius latus ita fingendum est, vt fiat 1 N. minor quàm 5. fiet autem 1 N. ponendo latus fictitium 8 − tot Numeris, de quorum quadrato auferendo 3. per residuum diuidetur sedecuplum ipsorum Numerorum multatum numero 30. Quare si ponatur quæsitus Numerorum numerus 1 N. fiet $\frac{16\text{ N.} - 30}{3\text{ Q.} - 1}$. minor quàm 5. & tandem 16 N. minores quam 5 Q. + 15. quod per se manifestum est, quia quadratus semissis numeri numerorum puta 64. minor est quàm productus ex quadratis in vnitates, puta quàm 75. vnde patet nulla hic opus esse Numeri determinatione, sed poni potest latus fictitium 8 − quotlibet Numeris, quorum quadratus excedat 3. Ponatur 8 − 2 N. fiet 1 N. 2. Quarè latus quadrati quæsiti quod positum erat 5 − 1 N. erit 3. & satisfacit proposito. nam eius quadrato 9. ducto in 3. fit 27. vnde si auferatur 11. remanet quadratus 16.

Hac ratione, vt iam monui, applicabis hoc lemma præcedenti quæstioni. Nam primo expositis numeris 136. & 4320. quorum altero ducto in quadratum 36. altero de producto sublato, relinquitur quadratus 576. inuenies alium quadratum minorem quàm 36. qui præstet idem. Esto latus illius 6 − 1 N. huius quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fit 576 − 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Verùm latus quæsiti quadrati non solùm debet esse minus quàm 6. sed etiam quia quadratus talis esse debet vt eo ducto in 136. à producto possit auferri 4320. cùm diuiso 4320. per 136. fiat 31. $\frac{14}{17}$. cuius latus ferè est 5 $\frac{1}{2}$. oportet vtique latus quadrati non esse minus quàm 5 $\frac{1}{2}$. at illud positum est 6 − 1 N. quare cùm auferendo 5 $\frac{1}{2}$ à 6 − 1 N. supersit $\frac{1}{2}$ − 1 N. curandum est vtique vt 1 N. sit minor quàm $\frac{1}{2}$. Igitur numeri 576 − 1632 N. + 136 Q. latus ita fingendum est vt prodeat 1 N. minor quàm $\frac{1}{2}$. Quamobrem si modo sæpè alias à nobis vsitato, determinationem quæras numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus fingi debere 24 − tot numeris qui sint plus quàm 34. Ponatur ergo 24 − 62 N. fiet 1 N. $\frac{1}{1369}$. quo detracto à 6. manet latus quæsiti quadrati $\frac{8223}{1369}$. Ipse ergo quadratus est $\frac{67600729}{1874161}$. quo ducto in 136. fit $\frac{9193699144}{1874161}$. vnde si auferas 4320. vel sub eadem denominatione $\frac{8097179376}{1874161}$. manet quadratus $\frac{1096519768}{1874161}$. à latere $\frac{8223}{1369}$.

Deinde si velis adhuc quadratum maiorem quàm 36. sed minorem quàm 60. pone latus illius 6 + 1 N. quadratus ductus in 136. & multatus numero 4320. fiet 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Sed quia valor quadrati debet esse minus quàm 60. cùm latus proximum ipsius 60. sit 7 $\frac{11}{17}$. & ab hoc auferendo latus quadrati quæsiti quod positum est 6 + 1 N. supersit 1 $\frac{11}{17}$ − 1 N. patet 1 N. minorem esse debere quàm $\frac{28}{17}$. Quare si quæras determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies latus illud fingi debere 24 − tot Numeris qui excedant 49 $\frac{1}{2}$. Ponatur ergo 24 − 56 N. fiet 1 N. $\frac{1}{17}$. Quare latus quadrati quod positum est 6 + 1 N. erit $\frac{115}{17}$. ipse quadratus $\frac{13225}{289}$ qui vtique minor est quàm 60. eoque ducto in 139. & de producto auferendo 4320. remanet quadratus $\frac{1838775}{289}$. à latere $\frac{1445}{17}$.

QVÆSTIO XVII.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῷ περιεχόμενος τόπος ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τε ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τοῦ περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ τάξωμεν αὐτὸ διπλασίονα τοῦ εἴδει, πάλιν ἥξομεν ἡμῖν, διορίζεσθαι καὶ ζητεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα ὄντος τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, ὅπως ὁ τετράγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, λείψει τοῦ τριπλασίονος περιεχομένου ὑπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τὸ περιπλασίονος μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τὸ ὑπερέχῃ, ἢ ὑπερέχει ἡ ὑποτείνουσα τὸ περιπλασίονος μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ τετράγωνον. πεπλάσθω οὖν τὸ τρίγωνον ἀπὸ μ̄ δ̄. καὶ μ̄ α̃. ὁ δὲ τετράγωνος μ̄ λς̃. καὶ ἔτι μείζων τοῦ ἐμβαδοῦ. ἔχομεν δὲ δύο ἀριθμούς, τὸν μὲν ἕνα, τὸν ὑπὸ τὰ δ̄ τὰ ὑποτεινούσης, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, τουτέστι μ̄ ρλς̃. τὸν δὲ λοιπὸν, τὸ τριπλάσιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, καὶ τὸ ὑπερέχοντος τῆς τε ὑποτεινούσης καὶ τοῦ περιπλασίονος μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸ δ τκ̄. ἐπεὶ οὖν τετράγωνος τις ὁ ὢν μ̄ λς̃. πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ρλς̃. καὶ λείψας τὸ δ τκ̄. ποιεῖ τετράγωνον. ζητοῦμεν δὲ τετράγωνον μείζονα τῶν λς̃. ἐὰν οὖν τάξωμεν αὐτὸν δ̄ α̃ ις̄ μὲ λς̃ καὶ ἀπολυθησόμεθα τῇ προδιειλημμένῃ ἀποδείξει διορισμοὺς ἀπείρους ποιοῦντας

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ tam hypotenusæ quàm alterius laterum circa rectum numero adscito, faciat quadratum. Si statuamus illud datum specie, rursum coguntur determinare, & quærere triangulum rectangulum, & quadratum numerum maiorem areæ numero, vt quadratus ductus in productum ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, detracto solido contento sub area, & prædicto latere circa rectum, & interuallo hypotenusæ suprà prædictum latus, faciat quadratum. Formetur ergo triangulum à 4. & 1. & sit quadratus 36. Sed is non est maior areæ numero. Habemus igitur duos numeros, alterum quidem qui fit ex hypotenusa in vnum laterum circa rectum, nempe 136. alterum verò, solidum contentum sub area, vno laterum circa rectum, & excessu hypotenusæ suprà prædictum latus, nempe 4320. Quoniam igitur quadratus aliquis, puta 36. multiplicatus in 136. & detracto 4320. facit quadratum, quærimus autem quadratum maiorem esse quàm 36. si statuamus ipsum 1 Q. + 12 N. + 36. & superiorem sequamur demonstrationem, inueniemus infinitos quadratos quæstionem soluentes. Quorum vnus erit

676. Statuamus ergo triangulum rectangulum 8 N. 15 N. 17 N. & fiunt 60 Q. + 8 N. æquales 676 Q. & fit 1 N. $\frac{1}{7}$. Ad positiones.

τὸ προβλημα, ὧν εἷς ἔσται ὁ ὢν μ̄ χοϛ̄. τάξουσιν τὸ ὀρθογώνιον ϛ̄ η̄ - ϛ̄ ιε̄. ις̄ ιζ̄. καὶ γίνονται δ̄ ξ̄ μ̄ η̄. ἴσοι δ̄ χοϛ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ α̅ ι̅ϛ̅. ὅθεν πάλιν ὑποτείνουσα.

OBSERVATIO D. P. F.

Tentetur beneficio nostræ methodi sequens quæstio alioquin difficillima. Inuenire triangulum rectangulum vt tam hypotenusa quam vnum ex lateribus detractâ aream faciant quadratum.

IN QVAESTIONEM XVII.

EX adnotatis ad duas præcedentes, omnium quæ hic aguntur causa fit manifesta. Quare sufficiet integram subiicere operationem. Ponatur triangulum datum specie 8 N. 15 N. 17 N. fiet area 60. Q. cui adiiciendo tum hypotenusam 17 N. tum latus 8 N. fiunt 60 Q. + 17 N & 60 Q + 8 N. æquandi quadrato. Quod si instituamus æquationem respectu 60. Q. + 8 N. vt etiam valor Numeri alteri numero ritè applicari possit, opportebit inuenire quadratum à quo auferendo 60. & per residuum diuidendo 8. fiat quotiens, cuius quadratus sexagesies sumptus, adscito latere suo decies & septies, faciat quadratum. Esto quadratus quæsitus 1 Q. detracto 60. fit 1 Q. − 60. per quem dividendo 8. fit $\frac{1}{8}$ Q. − $\frac{60}{8}$. cuius quadratus $\frac{1}{64}$ Q Q + $\frac{3600}{64}$ − $\frac{120}{8}$ Q. qui si ducatur in 60 fit $\frac{60}{64}$ Q Q + $\frac{216000}{64}$ − $\frac{7200}{8}$ Q. cui si addatur decies & septies $\frac{1}{8}$ Q − $\frac{60}{8}$. hoc est sub eadem denominatione $\frac{8}{64}$ Q Q − $\frac{480}{64}$ Q + $\frac{216000}{64}$ − $\frac{57600}{64}$ Q. fiet vtique $\frac{68}{64}$ Q Q − $\frac{536}{64}$ Q + $\frac{216000}{64}$ æquandus quadrato. Quare cùm denominator sit quadratus, restat, vt numerator 136 Q. − 4320. æquetur quadrato. Quod facilè fit cùm ex demonstratis ad decimam quintam quadrato 36. ducto in 136. & de producto auferendo 4320. supersit quadratus. Verùm quadratus 36. hic vsui esse non potest, quia non est maior quàm 60. quod necesse est, cùm quæramus quadratum æquandum cum 60 Q + 8 N. Igitur implorandum est auxilium præcedentis lemmatis, & inueniendus quadratus maior quàm 36. immò quàm 60. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. relinquatur quadratus. Ponatur latus quæsiti quadrati 6 + 1 N. fiet quadratus 36 + 12 N. + 1 Q. quo ducto in 136. & de producto auferendo 4320. fit 576 + 1632 N. + 136 Q. æquandus quadrato. Quia autem quadratus quæsitus debet esse maior quàm 60. sumpto quadrato proximè maiore quàm 60. puta 64. cuius latus 8. à quo auferendo 6. remanet 2. patet ita fingendum latus quadrati; vt 1 N. non sit minor quàm 2. Quare si quæras Numeri determinationem inuenies latus fictitium poni debere 24 + tot numeris, qui non excedant 21. ita tamen vt eorum quadratus excedat 136. quales sunt omnes numeri à 12. vsque ad 21. inclusiuè. Ponatur ergo 24 + 16 N. fiet 1 N. 20. Quare latus quadrati est 26. Ipse quadratus 676. æquemus ergo 676 Q. cum 60 Q. + 8 N. fiet 1 N. $\frac{1}{7}$. & latera quæsiti trianguli erunt $\frac{1}{7}$. $\frac{15}{7}$. $\frac{17}{7}$. Area fit $\frac{60}{49}$. cui si adiiciatur tum hypotenusa, tum primum latus, fiunt quadrati $\frac{1156}{49}$. & $\frac{196}{49}$. quorum latera $\frac{17}{7}$. & $\frac{14}{7}$.

QVAESTIO XVIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt acutis eius angulis bifariam sciſſis. numerus angulum secantis sit rationalis, Ponatur secans angulum bifariam 5 N. vnum verò segmentum basis 3 N. ergo cathetus erit 4 N. Statuatur itaque ab initio basis vnitatum quotcunque quæ trientem habeant. Ac sit 3. erit igitur reliquum basis segmentum 3 − 3 N. sed quoniam angulus bifariam sectus est, & cathetus ad abscissam partem est sesquitertia, erit & hypotenusa ad reliquum basis segmentum, sesquitertia. At positum est reliquum basis segmentum 3 −

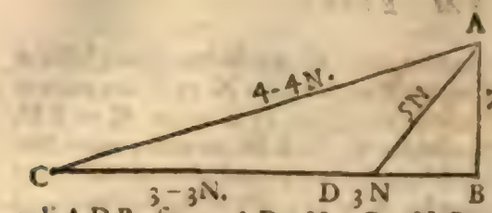
ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ πρὸς ὀξείαν αὐτοῦ γωνίαν τεμνόμενος δίχως. ὁ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν ἀριθμὸς ᾖ ῥητός. ὑπάρχω ἢ μὲν τέμνουσα γωνίαν δίχως ϛ̄ η̄. ἡ δὲ μία τοῦ βάσεως ἀριθμῶν γ̄. ἡ ἄρα κάθετος ἔσται ϛ̄ δ̄. ὑπάρχω δὴ καὶ ἡ ἐξ ἀρχῆς βάσις μετάδοσιν ὅσων δήποτε ἐχουσῶν τρίτον. ἔστω δὴ μ̄ γ̄. ἔσται δὴ τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μ̄ γ̄ λείψει ϛ̄ γ̄. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ γωνία δίχως ἐτμήθη, καὶ ἔστιν ἡ κάθετος ἀποτομῆς ὀθνείας τρίτος, ὧν ἡ ὑποτείνουσα τῷ λοιπῷ τῆς βάσεώς ἐστιν ὀθνείας. καὶ τέτακται τὸ λοιπὸν τμῆμα τῆς βάσεως μ̄ γ̄ ϛ̄ ϛ̄. ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται μ̄ δ̄. λείψει ϛ̄ δ̄. λοιπὸν ἔσται

τὸν ἀπὸ ταύτης τετράγωνον. τουτέστι δ̄ κ̄ μ̄ κ̄ ϛ̄ ις̄ λβ̄. ἰσωθήσεται τοῖς ἀπὸ τ̄ θεσ̄ τῶν ὀρθῶν τετραγώνοις. τουτέστι δ̄ κ̄ μ̄ θ̄. κ̄ῆ ῑ̄ σται ὁ ϛ̄ μ̄ ζ̄ λ̄ς̄. τὰ λοιπὰ δῆλα. καὶ ἐστὶν πάντα λβ̄. ποιήσω, ἵνα ἄρτια ᾖ ὑφ' κβ̄ πους μ̄ χπ̄. ᾖ δὲ βάσις μ̄ ϛ̄ς̄. ᾖ δὲ ὑποτείνουσα μ̄ ρ̄. ᾖ δὲ τέμνουσα τῶν γωνίαν μ̄ λ̄ῑ.

3 N. Igitur hypotenusa erit 4–4 N. Restat vt huius quadratus, nempe 16 Q. + 16 – 32 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc est 16 Q. + 9. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. & reliqua sunt manifesta. Et si omnia ducam in 32. erit vtique cathetus 28 Basis 96. Hypotenusa 100. At secans angulum 35.

IN QVAESTIONEM XVIII.

Hic nulla ferè est difficultas. Nam quod ait Diophantus Cathetum ad alterum baseos segmentum eandem habere rationem, quam habet hypotenusa ad alterum eiusdem baseos segmentum, id manifestè infertur ex tertia sexti Euclidis. Sit enim triangulum rectangulum A B C. & ducatur A D secans angulum acutum A bifariam. Quia ergo, vt ostendit Euclides loco citato, se habet A B ad A C. vt B D ad D C erit & permutando A B ad B D, sicut A C ad C D. Quod est propositum. Itaque sumit Diophantus latera trianguli rectanguli 5. 4. 3. & constituens illud datum specie, applicat lateribus trianguli A D B. fitque A D 5 N. A B 4 N. B D 3 N. Necesse est autem A B statui maiorem quàm B D. quia enim est A B ad B D. vt A C ad C D. sed A C maior est quàm C D. immò quàm tota C B. erit & A B maior quàm B D. Tum verò tota basis C B ponitur quilibet vnitarum numerus qui habeat trientem ad vitandas fractiones, puta 3. Quare fit reliquum segmentum C D. 3 – 3 N. At hypotenusa A C 4 – 4 N. cuius quadratum æquando quadratis laterum circa rectum fit 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare A B est $\frac{15}{2}$. B C $\frac{25}{2}$. A C $\frac{20}{2}$. secans verò A D $\frac{21}{2}$. & si omnia multiplices per 32. fient 28. 96. 100. 35. hoc enim licere constat ex prima tertij potissimum. Quod si loco trianguli 5. 4. 3. sumas aliud non simile, aliam reperies solutionem, & in altera proportione inuenies latera triangulorum A C B. A D B. vt manifestum est.



Cæterùm non docet Diophantus quomodo inueniri possit triangulum rectangulum, vt numerus angulum rectum secantis bifariam sit rationalis, quia id est impossibile. Quod sic demonstratur. Esto triangulum rectangulum A B C. rationale, & ducatur A D diuidens angulum rectum A bifariam. Dico A D non esse rationalem. Ducatur enim ab angulo D linea D E. perpendicularis ad latus A C hæc sanè cadet intra triangulum A D C quoniam anguli D A C. D C A sunt acuti. Itaque ' quoniam est B A ad A C. sicut B D ad D C erunt & componendo B A. A C. simul ad A C. sicut tota B C ad D C. sed A B. A C sunt rationales, & tota B C rationalis ex hypothesi, ergo & quarta proportionalis D C rationalis est. Quoniam verò triangula A B C. D E C sunt æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus C communis, ' erit B C ad C A. sicut D C ad C E. Quare cùm B C. C A. D C. sint rationales, erit & quarta C E rationalis, ac per consequens & reliqua E A. Quia verò ex hypothesi angulus D A E est semirectus, & angulus E rectus, ' est & reliquus A D E semirectus. Quare cum anguli D A E. A D E sint æquales, ' sunt & æquales lineæ A E. E D. Ac proinde quadratus ipsius A D ' duplus est quadrati ipsius A E quare cùm A E ostensa sit rationalis, non erit A D rationalis, alioquin dabitur in numeris quadratus quadrati duplus. Quod est impossibile. Vel cùm A D sit diameter quadrati à latere A E, & A E sit rationalis, non erit A D rationalis per vltimam decimi. Quod erat demonstrandum.

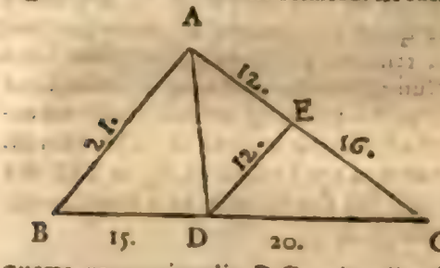
3. *sexti.*

4. *sexti.*

32. *primi.*

5. *primi.*

47. *primi.*



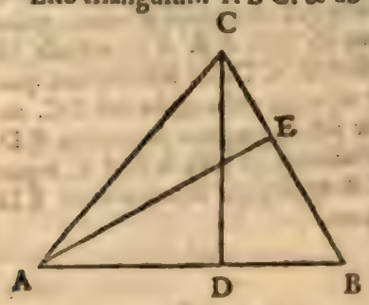
Si libet in numeris rem experiri, ponatur A C 28. A B 21. B C 35. reperietur per regulam trium B D 15. D C 20. & rursus C E 16. A E 12. Quamobrem & D E erit 12. Quadratus ergo angulum secantis A D. erit 288. & ipse A D. ā 288.

Quoniam verò pleraque non iniucunda problemata proponi possunt ad inueniendum quotlibet triangulum in rationalibus, ita vt vel perpendicularis à quolibet angulo in latus oppositum ducta, vel etiam linea diuidens basim vel angulum bifariam, sit rationalis, opere pretium fore duxi, ea hoc loco explicare. Equidem aliqua horum iam tentauit vir doctissimus Christophorus Clauius ad duodecimam, & ad decimam tertiam secundi Elementorum, sed præterquàm de sola egit perpendiculari, in vnica tantum proportione propositum absoluit, nec vllam profert demonstrationem. Nos autem & vniuersaliorem methodum proferemus, & omnia demonstrando persequemur, & non solùm de perpendiculari, sed & delinea basim vel angulum secante bifariam nondum vulgata pro

blemata subiiciemus. Sed quoniam, vt professi sumus, nihil quod ab Euclide demonstratum non sit supponere nobis propositum est, ne aliò lectorem amandemus, demonstranda sunt in primis lemmata quæ sequuntur.

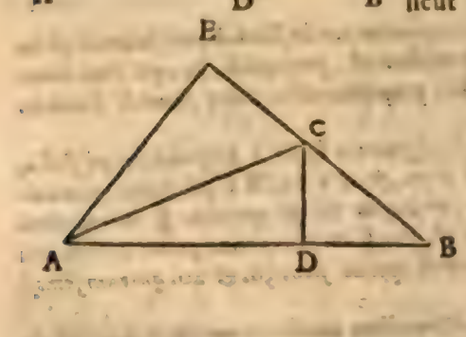
LEMMA PRIMVM.

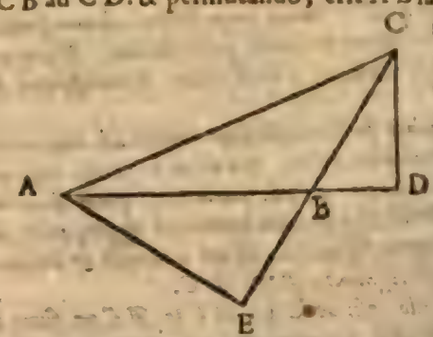
In omni triangulo si duæ perpendiculares a quibuslibet angulis ducantur ad opposita latera, erit vt latus ad latus, ita reciprocè perpendicularis ad perpendicularem.



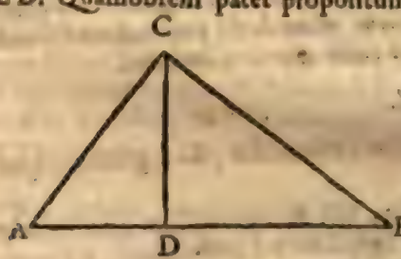
Esto triangulum A B C. & ab angulis C A ducantur in latera opposita A B. C B. perpendiculares C D. A E. dico esse vt latus A B ad latus B C. ita reciprocè perpendicularem A E ad perpendicularem C D. Nam vel vtraque perpendicularis cadit intra triangulum vt in prima figura; vel altera cadit intra, altera extra, vt in secunda figura. Vel vtraque cadit extra vt in tertia figura. Vel secunda perpendicularis cadit in ipsum angulum, vnde demittitur prima, vt in quarta figura, & in duobus prioribus casibus vnica est demonstratio. Quia enim triangula C D B A E B sunt æquangula, cùm in vtroque sit angulus rectus, & angulus B communis, [a] erit A B ad A E. sicut C B ad C D. & permutando, erit A B latus, ad latus C B. sicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quod erat propositum. At in tertio casu, quoniam etiã triangula C D B, A E B. sunt æquiangula, eo quod in vtroque sit angulus rectus, [b] & anguli ad verticem C B D. A B E. sint æquales, sequitur vt prius esse A B ad A E. sicut C B ad C D. Quare & permutando erit A B latus ad latus C B. sicut perpendicularis A E ad perpendicularem C D. Quamobrem patet propositum.

[a] 4. sexti.





[b] 15. p. xi.



Denique si perpendicularis A C. cadat in ipsum angulum C. vnde demissa est perpendicularis C D. vt accidit in triangulo rectangulo; erit ob similitudinem triangulorum C A B. C A D. vt latus C B ad latus B A, sic perpendicularis C D. ad perpendicularem C A. & Rursus ob similitudinem triangulorum C A B. C D B. erit vt latus C A ad latus A B. sic perpendicularis C D ad perpendicularem C B. Quod ipsum etiam demonstratum est ab Euclide octaua sexti. Quamobrem ex omni parte patet propositum.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur si omnia trianguli latera sint rationalia, & vna perpendicularium rationalis, & reliquas perpendiculares à reliquis angulis demissas, fore rationales.

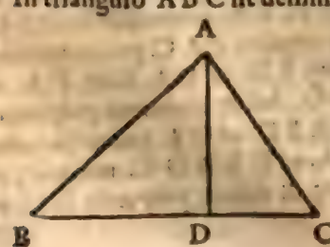
Quia cùm quatuor proportionalium, tres sint rationales, necesse est & quartam esse rationalem.

LEMMA SECVNDVM.

Si à quouis angulo trianguli demittatur in basim perpendicularis, interuallum quadratorum a lateribus angulum comprehendentibus, æquale est rectangulo sub tota basi & interuallo segmentorum basis; vel sub tota basi & aggregato segmentorum basis contento.

In triangulo A B C sit demissa in basim B C. perpendicularis A D. quæ primò cadat intra triangulum, dico interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. æquale esse rectangulo sub tota B C. & interuallo segmentorum B D. D C. comprehenso. Quia enim [a] quadratus ipsius A B. æquatur quadratis ipsarum A D. D B. & quadratus ipsius A C. æquatur quadratis ipsarum A D. D B. erit excessus quadrati A B super quadratum A C. æqualis excessui quadratorum ab ipsis A D. D B. super quadratos ab ipsis A D. D C. & auferendo vtrimque communem quadratum ipsius A D.

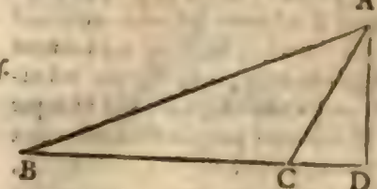
[a] 47. primi.



erit interuallum quadratorum ab ipſis B D. D C. æquale interuallo quadratorum ab ipſis A B. A C.
3. 2. poriſ. Porro interuallum quadratorum ab ipſis B D. C D. æquatur rectangulo ſub tota B C. & interuallo ipſorum B D. C D. Igitur & interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquatur rectangulo ſub tota B C. & ſub interuallo ipſarum B D. C D. Quod erat propoſitum.

Deinde cadat perpendicularis A D. extra triangulum. Dico interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquari rectangulo ſub baſi B C. & ſub aggregato ſegmentorum B D. C D. Nam vt prius, quia quadratus A B. æquatur quadratis ipſarum B D. A D. & quadratus A C. æquatur quadratis ipſarum A D. C D. ablato vtrimque communi quadrato ipſius A D. interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquale eſt interuallo quadratorum ab ipſis B D. C D. At interuallum quadratorum ab ipſis B D. C D. æquatur rectangulo ſub B C. interuallo ipſarum B D. C D. & ſub aggregato earundem B D. C D. Igitur interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. æquatur rectangulo ſub baſi B C. & aggregato ſegmentorum B D. C D. Quod demonſtrandum erat.

47. primi.



3. 2. poriſ.

SCHOLIVM.

Neminem moueat quod in huius propoſitionis demonſtratione citetur tertia ſecundi poriſmatum, quam in ſolis numeris, non autem in lineis propoſuimus. Nam vt euidens eſt, propoſitio illa æquè bene lineis competit, atque ipſis numeris; cum illius demonſtratio ſolis propoſitionibus libri ſecundi Euclidis innitatur.

Sane ex hoc lemmate pulchra elicitur regula ad inuenienda ſegmenta baſis à perpendiculari facta, ſi omnia trianguli latera data ſint. Sit enim in primo caſu A B 30. & A C 26. B C 28. Sumo interuallum quadratorum ab ipſis 30. & 26. puta 224. quem diuido per baſim 28. fit quotiens 8. interuallum ſegmentorum B D. D C. Quare cum eorundem aggregatum ſit 28. Per Canonem prima primi Diophanti facilè inuenientur ſingula ſegmenta. Nam addendo & adimendo 8. ipſi 28. fient 36. & 20. quorum ſemiſſes 18. & 10. ſunt ipſa ſegmenta B D. D C.

Sit autem in ſecundo caſu A B 30. A C 15. B C 25. ſumo interuallum quadratorum ab ipſis 30. & 15. puta 675. quod diuido per 25. prouenit 27. aggregatum ſegmentorum B D. C D. Quare cum eorum interuallum ſit 25. addendo & adimendo 52. ipſi 27. ſiunt 52. & 2. quorum ſemiſſes 26. & 1. ſunt ſegmenta B D. C D. Ipſa autem operatio pulchrè docet an perpendicularis cadat intra triangulum vel extra. Nam ſi diuidendo interuallum quadratorum per baſim, fiat quotiens minor baſi, perpendicularis cadit intra triangulum. Sed ſi fiat quotiens maior baſi, perpendicularis cadit extra triangulum.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtè ſequitur ſi omnia latera trianguli ſint rationalia, & ſegmenta quoque baſis a perpendiculari facta, eſſe rationalia.

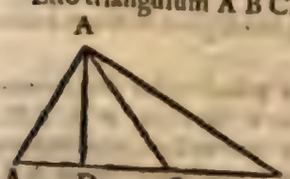
Nam cum latera angulum comprehendentia erunt rationalia, erit & interuallum quadratorum ab ipſis, rationalis numerus, quo diuiſo per baſim rationalem, prodibit vel interuallum, vel aggregatum ſegmentorum, baſis rationale. Quare & ipſa ſegmenta rationalia erunt.

LEMMA TERTIVM.

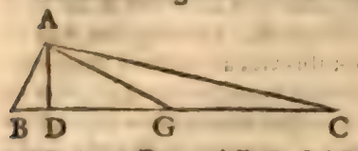
Si ab angulo acuto demittatur intra triangulum perpendicularis in baſim, erit minor proportio cujuſlibet ſegmenti baſeos ad perpendicularem, quam perpendicularis ad aliud ſegmentum. Sed ſi ab angulo obtuſo demittatur perpendicularis, erit maior proportio cujuſlibet ſegmenti ad perpendicularem, quam perpendicularis ad aliud ſegmentum.

Eſto triangulum A B C. & angulo acuto B A C. demittatur intra triangulum perpendicularis A D. dico minorem eſſe proportionem B D. ad D A. quàm D A. ad D C. & è conuerſo minorem quoque eſſe proportionem D C. ad D A. quàm D A ad D B. Ducatur enim ad B A. perpendicularis A G. quæ ſanè cadet extra triangulum, quia angulus B A C. ponitur acutus. Tum ob triangulum rectangulum, erit B D. ad D A. ſicut D A. ad D G. ſed eadem D A. ad maiorem D G. habet minorem proportionem, quàm ad minorem D C. Igitur & B D. ad D A. minorem habet rationem quàm D A. ad D C. ſimiliter quia eſt D G. ad D A. vt D A. ad D B. & D C. minoris, ad D A. minor eſt proportio, quàm D G. maioris ad eandem D A. erit & minor proportio D C. ad D A quam D A ad D B. Quod eſt propoſitum.

8. ſexti.
8. quinti.



Sit autem angulus B A C. obtusus, dico maiorem esse rationem B D. ad D A. quàm D. A ad D C. & è conuerso. Nam ducta ad B A. perpendiculari A G. ea quidem cadet intra triangulum ob angulum rectum B A G. minorem obtuso B A C. sed tamen cadet inter D. & C. quia scilicet angulus B A D. acutus est, ac proinde minor recto B A G. Hoc autem posito eadem est prorsus demonstrandi ratio. Quia enim est ' B D. ad D A. vt D A. ad D G. sed D A. ad D G. ' maior est proportio, quàm D A. ad D C. erit & B D. ad D A. maior proportio quam D A. ad D C. similiter quia est & D G. ad D A. sic D A. ad D B. sed D C. ad D A. maior est proportio, quàm D G. ad D A. erit quoque D C. ad D A. maior proportio, quàm D A. ad B D. Quod demonstrandum erat.

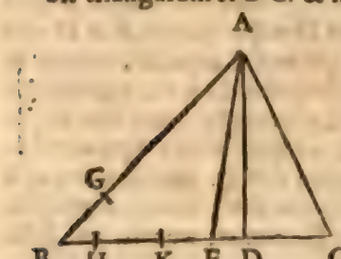


8. *sexti.*
8. *quinti.*

LEMMA QVARTVM.

Si ab angulo acuto vel obtuso demittatur intra triangulum perpendicularis in basim, itemque linea secans angulum bifariam; interuallum laterum angulum comprehendentium, est medium proportionale, inter interuallum segmentorum basis à perpendiculari factorum, & inter interuallum segmentorum quæ fiunt ab angulum secante linea.

Sit triangulum A B C. & in eo angulus B A C. acutus vel obtusus, à quo demittatur perpendicularis A D. itemque linea A E. secans angulum bifariam. Et in maiore latere A B. sumatur A G. æqualis minori lateri A C. ita vt B G. sit interuallum laterum, sumatur etiam in segmento B D, linea K D. æqualis ipsi D C, ita vt B K. sit interuallum segmentorum à perpendiculari factorum. Denique sumatur in B E. linea H E. æqualis ipsi E C. ita vt B H sit interuallum segmentorum à secante angulum factorum, dico B G esse mediam proportionalem inter K B. H B. hoc est esse K B ad B G vt B G ad B H. Quia enim interuallum quadratorum à lateribus A B. A C. ' æquatur rectangulo sub B C. B K. At idem interuallum quadratorum ' æquatur rectangulo sub aggregato laterum A B. A C. & interuallo eorundem B G. erit rectangulum sub aggregato A B. A C. & sub B G. æquale rectangulo sub B C. & B K. ' Igitur est aggregatum ipsarum A B. A C. ad B C. sicut B K. ad B G. ' Quoniam verò est A B. ad B E. sicut A C. ad C E, ' erunt & antecedentes simul ad consequentes, hoc est aggregatum ipsarum A B. A C. ad totam B C. sicut A B. ad B E. vel sicut A C. ad C E. Igitur vt A B ad B E. vel A C. ad C E. sic est B K. ad B G. Cùm ergo A G. sit æqualis ipsi A C. & H E. ipsi E C. erit & A G. ad H E. sicut A B. ad B E. & sicut B K. ad B G. Cùm igitur sit vt tota A B. ad totam B E, sic ablata A G. ad ablatam H E. ' erit & reliqua B G. ad reliquam B H, sicut A B. ad B E. vel B K. ad B G. Quamobrem est B K. ad B G. sicut B G ad B H. Quod demonstrandum erat.



Lemma secundū.
3. 2. *perisp.*
16. *sexti.*
3. *sexti.*
12. *quinti.*
19. *quinti.*

COROLLARIVM.

Hinc sequitur primo interuallum segmentorum à perpendiculari factorum, maius esse interuallo eorum quæ fiunt à linea secante angulum, nempe B K maiorem esse quàm B H. Quia est B K ad B G vt A B. A C simul ad B C ' sed A B. A C. simul sunt maiores quàm B C. ergo & B K maior est quàm B G. ac proinde & B G maior est quàm B H. Quamobrem multo magis B K maior est quàm B H.

20. *primi.*

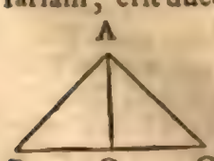
Secundò sequitur maius segmentum eorum quæ fiunt à linea secante angulum, puta B E, minus esse maiore eorum quæ fiunt à perpendiculari, puta ipso B D. & contra E C maius esse quàm D C. Quia enim B K maior est quàm B H. erit reliqua K C. minor quàm reliqua H C. quare & horum semisses sumendo, erit D C. minor quàm E C. Igitur E cadit inter B & D. ac proinde B E minor est quàm B D.

Tertiò, sequitur interuallum E D (quo B D. superat B E. vel quo E C. superat D C) esse dimidium ipsius H K interualli interuallorum. Quia enim vt est H C. ad E C. sic ablatus K C. ad ablatum D C. nam vtrobique est ratio dupla, '' erit & reliquus H K. ad reliquum E D. in eadem ratione dupla.

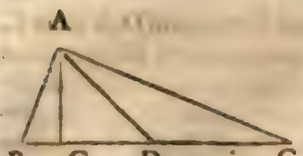
LEMMA QVINTVM.

In triangulo rectangulo, si ab angulo recto ducatur linea diuidens hypotenusam bifariam, erit ducta linea æqualis dimidio hypotenusæ

In triangulo rectangulo A B C. ab angulo recto B A C sit ducta linea A D diuidens B C. bifariam. Dico A D æqualem esse ipsi B D vel D C. Nam si in primo A B. A C æquales. '' Ergo & anguli A B C. A C B æquales erunt, & '' quilibet eorum dimidium erit recti, cùm B A C sit rectus. Sed & angulus B A D. est dimidium recti eadem de causa. Igitur cùm in triangulo B A D. anguli B A D. A B D. sint æquales, '' erunt & latera B D. A D. æqualia. Quod erat propositum.



5. *primi.*
32. *primi.*
6. *primi.*

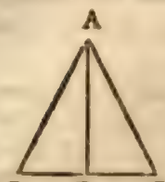


25. primi. Deinde A B. A C. sint inæquales, sit A C. maior quàm A B. Quia ergo latera A D. D C. trianguli A D C. æqualia sunt lateribus A D. D B trianguli A B D. & basis A C. basi A B maior est, [a] erit angulus A D C. angulo A D B maior. Quare A D C obtusus est, ac proinde perpendicularis A G. cadit inter B & D. ne in eodem triangulo alter angulus sit rectus, alter obtusus [b] & tres anguli trianguli sint duobus rectis maiores. Itaque quia B C diuisa est bifariam in D. & inæqualiter in G. [c] quadratus semissis D C. æqualis est rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. At quoniam [d] A G. est media proportionalis inter B G. G C. rectangulum sub B G. G C [e] æquatur quadrato ipsius A G. Igitur quadratus ipsius D C. æquatur quadratis ipsarum A G. G D. [f] sed eisdem quadratis æquatur quadratus ipsius A D. ergo quadrati ipsorum A D. D C. æquales sunt inter se, ac per consequens A D. æquatur ipsi D C. Quod erat demonstrandum.

32. primi.
5. secundi.
8. sexti.
16. sexti.
47. primi.

LEMMA SEXTVM.

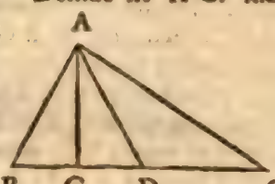
In oxygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo acuto diuidens basim bifariam maior est dimidio basis.



In triangulo oxygonio A B C. ab angulo acuto B A C. ducta sit A D diuidens basim B C. bifariam, dico A D maiorem esse ipsa B D. vel D C. Nam primo sint A B. A C. æquales, [a] erunt igitur & anguli B C. æquales. Quare cùm A C. C D. æquales sint ipsis A B. B D. & anguli B C. æquales, [b] erunt & reliqui anguli triangulorum A B D. A D C. æquales, & anguli ad D. recti. Itaque si A D. non est maior quàm B D. est vtique vel æqualis, vel minor; si æqualis, [c] erunt & anguli D B A. D A B. æquales, & eadem ratione angulus D A C. æqualis erit angulo C. Quare totus angulus B A C. æquabitur duobus angulis B C. ac proinde [d] cùm tres anguli trianguli A B C. æquentur duobus rectis, erit angulus B A C. rectus contra hypothesim. Si autem A D. ponatur minor quàm B D. [e] erit angulus B minor angulo B A D. & eadem de causa angulus C. minor angulo D A C. Quare totus B A C. maior erit vtroque B. C. simul, ac proinde angulus idem B A C maior erit recto, contrà hypothesim. Quare A D. non est æqualis ipsi B D. nec minor. Igitur maior est. Quod erat propositum.

5. primi.
4. primi.
5. primi.
32. primi.
18. primi.

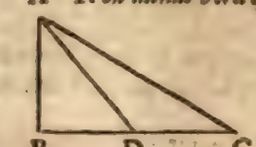
Deinde sit A C. maior quàm A B. Cum ergo A D. D C. sint æquales ipsis A D. D B. & basis A C. sit maior basi A B. [a] erit angulus A D C. maior angulo A B G. ac per consequens angulus A D C. obtusus est. Quare perpendicularis A G. cadit inter B & D. Itaque quoniam B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. [b] erit quadratus ipsius D C. æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato G D. sed ob angulum acutum B A C. [c] minor est ratio B G. ad A G. quam ipsius A G. ad G C. ac proinde quadratus ipsius A G. maior est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi demonstratione, quæ non minus lineis competit quàm numeris. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. maiores sunt quadrato ipsius D C. Atqui quadrati ipsarum A G. G D. [d] æquantur quadrato ipsius A D. Ergo quadratus ipsius A D. maior est quadrato ipsius D C. ac proinde A D. maior est quàm D C. Quod demonstrandum erat.



25. primi.
5. secundi.
Lemma tertium.
47. primi.

SCHOLIVM.

Non minus vera est hac propositio in triangulo rectangulo vel amblygonio, dum linea A D ducatur ab vno acutorum angulorum. Sit enim angulus A B C. rectus vel obtusus, & ducta sit A D. diuidens B C bifariam, dico nihilominus A D. maiorem esse quàm B D. & quidem manifestum est, [a] *cùm A D. maiorem angulum B. subtendat.*

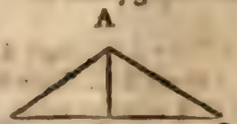


17. primi.

LEMMA SEPTIMVM.

In amblygonio triangulo, linea quæ ducitur ab angulo obtuso diuidens basim bifariam, minor est dimidio basis.

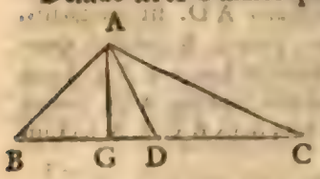
In amblygonio triangulo A B C. ducta sit ab obtuso angulo linea A D diuidens B C. bifariam. Dico A D. minorem esse quàm B D. vel D C. Nam primo A B. A C. ponantur æquales, [a] erunt ergo anguli B. C. æquales, & vt suprà ostendetur angulos ad D. esse rectos. Itaque si A D. non est minor quàm B D. erit vtique vel æqualis, vel maior. Quod si ponatur, [b] ergo angulus B æqualis erit angulo B A D. vel maior & angulus C. angulo D A C. Quare vterque B C simul æquabitur toti B A C. vel maior erit quàm B A C. Quare cùm B A C. sit obtusus, erunt tres anguli trianguli A B C. æquales duobus obtusis, ac proinde maiores duobus rectis. [c] Quod est impossibile. Igitur A D non est æqualis ipsi B D. neque maior. Quamobrem relinquitur vt sit minor. Quod est propositum.



5. primi.
5. primi. & 18. primi.
32. primi.

Deinde

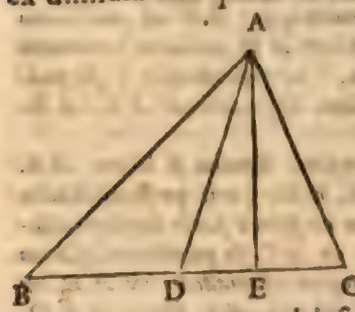
Deinde sit A C maior quàm A B. Igitur vt prius ostendetur angulum A D C. obtusum esse, ac proinde perpendicularis A G. cadet inter B & D. Quoniam itaque B C. secta est æqualiter in D. & inæqualiter in G. ' erit quadratus ipsius D C æqualis rectangulo sub B G. G C. & quadrato ipsius G D. 5. secundi.



At quia ' maior est proportio B G ad A G. quàm A G. ad G C. quadratus ipsius A G. minor est rectangulo sub B G. G C. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi, demonstratione cuilibet quantitati conueniente. Igitur quadrati ipsarum A G. G D. minores sunt quadrato ipsius D C. sed quadrati ipsarum A G. G D. ' æquantur quadrato ipsius A D. ergo & quadratus ipsius A D. minor est quadrato ipsius D C. ac proinde A D. minor est quàm D C. Quod demonstrandum fuit. Lemma tertium. 47. primi.

LEMMA OCTAVVM.

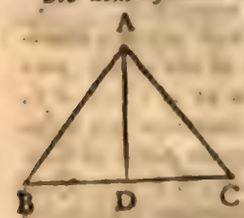
Si à quolibet angulo trianguli ducatur linea diuidens basim bifariam, erunt quadrati laterum dictum angulum comprehendentium, simul dupli quadratorum, tam ex dimidia basi quam ex ducta linea ortorum.

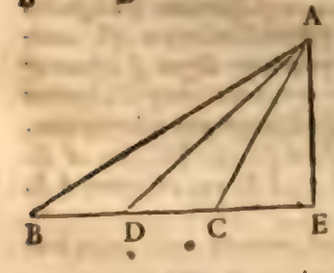


In triangulo A B C. à quolibet angulo A. ducatur A D. diuidens B C. bifariam, dico quadratos simul ipsarum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Nam ducta perpendiculari A E. erunt quadrati ipsarum A B. A C. æquales quadratis segmentorum B E. E C. vnà cum duplo quadrati A E. sed quadrati B E. E C. inæqualium segmentorum, ' dupli sunt quadratorum à dimidia B D. & ab intermedia D E. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. A E. Atqui duplum quadratorum ab ipsis D E. A E. ' æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati ipsarum A B. A C. æquantur duplo quadratorum ab ipsis B D. A D. Quod demonstrandum erat. 9. secundi. 47. primi.

SCHOLIVM.

Sic demonstratur hæc propositio à Pappo lib. 7. propo. 122. Duo tamen alij casus considerati possunt. Primus, cùm latera A B. A C. sunt æqualia, ac per consequens linea A D. est perpendicularis ad basim; & tunc quia quadrati laterum A B. A C. æquantur quadratis segmentorum B D. D C. & duplo quadrati ipsius A D. at quadrati ipsarum B D. D C. æquales sunt, patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum ab ipsis A D. B D. Quod est propositum.



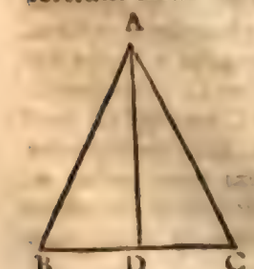


Secundus casus est cùm perpendicularis A E. cadit extrà triangulum. Et tunc quia quadrati laterum A B A C. ' æquantur quadratis ipsarum B E. C E. & duplo quadrati ipsius A E. & quoniam B C. secta est bifariam in D. & adiecta ei linea C E. ac proinde ' quadrati ipsarum B E. C E. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. D E. patet quadratos laterum A B. A C. duplos esse quadratorum B D. D E. A E. at duplum quadratorum D E. A E. æquatur duplo quadrati ipsius A D. Igitur quadrati laterum A B. A C. dupli sunt quadratorum ab ipsis B D. A D. Ac proinde ex omni parte patet propositum. 47. primi. 10. secundi.

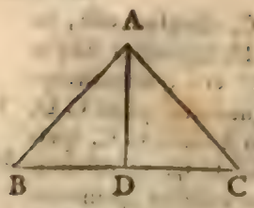
His præmissis sequentia problemata demonstrabimus, omnes triangulorum species persequentes, earum scilicet diuisione tum secundum latera, tum secundum angulos considerata.

PROBLEMA PRIMVM.

Triangulum Isosceles constituere in rationalibus, siue oxygonium, siue amblygonium, vt perpendicularis ab angulo à latetibus æqualibus contento ducta in tertium latus inæquale, sit rationalis.



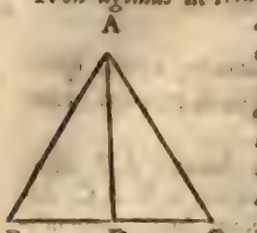
Sit primo constituendum triangulum Isosceles oxygonium A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis quoque A D. sit rationalis. Ponatur quodlibet æqualium laterum A B. A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. diuidatur per octauam secundi Diophanti in duos quadratos, puta 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Et quoniam vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis sexti A D. maior est dimidio basis, ponatur A D. 4. D C. 3. erit ergo tota basis B C 6. & factum est quod proponebatur, vt manifestum est.



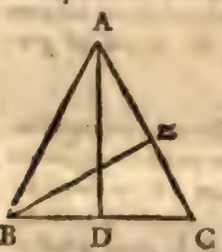
Deinde sit constituendum triangulum amblygonium Isosceles A B C. cuius omnia latera sint rationalia, & perpendicularis A D. sit rationalis. Ponatur vt prius A B. vel A C. quilibet numerus, puta 5. & ipsius 5. quadratus 25. dividatur in duos quadratos 16. & 9. quorum latera 4. & 3. Tunc quia per primam partem demonstrationis lemmatis septimi A D. minor est dimidio basis, ponetur A D 3. D C 4. & erit tota basis B C. 8. & factum erit quod requirebatur.

SCHOLIVM.

Non agimus de triangulo aquilatero, quia in eo perfici non potest problema. Sit enim triangulum aquilaterum A B C. dico si latera illius ponantur rationalia, perpendicularem, A D. esse non posse rationalem quia enim A D. dividit B C. bifariam, cùm A C. sit dupla ipsius D C. 20. sexti. *& quadrati sint in ratione duplicata laterum, erit quadratus ipsius A C. quadruplus quadrati ipsius D C. Quare cùm quadrati ipsarum A D. D C. sint aequales quadrato ipsius A C. erit quadratus ipsius A D. ¾. quadrati ipsius A C. ac proinde quadratus ipsius A C. ad quadratum ipsius A D. se habebit vt 4. ad 3. Quare si A C. & A D. ponantur rationales* 24. octavi. *4. ad 3. habebit rationem quadrati ad quadratum, ac proinde cùm 4. sit quadratus, erit & 3. quadratus. Quod est absurdum. Quamobrem A C. A D. non possunt simul esse rationales, & longitudine commensurabiles.*



Non agimus etiam de triangulo rectiangulo Isoscele, ob eandem causam. Etenim si latera A B. A C. ponantur aqualia, & angulus B A C. rectus, erit perpendicularis A D. aqualis dimidio basis D C. vt constat ex prima parte demonstrationis lemmatis quinti. Quare cùm quadratus ex A C. sit quadratis ipsarum A D. D C. aqualis, quadratus ex A C. duplus est quadrati ex A D. & quadratus ex A D ad quadratum ex A C. est vt 1. ad 2. Quare si A D. A C. ponantur rationales habebit 1. ad 2. rationem quadrati ad quadratum, ac proinde cùm 1. sit quadratus 24. octavi. *erit & 2 quadratus. Quod est absurdum. Vel cùm A D. sit latus* ultima decimi. *quadrati, cuius A C. est diameter, latus erit commensurabile costa. Quod est impossibile.*



Porro sic constituto triangulo oxygonio vel amblygonio, non solum A D. ducta ab angulo à lateribus aqualibus contento, est rationalis, sed & qualibet alia perpendicularis, ducta ab alio angulo, puta B E. vt constat ex Corrollario lemmatis primi. Est enim vt A C. ad B C. sic A D. ad B E. Quare posita A C. 5. B C. 6. A D. 4. invenietur per regulam trium B E. 4 ⅘. in triangulo oxygonio. At in amblygonio posita A C. 5. B C. 8. A D. 3. invenietur rursus per regulam proportionum, B E. 4 ⅘. Quod semel monuisse sufficiat, vt deinceps quotiescumque constituerimus triangulum quodlibet in rationalibus, & ostenderimus unam perpendicularium esse rationalem, intelligatur & alias perpendiculares esse rationales. Quod si lubeat & latera omnia trianguli, & perpendiculares exhiberi in numeris integris, oportet omnia multiplicare per communem denominatorem fractionum qua intervenerunt. Vt in dato exemplo, si omnia ducas in 5. fient in oxygonio triangulo A B. A C. 25. B C. 30. A D. 20. B E. 24. At in amblygonio, erit A B. vel A C. 25. B C. 40. A D. 15. B E. 24. Attamen B E. intelligetur cadere extra triangulum.

Potest autem quadruplicitèr construi hoc problema. Primo si prascribatur numerus unius aqualium laterum, vt iam docuimus.

Secundo si prascribatur numerus baseos. Vt si ponatur basis B C. 10. Tunc enim sumpto semisse ipsius 10. puta 5. cuius quadratus 5. quaram pro quadrato perpendicularis, quadratum numerum qui ad 25. additus quadratum faciat. Sed si oxygonium triangulum est constituendum, oportebit huiusmodi quadratum maiorem esse quàm 25. & si vtaris Canone ad undecimam secundi Diophanti tradito, infinitos tales quadratos reperies. Nam quaerendi erunt duo numeri, quorum mutuo ductu fiat 25. ita tamen vt intervallum eorum sit maius quàm 10. quos si arte certa consequi velis, pone minorem 1 N. erit maior $\frac{25}{1N}$. horum intervallum $\frac{25}{1N} - 1N$. maior est quàm 10. & omnia ducendo in 1 N. & supplendo defectum, fit tandem 25. maior quàm 1 Q. + 10 N. Qua aequatione per approximationem resoluta, fit 1 N. non maior quàm 2. sumes ergo pro minore quemlibet numerum qui non excedat 2. quales sunt 1. 1 ½. 1. ¾. 2. & infiniti alij. Verbi gratia sume 1. erit maior 25. quorum intervallum 24 cuius semissis 12. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus 144. additus quadrato ipsius D C. puta ipsi 25. facit 169. quadratum ipsius A C. Quare A C. vel A B. est 13. B C. 10. A D. 12. Sed si amblygonium triangulum constituendum est, posita vt prius B C. 10. quarendus erit quadratus minor quam 25. qui ad 25. additus quadratum faciat. Sunt ergo inveniendi duo numeri quorum mutuo ductu fiat 25. ita vt eorum intervallum sit minus quàm 10. quos si ponas vt prius 1 N. & $\frac{25}{1N}$. fiet tandem 25. minor quàm

1 Q. + 10 N. vnde fit 1 N. non minor quàm 2 $\frac{1}{10}$. sumes ergo pro minore quemlibet numerum maiorem quam 2 $\frac{1}{10}$. dum is sit minor quàm 5. nam si poneretur maior quam 5. non esset iam minor duorum quaesitorum, sed maior vt euidens est. Sume igitur verbi gratia 2 $\frac{1}{2}$. pro minore, erit maior 10. horum sinternallum 7 $\frac{1}{2}$. cuius semissis 3. $\frac{1}{4}$. erit perpendicularis A D. nam eius quadratus $\frac{225}{16}$. additus ad 25. quadratum ipsius D C. facit $\frac{625}{16}$ quadratum ipsius A C. Quare A C. vel A B. est 6 $\frac{1}{4}$. B C. 10. A D. 3 $\frac{3}{4}$. & ducendo omnia in 4. fiet A C vel A B. 25. B C. 40. A D. 15.

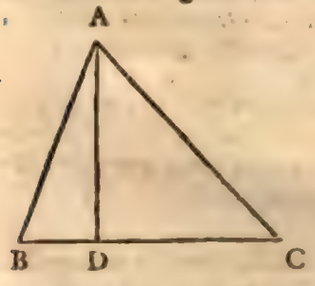
Tertio, praescribi potest numerus perpendicularis A D. vt si ponatur 12. tuncque quarendus erit quadratus, pro quadrato ipsius D C. qui ad 144. additus quadratum faciat; sed si lubeat oxygonium facere triangulum, quaremus quadratum minorem quàm ipse 144. sin autem amblygonium constituendum sit triangulum, quaremus quadratum maiorem quàm 144. Quod vtrumque, vt prius, perficietur.

Quarto, denique praescribi potest, numerus perpendicularis B E vt pote 24. & tunc sumo hypotenusam cuiuslibet trianguli rectanguli, puta 5. & statuo in Numeris, ponoque quodlibet aequalium laterum A B. A C. 5 N. & si oportet facere triangulum oxygonium pono semissem basis puta D C. minus laterum circa rectum, puta 3 N. erit ergo tota basis 6 N. Quamobrem ' *cùm sit vt B C. 6 N. ad A C. 5 N. sic B E. 24. ad A D. inuenietur A D. 20. cuius quadratus 400. cui addendo 9 Q. quadratum ipsius D C. fit vtique 400 + 9. Q aequalis quadrato ipsius A C. at idem quadratus est 25. Q. ergo 25. Q. aequantur 400. + 9. Q. & tandem 16 Q. aequantur 400. & fit 1 N. 5. est ergo A B. vel A C. 25. B C. 30 A D. 20. Sed si constituendum est triangulum amblygonium, posita A C. vel A B. 5 N. vt prius, pono D C. maius laterum circa rectum, puta 4 N. ergo tota B C. est 8 N. Tunc facio vt 8 N. ad 5. N. ita 24. ad aliud, & fit A D. 15. cuius quadratus 225. cui addendo 16. Q quadratum ipsius D C fit 225 + 16 Q. aequalis 25 Q. quadrato scilicet ipsius A C. & tandem 225. aequantur 9 Q. vnde fit 1 N. 5. est ergo A C. vel A B. 25. B C. 40. A D. 15. intelligendum tamen B E cadere extra triangulum.* Lemma primum.

Caterùm non agimus de segmentis basis à perpendiculari factis, quia cùm triangulum est rationale, & segmenta illa sunt rationalia per corollarium secundi lemmatis.

PROBLEMA SECVNDVM.

Triangulum oxygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo acuto demissa sit rationalis.



Ponatur latus A C. quilibet numerus, vt pote 10. cuius quadratus 100. diuidatur in duos quadratos, vt pote in 64. & 36. quorum latera 8. & 6. & ponatur A D maius horum laterum, puta 8. & D C. minus puta 6. & esto B D. 1 N. quadrati ergo ipsarum B D. A D. puta 1 Q. + 64. æquantur quadrato ipsius A B. Quare vt A B. sit rationalis, oportet 1 Q + 64. æquari quadrato. Quoniam verò angulus A ponitur acutus est ratio D C ad A D minor ratione A D. ad B D. ac proinde productus ex B D. in D C. puta 6 N. minor est quadrato ipsius A D. qui est 64. vt ostendit Clauius ad vigesimam septimi. Ergo cùm diuidendo 64. per 6. fiat 10. $\frac{2}{3}$. patet 1 N. minorem esse debere quàm 10 $\frac{2}{3}$. Aliter reperietur Numeri determinatio, hac arte scilicet. Quia vt trianguli omnes anguli sint acuti, ' oportet quadratum cuiuslibet lateris minorem esse aggregato quadratorum ab alijs lateribus. Hoc autem vt sit, oportet quadratum cuiuslibet lateris minorem esse semisse aggregati quadratorum à singulis lateribus, sumo aggregatū quadratorū à singulis lateribus, est autem quadratus A C. 100. quadratus B C. 1 Q. + 36 + 12 N. quadratus A B 1 Q. + 64. quorum summa 2 Q. + 200 + 12 N. cuius semissis 1 Q + 100. + 6 N. quem euidens est maiorem esse tum quadrato ipsius A C. 100. tum quadrato ipsius A B 1 Q. + 64. Restat vt etiam 1 Q. + 100 + 6 N. sit maior quam 1 Q. + 36 + 12 N. Quare ablatis vtrimque æqualibus, oportet vt 64. sit maior quàm 6 N. Quare diuiso 64. per 6. fit 1 N. minor quàm 10. $\frac{2}{3}$. vt prius. Itaque quoniam fingentes latus quadrati 1 Q. + 64. ponemus illud 8. — tot numeris, à quorum quadrato auferendo 1. per residuum diuidatur sedecuplum ipsorum numerorum, oportebit hunc quotientem minorem esse quàm 10 $\frac{2}{3}$. Ponatur ergo numerus Numerorum 1 N. fiet $\frac{16 N}{16 Q - 1}$. minor quàm 10 $\frac{2}{3}$. & omnia ducendo in 1 Q. — 1. & rursus in 3. fient tandem 48 N. + 32. minores quàm 32 Q. seu 3 N. + 2. minores quàm 2 Q. qua æquatione resoluta cùm fiat 1 N. 2. patet fingendum latus quadrati 8. — tot Numeris qui excedant 2. Ponatur 8. — 5 N. fiet 1 N. 3 $\frac{1}{5}$. tanta erit B D. Quare A B est 8 $\frac{1}{5}$. A C 10. B C. 9 $\frac{3}{5}$. A D. 8. Lemma tertium. 13. secundi.

SCHOLIVM.

Hìc etiam loco vnius laterum, praescribi posset ipsa perpendicularis A D. vt puta 12. Tunc ergo quare duos quadratos qui additi ad 144. quadratum ipsius 12. faciant quadratum, hac tamen lege vt vel vtriusque quaesitorum latus sit minus quàm 12. vel si alterum sit maius alterum minus, maioris ad 12. sit minor ratio, quàm ipsius 12. ad minus vt videlicet constituatur triangulum oxygonium. Quadrati quorum latera minora sunt quàm 12. sunto 81. & 25. Posita ergo A D 12. erit B D. 5. D C. 9. atque adeo tota B C

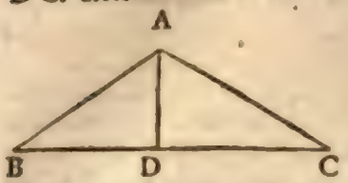
14. At A B. fiet 13. A C. 15. Quadrati verò 256. & 25. si sumantur, quia minor est ratio 16. ad 12. quàm 12. ad 5. Rectè statuetur B D. 5. D C. 10. ac proinde tota B C. 21. erit autem A B. 13. A C. 20.

PROBLEMA TERTIVM.

Triangulum amblygonium scalenum constituere in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo obtuso demissa sit rationalis.

Ponatur A C. vt suprà quilibet numerus 10. cuius quadrato in duos quadratos diuiso, ponatur D C. alterum latus 6. & A D. alterum 8. & sit B D 1 N. fiet ergo vt prius 1 Q. + 64 æquandus quadrato. Sed quia ob angulum obtusum [1] maior est ratio B D ad A D. quàm A D. ad D C. productus ex B D. in D C. puta 6 N. maior esse debet quadrato ipsius A D. 64. Quare 1 N. debet esse maior quem 10 $\frac{2}{3}$. si ergo quæras vt suprà determinationem numeri Numerorum in latere fictitio ponendorum, inuenies fingendum esse latus illud 8. — tot Numeris qui sint minus quàm 2. sed oportet etiam vt sint plus quàm 1. vt videlicet eorum quadratus excedat 1 Q. Pone ergo 8. — 1 $\frac{1}{2}$ N. fiet 1 N. 19 $\frac{1}{17}$. tanta erit B D. ergo tota B C. 25 $\frac{1}{17}$. A B. 20 $\frac{4}{17}$. A C. 10. A D. 8.

Lemma tertium.



Vel ponatur A D. quilibet numerus vtpote 12. & quærantur duo quadrati, vt quilibet additus ad 144. quadratum ipsius 12. faciat quadratum, ita tamen vt cujuslibet quæsitorum quadratorum latus sit maius quàm 12. vel si alterum sit maius, alterum minus, maius ad 12. maiorem habeat rationem, quàm 12. ad minus, ad hoc vt angulus B A C. constituatur obtusus per lemma tertium, sumi possunt maiora latera 35. & 16. nam addito quadrato ex 35. ad quadratum ex 12. fit quadratus ex 37. & eidem addendo quadratum ex 16. fit quadratus ex 20. Posita ergo A D. 12. erit B D. 16. D C. 35. tota B C. 51. A B. 20. A C. 37. si autem sumantur latera 35. & 9. quia maior est ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 9. erit B D. 9. D C. 35. tota B C. 44. A C. 37. A B. 15. Vel denique si sumas latera 35. & 5. quia etiam maior est ratio 35. ad 12. quàm 12. ad 5. fiet B D. 5. D C. 35. tota B C. 40. A C. 37. A B. 13.

SCHOLIVM.

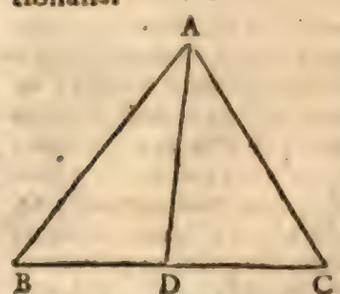
Animaduersione dignum est, posita perpendiculari 12. formari posse sex diuersa triangula in integris, quorum duo sunt oxygonia quæ in scholio præcedentis exposuimus, nimirum 15. 14. 13. & 21. 20. 13. tria sunt amblygonia quæ hic attulimus, primum 51. 37. 20. secundum 44. 37. 15. tertium 40. 37. 13. Restat vnum rectangulum, cuius latera 25. 20. 15. si videlicet segmenta hypotenusæ ponantur 9. & 16. inter quæ perpendicularis 12. est media proportionalis per octauam sexti.

Cæterùm non proposuimus inuenire triangulum rectangulum scalenum in rationalibus, vt perpendicularis ab angulo recto demissa sit rationalis. Quia id accidit cuicunque triangulo rectangulo rationali, vt constat ex Corollario lemmatis primi, vim suam mutuante à quarta parte demonstrationis ipsius lemmatis.

PROBLEMA QVARTVM.

Triangulum scalenum, oxygonium, vel amblygonium constituere in rationalibus, vt ab angulo acuto, vel obtuso ducta linea diuidens basim bifariam, sit rationalis.

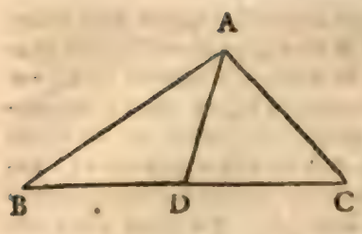
Lemma sextum. Lemma octauum.



Sit triangulum oxygonium A B C. in quo ducta sit A D. diuidens basim B C. bifariam. Sume quemlibet numerum ex duobus quadratis compositum, vt 13. compositum ex 9. & 4. quorum latera 3. & 2. & minus latus 2. tribue dimidio basis D C. maius verò 3. tribue lineæ A D. [1] quia scilicet ob angulum acutum A D. debet esse maior quàm D C. [2] Tum verò quia quadrati ipsarum A B. A C. sunt dupli quadratorum ab ipsis A D. D C. cùm summa quadratorum ab ipsis A D. D C. ponatur 13. erit summa quadratorum ab ipsis A B. A C. 26. Porrò quia 13. componitur ex duobus quadratis, quorum latera 3. & 2. duplum ipsius 13. puta 26. [3] componetur etiam ex duobus quadratis, quorum latera 5. & 1. æqualia scilicet tum summæ, tum interuallo laterum quadratorum ex quibus 13. componitur. Sed si tribuas 5. ipsi A B. & 1. ipsi A C. manifestum sequetur absurdum. Quia enim A B. ponitur summa ipsorum 3. & 2. & A C. eorundem interuallum. At B C ponitur duplum minoris 2. puta 4. patet addendo duplo minoris interuallum numerorum, fieri summam numerorum, ac proinde latera A C. B C. simul æqualia fore reliquo A B. [4] Quod est absurdum. Superest ergo vt numerum 26. compositum ex duobus quadratis 25. & 1. rursus diuidamus in duos alios quadratos per decimam secundi Diophanti. Ponatur alterum latus 5 — 1 N. alterum 1 + 2 N. fiet summa quadratorum 26 + 5 Q. — 6 N. æqualis 26. vnde fiet 1 N. $\frac{6}{5}$. sunt ergo quæsita latera 3 $\frac{6}{5}$. & 3 $\frac{2}{5}$. Posita igitur A D. 3. erit A B. 3 $\frac{6}{5}$. A C. 3 $\frac{2}{5}$. & B C. 4. vel omnia ducendo in 5. fiet A B. 19. A C. 17. B C. 20. ipsa A D. 15.

1. 2. perif.

20. primi.



Contraria ratione in triangulo amblygonio A B C. ſtatuemus D C. 3 & A D. 2. [1] quia A D. minor eſt quàm D C. Tum vt prius quia quadrati ipſarum A D. D C. ponuntur 13. [2] erunt quadrati ipſarum A B. A C. 26. qui cùm ſit duplus numeri ex duobus quadratis compoſiti, [3] componetur & ipſe ex duobus quadratis, ſed maius latus 5. eſt ſumma ipſarum A D. B C. & minus latus eſt interuallum earundem, puta 1. Quare ſi A B ponas 5. A C. 1. cùm maioris duarum A D. D C. dupla ſit B C. ſi aggregato earundem A D. D C. puta ipſi A B. addas earundem interuallum A C. fiet aggregatum ipſarum A B. A C. [4] æquale ipſi B D. [5] Quod eſt abſurdum. Quare rurſus 26. diuidendus eſt in duos alios quadratos, vt factum eſt ſuprà, ſint ergo eorum latera $\frac{12}{5}$. & $\frac{1}{5}$. Poſita ergo A D. 2. fiet B C. 6. A B. $\frac{10}{5}$. A C $\frac{17}{5}$. vel omnia ducendo in 5. erit A B. 19. A C. 17. B C. 30. A D. 12.

Lemma ſeptimũ. *Lemma octauum.* 7. 2. *poriſ.* 23. 1. *poriſ.* 20. *prim.*

SCHOLIVM.

Euidens eſt tam in oxygonio, quàm in amblygonio ipſas A D. D C. poni poſſe in qualibet proportione, dum ſemper habeatur ratio lemmatum 6. & 7.

Deinde ſicut prius præſcribuntur ipſæ A D. D C. ita poſſunt prius ipſæ A B. A C. præſcribi, vt ex ipſis indagentur A D. D C. verbi gratia ponatur A B. 3. A C. 1. erit ſumma quadratorum 10. cuius ſemiſſis 5. [6] *æquatur quadratis ipſarum A D. D C. ſed & ipſe 5. componitur ex duobus quadratis,* [7] *quia eſt ſemiſſis numeri ex duobus quadratis compoſiti, ſed latera ipſorum non poſſunt applicari ipſis A D. D C. ob cauſas ſuprà allatas. Quare oportet rurſus diuidere 5. in duos alios quadratos, ponantur eorum latera 1 + 7 N. & 2 − 5 N. fiet ſumma quadratorum 5 + 74 Q. − 6 N. æqualis 5. vnde erit 1 N. $\frac{6}{37}$. Sunt ergo latera quadratorum 1 $\frac{31}{37}$. & 1 $\frac{11}{37}$. Quare poſita A B. 3. A C. 1. ſi libet facere triangulum oxygonium, pones A D. 1 $\frac{31}{37}$. B D. 1. $\frac{11}{37}$. vnde tota B C. fiet 3. $\frac{1}{37}$. At ſi velis conſtituere amblygonium, pones A D. 1 $\frac{31}{37}$. B D. 1 $\frac{11}{37}$. totam B C. 3 $\frac{1}{37}$.*

Lemma octauũ. 6. 2. *poriſ.*

Monco tamen ſi abſque vlla cautione numeri ex duobus quadratis compoſiti, rurſus diuidantur in alios duos quadratos per ſolum artificium decimæ ſecundi Diophanti, accidere poſſe vt in idem abſurdum incidatur, ad quod vitandum huiuſmodi ſubdiuiſio inſtituitur, vt ſcilicet inueniantur latera quadratorum quæ minimè poſſint applicari lateribus trianguli. Quare tutius erit huiuſmodi numeros diuidere per artificium duodecimæ quinti, in duos quadratos, quorum exiguum ſit interuallum, ſic enim in tale incommodum nunquam incurretur.

Cæterum propoſui triangulum ſcalenum, non autem Iſoſceles inuenire, quia cùm in triangulo Iſoſcele linea diuidens baſim bifariam, ſit perpendicularis ad baſim, non differret huiuſmodi problema à primo.

Non propoſui etiam de triangulo rectangulo ſcaleno, quia in omni triangulo rectangulo rationali problema perficitur, cùm linea diuidens hypotenuſam bifariam ſit ſemper æqualis dimidio hypotenuſæ per lemma quintum.

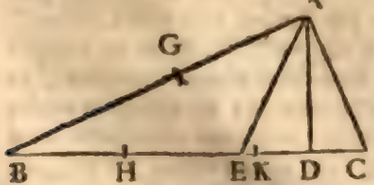
Superſunt elegantiſſima duo problemata quibus quæritur triangulum tum oxygonium, tum amblygonium, vt acuto vel obtuſo angulo bifariam ſciſſo, numerus angulum ſecantis ſit rationalis; qua ſanè magis accedunt ad quæſtionem Diophanti, quamuis ſint longè ſubtiliora.

PROBLEMA QVINTVM.

Triangulum oxygonium inuenire in rationalibus, vt numerus angulum acutum bifariam ſecantis ſit rationalis.

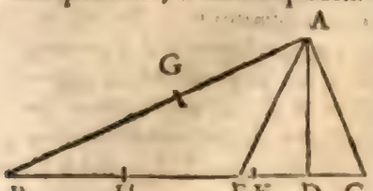
Eſto triangulum oxygonium A B C. & ducta perpendicularis A D. & linea A E. ſecans angulum B A C. bifariam, oportet facere omnia latera trianguli rationalia, & lineam A E. rationalem. Sumatur ſegmento C D. æquale D K. vt K B. ſit interuallum ſegmentorum à perpendiculari factorum. Item ſegmento C E. ſumatur æquale E H. vt H B. ſit interuallum ſegmentorum à ſecante angulum factorum. Denique ſumatur A G. æqualis ipſi A C. vt B G. ſit interuallum laterum A B. A C. Quoniam ergo [8] vt eſt B K ad B G. ſic eſt B G. ad B H. ſumantur tres quicunque numeri proportionales, puta 25. 20. 16. & ponatur B K. 25. B G. 20. B H. 16. & ſtatuatur A C. ſeu A G. 1 N. erit ergo tota A B 1 N. + 20. ac proinde interuallum quadratorum ab ipſis A B. A C. eſt 40 N. + 400. quo diuiſo per interuallum ſegmentorum baſis à perpendiculari factorum, puta per 25. [9] prodit tota baſis B C. $\frac{8}{5}$ N. + 16. cui ſi addatur & adimatur interuallum ſegmentorum, puta 25. ſemiſſis ſummæ & reſidui oſtendet ipſa ſegmenta. Fiet ergo minus ſegmentum D C. $\frac{4}{5}$ N. − $\frac{1}{5}$. cuius quadratus $\frac{16}{25}$ Q. + $\frac{1}{25}$. − $\frac{8}{25}$ N. qui ſi auferatur à quadrato lateris A C. puta ab 1 Q. remanet quadratus ipſius perpendicularis A D. nimirum $\frac{9}{25}$ Q. + $\frac{8}{25}$ N. − $\frac{1}{25}$. cui ſi addatur quadratus ipſius E D. puta $\frac{1}{25}$. (etenim E D eſt ſemiſſis ipſius H K.

Lemma quartũ. *Lemma ſecundũ.*



interualli interuallorum B K. B H. vt constat ex Corollario lemmatis quarti. Quare cùm interuallum ipsorum 25. & 16. sit 9. cuius semissis est $\frac{1}{2}$. tanta erit E D. & eius quadratus $\frac{1}{4}$.) fiet quadratus lineæ A E. nimirum $\frac{1}{4}$. Q. + $\frac{5}{1}$. N. Quamobrem vt A E. sit rationalis oportet $\frac{1}{4}$. Q. + $\frac{5}{1}$. æquari quadrato, & omnia in 25. ducantur, tum diuidantur per 9. fit 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato, & facilis quidem est æquationis ratio, sed oportet prius determinare de Numero.

13. secundi.



Quia enim volumus triangulum A B C. esse oxygonium, necesse est quadratum cuiuslibet lateris, minorem esse aggregato quadratorum à reliquis duobus lateribus, seu quod idem est, oportet semissem aggregati quadratorum à singulis lateribus, maiorem esse quadrato cuiuslibet lateris. Cùm ergo sint tria latera 1 N. 1 N. + 20. $\frac{1}{2}$ N. + 16. erit aggregatum quadratorum à singulis $\frac{3}{1}$ Q. + $\frac{25}{1}$ N. + 656. cuius semissis est $\frac{3}{2}$ Q. + $\frac{25}{2}$ N. + 328. qui quidem vt apparet maior est quadrato primi lateris, sed de aliis duobus non statim appareret. Oportet ergo vt $\frac{3}{2}$ Q. + $\frac{25}{2}$ + 328. sit maior quàm 1 Q. + 40 N. + 400. quâ æquatione resoluta fit 1 N. maior quàm $\frac{72}{1}$. Rursus oportet vt $\frac{3}{2}$ Q. + $\frac{25}{2}$ N. + 328. sit maior quàm $\frac{25}{4}$ Q. + $\frac{25}{1}$ N. + 256. qua æquatione resoluta, fit 1 N. minor quàm $\frac{72}{1}$. Oportet ergo ita fingere latus quadrati 1 Q. + 20 N. vt fiat 1 N. maior quàm $\frac{72}{1}$. minor quàm $\frac{25}{1}$ Porrò fiet valor Numeri si à quodam quadrato auferatur 1. & per residuum diuidatur 20. Ponatur ergo quadratus quæsitus quo cum instituenda est æquatio 1 Q. fiet $\frac{1}{20}$. maior quàm $\frac{1}{19}$. minor quàm $\frac{1}{21}$. Quare vtraque æquatione resoluta constat quadratum quæsitum maiorem esse debere quàm 3 $\frac{1}{19}$. minorem quàm 4 $\frac{1}{21}$. Ponatur verbi gratia 4. & sint 1 Q. + 20 N. æquales 4 Q. fiet 1 N. $\frac{4}{1}$. latus scilicet A C. erit autem A B $\frac{5}{1}$. B C item $\frac{5}{1}$. segmenta B D. D C. fient $\frac{17}{1}$. & $\frac{3}{1}$. segmenta verò B E. E C. erunt $\frac{13}{1}$ & $\frac{7}{1}$. Ipsa E D $\frac{1}{1}$. Quamobrem à quadrato ipsius A C. hoc est à $\frac{16}{1}$. auferendo quadratum ipsius D C. puta $\frac{289}{1}$. remanet $\frac{167}{1}$. quadratus perpendicularis A D. cui si addas quadratum ipsius E D. puta sub eadem denominatione $\frac{1}{1}$. fit $\frac{168}{1}$. seu 64. quadratus lineæ A E. Ac proinde ipsa linea A E. est 8. & rationalis vt requirebatur. Quod si omnia latera per 3. multiplices, habebis omnia in integris, eritque A B. 80. A C. 20. B C. 80. A E. 24.

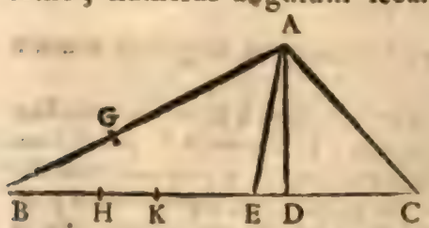
SCHOLIVM.

Non curamus vtrum perperdicularis A D. sit rationalis, an non; cum sufficiat latera trianguli vnà cum linea A E. facere rationalia.

Porrò infinita reperiri possunt hac arte triangula, & quorum latera diuersas ferunt rationes, tum quia pro interuallis B K. B G. B H. sumi possunt tres proportionales diuersi ab ipsis 25. 20. 16. & in diuersa ratione, vnde diuersæ contingent solutiones, tum etiam quia quadratus 1 Q. + 20. N. diuersis quadratis æquari potest, cùm inter 3 $\frac{1}{19}$. & 4 $\frac{1}{21}$. infiniti sumi possint quadrati. Verbi gratia si æques 1 Q. + 20. N. cum $\frac{1}{400}$. Q. fiet 1 N. $\frac{399}{400}$. & si sumas minima simulum fiet A B 1805. A C. 500. B C. 1844. A E. 570. segmentum B E. 1444. segmentum E C. 400. & sic de alijs.

PROBLEMA SEXTVM.

Triangulum amblygonium constituere in rationalibus, vt obtuso angulo bifariam sciſſo, numerus angulum secantis sit rationalis.

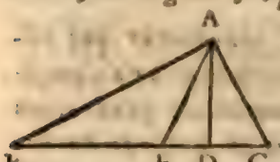


Esto triangulum amblygonium A B C. perpendicularis A D. angulum secans A E. interuallum segmentorum B D. D C. à perpendiculari factorum sit B K. interuallum autem segmentorum B E. E C. à secante angulum factorum esto B H. ac denique interuallum laterum A B. A C. sit B G. igitur ob demonstrata lemmate quarto sumemus, vt suprà tres numeros proportionales, vt 25. 20. 16. & statuemus B K. 25. B G. 20. B H. 16. tum posito A C. 1 N. fiet vt prius A B. 1 N. + 20. & B C. , N. + 16. Quare tandem inuenietur quadratus ipsius A E $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{5}{1}$. N. Quare omnia ducendo in 25. tum diuidendo per 9. fiet 1 Q. + 20 N. æquandus quadrato. Quoniam verò volumus angulum B A C. esse obtusum, oportet vt quadrati simul, laterum A B. A C. sint minores quadrato baseos B C. Quare 2 Q. + 40 N. + 400. minus esse debet quàm $\frac{25}{4}$ Q. + $\frac{25}{1}$ N. + 256. vnde tandem 144. minor esse debet quàm $\frac{1}{4}$ Q. + $\frac{5}{1}$ N. & re in integris ad minimos deducta fit 1800. minor quàm 7 Q. + 140 N. Qua æquatione vt decet, resoluta, fit 1 N. maior quàm 9. Oportet igitur æquantes quadrato 1 Q. + 20 N. efficere 1 N. maiorem quàm 9. Quamobrem cùm fiat 1 N. quodam quadrato vnitate multato, & per residuum diuidendo 20. si ponatur quæsitus quadratus 1 Q. fiet $\frac{1}{20}$. maior quàm 9. & tandem 29. maior quàm 9 Q. Quare oportet quæsitum quadratum, minorem esse quàm 3 $\frac{1}{29}$ Ponatur $\frac{1}{4}$. ergo 1 Q. + 20 N. æquatur $\frac{1}{4}$. Q. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. latus scilicet A C. Quare A B. est $\frac{25}{5}$. B C. $\frac{4}{5}$. segmenta B D. D C. $\frac{25}{10}$ & $\frac{25}{10}$.

At segmenta B E. E C. $\frac{125}{4}$ & $\frac{45}{4}$. denique A E fit $\frac{225}{4}$ & si sumas minimos similium, fiet A B. 125. A C. 80. B C. 164. A E. 60.

SCHOLIVM.

Hic etiam perpendicularis curam non agimus, quæ ferè semper irrationalis reperitur. Cæterùm solutiones diuersa totidem modis dari possunt, quot in præcedente, & eadem prorsus ob causas. Sed animaduersione dignum est, plerumque contingere vt lineâ A E. reperiatur æqualis ipsi lateri minori A C. cùm scilicet E D. D C. sunt æquales, tunc enim, vt patet, triangulum A E D, est æquangulum & æquale triangulo A D C. Verbi gratia si ponas 1 Q. + 20. N. æquari 4 Q. fiet 1 N. $\frac{1}{2}$. latus scilicet A C. & si sumas minima similium, erit A B 125. A C 45. B C. 136. segmenta B D. D C. 118. & 18. At segmenta B E. E C. 100. & 36. Ipsa denique A E. 45. æqualis scilicet lateri A C. Interdum contingit A E. æquari ipsi E C. vt si ponas 1 Q. + 20 N. æquari $\frac{25}{9}$ Q. fiet enim 1 N. $\frac{225}{4}$. latus scilicet A C. & sumendo minima similium erit A B. 640. A C. 360 B C. 800. segmenta B D. D C. 575. & 225. At segmenta B E. E C. 512. & 288. Ipsa denique A E 288. æqualis segmento E C.



Verùm hæc de his dixisse sufficiat, & subtilis non minus quàm iucunda speculationis hic finis esto esto. Ad Diophantum redeamus.

QVÆSTIO XIX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt areæ numerus cum hypotenusæ numero faciat quadratum, at circumferentiæ numerus sit cubus. Ponatur areæ numerus 1 N. hypotenusa verò statuatur vnitatum aliquot quadratarum cum defectu 1 N. Esto 16 — 1 N. cùm ergo posuerimus aream 1 N. qui fit ex lateribus circa rectum erit 2 N. Atqui 2 N. producuntur ex 1 N. in 2. si ergo alterum circa rectum statuamus 2. erit alterum 1 N. & fiet circumferentia 18. qui non est cubus. At 18. ortus est è quodam quadrato, & vnitatibus 2. Oportet itaque inuenire quadratum aliquem, qui binario adiecto cubum faciat; ita vt cubus quadratum superet binario. Ponatur igitur quadrati latus 1 N. + 1. At cubi latus 1 N. — 1. fit quadratus quidem 1 Q. + 2 N. + 1. At cubus 1 C. + 3 N. — 3 Q. — 1. volo ergo cubum superare quadratum binario. Quare quadratus cum binario, puta 1 Q. + 2 N. + 3. æqualis est 1 C + 3 N. — 3 Q. — 1. vnde inuenitur 1 N. 4. est igitur quadrati latus 5. cubi verò 3. ipse quadratus 25. cubus 27. Transmuto itaque rectangulum, & ponens aream illius 1 N. statuo hypotenusam 25. — 1 N. Manet autem basis 2. & cathetus 1 N. Restat vt

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ ἀπὸ περιλαβόντων τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, ποιῇ τετράγωνον. ὁ δὲ ἐν τῷ περιμέτρῳ ἀπὸ ἧς κύβος. τετάχθω ὁ ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ ἀριθμὸς α̅. ὁ δὴ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ ἀπὸ μονάδων τινῶν τετραγωνικῶν λείψει ἀριθμῷ α̅. ἔστω μονάδων ις̅ λείψει ἀριθμῷ α̅. ἀλλ' ὑπὲρ ὑπόθεσιν τὸν ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ ἀπὸ ἧς ἀριθμὸς α̅. ὁ ἄρα ὑπὸ τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν ἀπὸ γίνεται ἀριθμὸς β̅. ἀλλὰ ἀριθμοὶ β̅. περιέχονται ὑπὸ ἀριθμοῦ α̅. μονάδων β̅, ἐὰν οὖν τάξωμεν μίαν τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν μονάδων β̅. ἔσται ἡ ἑτέρα ἀριθμὸς α̅. καὶ γίνεται ἡ περίμετρος μ̊ ιη̅. ᾗ ἐστι κύβος. ὁ δὲ ιη̅. γίνεται ἐκ τινος τετραγώνου, καὶ μονάδων β̅. δήπου ἄρα εὑρεῖν τετράγωνόν τινα, ὃς περιλαβὼν μονάδας β̅. ποιεῖ κύβον. ὥστε κύβου τετραγώνῳ ὑπερέχειν μονάδας β̅. τετάχθω οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ ς̅ α̅. μ̊ α̅. ἡ δὲ τοῦ κύβου ἀριθμὸς α̅. λείψει μ̊ α̅. γίνεται ὁ μὲν τετράγωνος δ̊ α̅ ςς̅ β̅ μ̊ δ̅ α̅. ὁ δὲ κύβος κ̊ α̅ ιϛ̅ γ̅ γ̅ δ̊ γ̅ μ̊ α̅. θέλω οὖν τὸν κύβον τοῦ περιλαβόντος ὑπερέχειν δυάδι. ὁ ἄρα τετράγωνος μετὰ δυάδος τοσοῦτός δ̊ α̅. ιϛ̅ β̅. μ̊ γ̅. ἴσος ἐστὶ κ̊ α̅. ςς̅ γ̅. γ̅ δ̊ γ̅. μ̊ α̅. ὅθεν ὁ ς̅ διρίσκεται μ̊ δ̅. ἔσται οὖν ἡ μὲν τοῦ τετραγώνου πλευρὰ μ̊ ε̅. ἡ δὲ τοῦ κύβου μ̊ γ̅. αὐτοὶ ἄρα, ὁ μὲν τετράγωνος μ̊ κε̅. ὁ δὲ κύβος μ̊ κζ̅. μεθυφίσταμαι οὖν τὸ ὀρθογώνιον, & τάξας ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου ἀριθμοῦ α̅. τάσσω τῆς ὑποτεινούσης μ̊ κε̅. λείψει ἀριθμῷ α̅. μένει δὲ καὶ ἡ βάσις μ̊ β̅. ἡ δὲ κάθετος ἀριθμὸς α̅. λοιπὸν ἐστὶ τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης

ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ὑπο τὰς τῶν ὀρθῶν. γίνεται δὲ δ^ο ᾱ. μ^ο χ^ας γ ς̄ ν̄. ἔσται ἴση δ^ο ᾱ. μ^ο δ̄. ὅθεν γίνεται ὁ ς^ο μ^ο χ^ας ῑ. ὅπερ ἐζητεῖτο. ᾗ ὡφθη.

quadratus hypotenusæ æqualis sit quadratis laterum circa rectum. Fit ergo 1 Q. + 625 − 50 N. æqualis 1 Q. + 4. vnde fit ... Ad positiones. & constat.

OBSERVATIO D. P. F.

An autem alius in integris quadratus præter ipsum 25. inueniatur qui adsumpto binario cubum faciat. Id sane difficilis primo obtutu videtur disquisitionis. Certissimâ tamen demonstratione probare possum nullum alium quadratum præter 25. in integris adiecto binario facere cubum. In fractis ex methodo Bachetis supersunt infiniti, sed doctrinam de numeris integris quæ sanè pulcherrima & subtilissima est, nec Bachetus nec alius quinis cuius scripta ad me peruenerint, hactenus calluit.

IN QVAESTIONEM XIX.

TRIA hîc postulantur. Primò vt exhibeatur triangulum rectangulum in numeris rationalibus. Secundò vt area cum hypotenusa faciat quadratum. Tertiò vt ambitus trianguli, hoc est summa trium laterum, sit numerus cubus. Primùm autem, vltimum est quod curat Diophantus, æquando quadratos laterum circa rectum, quadrato hypotenusæ. Reliqua duo postulata præstat ipsis positionibus ingeniosè factis. Nam vt area cum hypotenusa faciat quadratum, posita area 1 N. ponit hypotenusam quadratum aliquem numerum vnitatum cum defectu 1. N. puta 16 − 1 N. Tum verò quia area est semissis plani sub lateribus circa rectum contenti, sequitur planum sub lateribus circa rectum esse 2 N. Quare vt habeantur ipsa latera circa rectum, sumendi duo numeri quorum, mutuo ductu fiant 2 N. Ex infinitis autem huiusmodi numeris seliguntur 1 N. & 2. quia in hypotenusa positus est 1 N. cum signo defectus, ac proinde addendo simul tria latera, elliduntur Numeri, & manet summa laterum, solus vnitatum Numerus, compositus scilicet ex quadrato illo qui positus est in hypotenusa, & ex binario qui ponitur pro altero laterum circa rectum. Cùm ergo summa hæc debeat conficere cubum, apparet necessitas secundæ positionis, qua inuestigatur quadratus qui adsumpto binario cubum creet.

Hoc sanè loco deuoluimur in æquationem complexam, in qua duæ species, duabus speciebus æquales sunt. Cùm enim 1 Q. + 2 N. + 3. æquentur 1. C. + 3 N. − 3 Q. − 1. fiunt tandem 1 C. + 1 N. æquales 4 Q. + 4. Nec verò sciri potest qua ratione huiusmodi æquationem resoluat Diophantus, cùm in libris eius qui extant, nusquam id docuerit. Certè regula generalis & perfecta hactenus ignoratur. Particularis autem quæ in hoc casu locum habet, traditur à multis, & est huiusmodi. Si 1 C. + 1 N. æquentur cuilibet Quadratorum & vnitatum numero, quorum tamen multitudo sit æqualis, fit 1 N. ipse Quadratorum, vel vnitatum numerus. Quod facilè demonstratur. Etenim vt se habet cubus ad quadratum, sic Numerus ad vnitatem. Quare & duo antecedentes simul nempe 1 C. + 1 N. se habebunt, ad consequentes simul, nempe ad 1 Q. + 1 sicut 1 N. ad 1. Quare si quatuor proportionalium sumantur secundi & quarti æquè multiplices, verbi gratia quadruplices, erit & 1 C. + 1 N. ad 4 Q. + 4. sicut 1 N. ad 4. Ac proinde si 1 C. + 1 N. ponantur æquales 4 Q. + 4. erit & 1 N. æqualis 4. Quod erat propositum.

Eadem de causa si 1 C. + 1 Q. æquentur certo Numerorum & vnitatum numero erit 1 Q. æqualis ipsi numero Numerorum vel vnitatum, ac proinde si numerus ille sit quadratus, erit solutio rationalis. Vt si 1 C. + 1 Q. ponantur æquales 9 N. + 9. fiet 1 Q. 9. & 1 N. 3. & ratio est quia 1 C. ad 1 N. se habet vt 1 Q. ad 1.

Necesse igitur fuit tam aptè fingere latus quadrati, & latus cubi, vt tandem prodirent 1 C. + 1 N. æquales quadratis & vnitatibus multitudine æqualibus, vt pote 4 Q. + 4. sed qui ratione certa id fecerit Diophantus, ita vt modus ab illo vsurpatus alijs huiusmodi quæstionibus applicari possit, non constat ex eius verbis, & verò perdifficile arbitror id diuinare. Sit enim propositum quærere quadratum, cui addendo 4. fiat cubus, quomodo quæso fingenda sunt latera quadrati & cubi, vt commoda proueniat æquatio, & solutio sit rationalis? Fateor equidem me ignorare & ei qui tale quid docuerit, non paruam habebo gratiam. Sanè quod propositum est, non est prorsus impossibile, nam non vnus, sed plures quadrati quæstioni satisfacientes possunt inueniri, quales sunt 4. & 121. quorum vtrique si adiicias 4. fiunt cubi 8. & 125. fortuita ergo videtur Diophanti operatio, nisi quis firmiora ad eam fulciendam ponat fundamenta. Et hac ratione operando vnica tantum reperitur solutio, cùm tamen quæstio sit de earum genere quæ plures solutiones admittunt.

Huic

Huic autem vltimo incommodo noſtra ſubueniet induſtria, tali expedito lemmate.

Dato quadrato qui adſumpto dato numero, cubum faciat, inuenietur alius quadratus idem præſtans.

Sit datus quadratus 25. qui adſumpto 2. cubum facit, puta 27. inueniendus eſt alius quadratus, qui præſtet idem. Fingatur eius latus 5 − 1 N. fiet quadratus 25. − 10 N. + 1 Q. cui addendo 2. fit 27. − 10 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingo 3 − tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipſius 3. nempe in 27. efficiant 10. habebo autem talem Numerorum numerum diuidendo 10. per 27. eſtque $\frac{10}{27}$. fingatur ergo latus cubi 3 − $\frac{10}{27}$ N. fiet cubus 27 − 10 N. + $\frac{100}{27}$. Q. − $\frac{1000}{729}$. C. æqualis 27 − 10 N. + 1 Q. Quare tandem $\frac{100}{27}$. Q. æquantur $\frac{1000}{729}$. C. & fit 1 N. 4 $\frac{46}{271}$. eſt ergo latus quæſiti quadrati 4 $\frac{46}{271}$. ipſe quadratus $\frac{1}{73441}$. cui adiiciendo binarium fit cubus $\frac{147457}{73441}$. vel in minimis $\frac{2007121}{1000000}$. cuius latus $\frac{1271}{1000}$.

Simili ratione ſi datus ſit quadratus 4. cui adiiciendo 4. fit cubus 8. inuenietur alius quadratus idem præſtans. Etenim pone latus quadrati 2 + 1 N. fiet quadratus auctus quaternario 8 + 4 N. + 1 Q. æquandus cubo. Cuius latus fingatur 2 + tot Numeris, vt ducti in triplum quadrati ipſius 2. puta in 12. faciant 4. erit ergo numerorum numerus $\frac{1}{3}$. & fingatur latus cubi 2 + $\frac{1}{3}$ N. fietque cubus 8 + 4 N. + $\frac{1}{3}$. Q. + $\frac{1}{27}$ C. æqualis 8 + 4 N. + 1 Q. & tandem $\frac{1}{3}$ Q. æquatur $\frac{1}{27}$ C. & fit 1 N. 9. Eſt ergo latus quadrati 11. ipſe quadratus 121. qui adſumpto 4. facit cubum 125.

Hic autem poſui latus quadrati 2 + 1 N. non autem 2 − 1 N. quia ſi poſuiſſem 2 − 1 N. oportuiſſet latus cubi poni 2 − $\frac{1}{3}$ N. Tuncque in cubo tam Numerorum quàm cuborum numeri affecti fuiſſent ſigno minoris. Quare vt in præcedenti exemplo, vnitates quidem & Numeri ſe mutuò eliſiſſent. At $\frac{1}{27}$ C. in alteram æquationis partem conceſſiſſet ob appoſitum ſignum defectus. Quamobrem 1 Q. + $\frac{1}{27}$ C. manſiſſent æquales $\frac{1}{3}$ Q. Quod eſt impoſſibile, quia 1 Q. maior eſt quàm $\frac{1}{3}$ Q. Ad ſimile vitandum incommodum contraria ratione poſitiones inſtitui in ſuperiore exemplo, quia videlicet 1 Q. minor erat quàm $\frac{121}{125}$ Q. vnde etiam ſi dato quadrato 121. alium quæreremus qui adſumpto 4. faceret cubum, poneremus latus quadrati 11 − 1 N. & cubi 5 − $\frac{11}{3}$ N. & inueniremus adhuc alium quadratum diuerſum ab ipſis 4. & 121.

Porrò examen operationis Diophanti tale eſt, fit 1 N. $\frac{41}{40}$. Ergo ſit hypotenuſa quæſiti trianguli 12. $\frac{41}{40}$. baſis 2. cathetus 12 $\frac{9}{40}$. Eſtque ſumma laterum cubus 27. At hypotenuſa cum area quæ eſt 12. $\frac{9}{40}$. facit quadratum 25.

QVAESTIO XX.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito numero hypotenuſæ faciat cubum; At numerus circumferentiæ ſit quadratus. Si perinde vt in præcedente areæ numerum conſtituamus 1 N, numerum vero hypotenuſæ vnitatum aliquot cubicarum − 1 N. eò deuenitur vt quærendum ſit quis cubus adſcito binario faciat quadratum. Ponatur cubi latus 1 N. − 1. fit cubus adiecto binario 1 C. + 3 N. + 1 − 3 Q. æquandus quadrato. Eſto quadrato à latere 1 $\frac{1}{4}$ N. + 1. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. erit igitur cubi latus $\frac{1}{4}$. Ipſe verò cubus $\frac{1}{64}$. Pono rurſus areæ numerum 1 N. Hypotenuſam verò $\frac{1}{64}$. 1 N. Habemus autem & baſim 2. cathetum verò 1 N. & ſi æquemus quadratum hypotenuſæ, quadratis laterum circa rectum, inueniemus numerum rationalem.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῷ ἰμβαδῷ αὐτῷ περιεχόμενος τὸν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ, πυρῆνα κύβου, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ᾖ τετράγωνος. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως τῷ πρὸ τούτου τάξωμεν τὸν ἐν τῷ ἰμβαδῷ ἀριθμὸν α̅ τὸν δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μονάδων κυβικῶν λείψει ἀριθμῷ α̅. ἔρχεται ζητεῖν τὶς κύβος μ̅ᾱ μονάδων β̅. πλευρὰ τετράγωνος. τετράκις ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ἀριθμῷ α̅. λείψει μονάδος α̅. ὁ κύβος γίνεται μ̅ᾱ μονάδων β̅ κύβου α̅. ις̅ γ̅. μ̅ᾱ α̅. λείψει δ̅ᾱ γ̅. παῦται ἴσα τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς̅ α̅. α̅ ς̅. μ̅ᾱ α̅. καὶ γίνεται ὁ ς̅ μ̅ᾱ κα̅. ἴσται ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ ιζ̅. αὐτὸς ἄρα ἴσται ῥπη̅ ξ̅. τάσσω πάλιν τὸν ἐν τῷ ἰμβαδῷ ς̅ α̅. τὼ δὲ ὑποτεινούσαν μ̅ῶ ῥπη̅ ξ̅. λείψει ς̅ α̅. ἔχομεν δὴ ἑκατέρων τὼ βάσιν μ̅ῶ β̅, τὼ δὲ κάθετον ς̅ α̅. καὶ ἐπεὶ ἰσώσαμεν τὸν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνον πρὸς ἀπὸ τῆς ἑκατέρων τῶν ὀρθῶν τετραγώνους, διῃρήσαμεν τὸν ἀριθμὸν ῥπτ̅ὸν.

IN QVAESTIONEM XX.

PARVM differt huius quæstionis tractatio, à præcedentis tractatione, vt satis indicant ipsa Diophanti verba. Pendet itaque solutio à lemmate illo, quo quæritur cubus qui adiecto binario, quadratum faciat. Vbi subtili sanè artificio ponitur cubi latus 1 N. − 1. vt in cubo reperiatur − 1. cui adiiciendo binarium fit + 1. Aliter enim, nisi in cubo binario aucto numerus vnitatum esset quadratus, non posset æquari quadrato. Ponitur autem latus quadrati 1 + tot numeris qui sint dimidium Numerorum in cubo contentorum, puta $\frac{1}{2}$ N. dimidium de 3. N. vt scilicet duplum illorum æquet Numeros in cubo contentos, sic cùm & vnitates & Numeri multitudine æquales vtrimque se mutuo elidant, manet æqualitas inter cubos & Quadratos, puta inter 1 C. & $\frac{3}{4}$ Q. Porrò accidit vt cubo adiiciendo binarium, fiat quadratus, quia 2. componitur ex cubo & ex quadrato. Quare licet pulchrum problema vniuersaliter proponere.

Dato quouis numero composito ex cubo, & ex quadrato, reperietur cubus qui adsumpto dato numero, quadratum faciat.

Sit datus 17. compositus ex cubo 8. & ex quadrato 9. quæro cubum qui adsumpto 17. faciat quadratum. Ponatur latus cubi 1 N. − 2. fiet cubus 1 C. + 12 N. − 6 Q. − 8. cui adiiciendo 17. fit 1 C + 12 N. − 6 Q. + 9. æquandus quadrato; cuius latus, pono 3 + tot numeris quorum duplum per 3. multiplicatum, hoc est quorum sextuplum æquet 12 N. in cubo contentos. Fingetur ergo latus quadrati 3 + 2 N. fiet quadratus 9 + 12 N. + 4 Q. æqualis 1 C. + 12 N. − 6 Q. + 9. & fit 1 N. 10. Est ergo cubi latus 8. cubus 512. cui adiiciendo 17. fit 529. quadratus à latere 23. Idemque in similibus eadem semper ratione perficietur. Nam semper latus cubi ponetur 1 N. − latere cubi, ex quo datus numerus componitur, & sic in cubo huiusmodi binomij reperietur earumdem vnitatum cubus affectus signo minoris, cui addendo datum numerum, fiet vnitatum numerus æqualis quadrato, ex quibus datus numerus componitur.

Posset autem lemma Diophanti mutata paulum operatione æquè benè solui. Ponatur latus quadrati 1 N. + 1. erit ipse quadratus 1 Q. + 2 N. + 1. vnde auferendo binarium, manet 1 Q + 2 N. − 1. æquandus cubo, cuius latus fingam à tot Numeris − 1. vt eorum triplum æquet 2 N. positos in quadrato. Fingam ergo latus cubi $\frac{1}{3}$ N. − 1. & fiet 1 N. $\frac{2}{3}$. Quare latus quadrati vt prius erit $\frac{5}{3}$. latus cubi $\frac{1}{3}$. superest vt integram quæstionis solutionem exhibeamus, quam omisit Diophantus ob molestas fractiones. Quadratus hypotenusæ fit $\frac{2401}{729}$. + 1 Q. − $\frac{196}{81}$. N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta 1 Q. + 4. Quare tandem manent $\frac{2401}{729}$. N. æquales $\frac{2401}{1458}$ Q. & fit 1 N. $\frac{2401}{1701}$ æqualis areæ, itemque vni laterum circa rectum, alterum verò est 2. hypotenusa denique $\frac{5764801}{2893401}$. quæ addita areæ facit cubum $\frac{4802}{1701}$. At summa laterum est $\frac{4802}{1701}$ quadratus à latere $\frac{49}{21}$.

QVÆSTIO XXI.

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅτου ὁ ἐν τῷ ἰσοπλαθῷ αὐτοῦ περιλαβὼν τὸν ὀρθὴν τρίγωνον. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἦ κύβος. τετάχθω τὸ ὀρθογώνιον ὑπὸ ς̄ καὶ ἑνός. ἡ δὲ ὑπὸ τῶν περὶ τὴν μείζονα αὐτοῦ, ἔστω ἡ ὑπὸ ς̄ ᾱ. ἡ δὲ ὑπὸ ς̄ ᾱ. μ̄ ᾱ, ἔσται ἄρα ἡ ὑπὸ τὰς ὀρθὰς ς̄ β̄. μ̄ ᾱ. ἡ δὲ βάσις δ̄ β̄. ς̄ β̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ̄ β̄. ς̄ β̄. μ̄ ᾱ. λοιπὸν ἵσα τῷ περιμέτρῳ τῷ κύβῳ. τὸν δὲ ἐν τῷ ἰσοπλαθῷ μιᾷ μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετράγωνον. γίνεται δὲ ἡ μὲν περίμετρος δ̄ δ̄ ς̄ ς̄. μ̄ β̄. ἴσοι κύβῳ. ἐὰν ἴσοι συνθῶσιν ἀριθμοί. περίκειται δὲ ὑπὸ ς̄ δ̄. μ̄ β̄. ἡ δὲ ς̄ ᾱ, μ̄ ᾱ. ἐὰν οὖν ἑκάστου πλευρὰν μερισωμεν ἀπὸ ς̄ ᾱ. μ̄ ᾱ. ἔξομεν τῷ περιμέτρῳ αὐτοῦ ς̄ δ̄. μ̄ β̄. ἴσον κύβῳ, λοιπὸν ἄρα ἡ ἐν τῷ ἰσοπλαθῷ αὐτοῦ μιᾷ μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ποιεῖν τετρά-

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adscito vno laterum circa rectum, faciat quadratum, at circumferentiæ numerus sit cubus. Statuatur triangulum ab aliquo numero indefinito, & ab alio qui cum vnitate superet. Esto itaque ab 1 N. & ab 1 N. + 1. Erit igitur cathetus 2 N. + 1. Basis 2 Q. + 2 N. hypotenusa 2 Q. + 2 N. + 1. Restat vt circumferentia fit cubus, & numerus areæ cum vno laterum circa rectum faciat quadratum. Fit autem circumferentia 4 Q. + 6 N. + 2. æqualis cubo. Et est numerus compositus quem metitur 4 N. + 2. per 1 N. + 1. si ergo vnumquodque latus partiamur per 1 N. + 1. habebimus circumferentiam 4 N. + 2. æqualem cubo. Restat igitur vt areæ numerus adscito vno laterum circa rectum faciat qua-

dratum. Fit autem areæ numerus 2 C. + 3 Q. + 1 N. sub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. vnum verò laterum circa rectum 2 N. + 1. sub denominatione partis 1 N. + 1. & si hæc duo ad eiusdem denominationis partem reducamus, fiunt 2 C. + 5 Q. + 4 N. + 1. sub denominatione partis 1 Q. + 2 N. + 1. & si partiamur in denominatorem partis fiunt 2 N. + 1. Ita vt duo hæc composita faciant 2 N. + 1. æqualia quadrato. Quærebamus autem etiam 4 N. + 2. æqualia cubo. Igitur eò deducta res est, vt inueniamus cubum quadrati duplum. Est autem 8. respectu 4. sint igitur 4 N. + 2. æquales 8. & fit 1 N. $1\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{11}{4}$. & manet.

γωνον. γίνεται δὴ ὁ μὲν ἐν τῇ ἐμβαδῷ αὐτοῦ $\overline{\kappa^{o}}\ \overline{\beta}$. $\Delta^{o}\ \overline{\Gamma}$. $\varsigma^{o}\ \overline{\alpha}$. ἐν μορίῳ $\Delta^{o}\ \overline{\alpha}$. $\varsigma\tilde{\varsigma}\ \overline{\beta}$. $\mu^{o}\ \overline{\alpha}$. ὁ δὲ μίαν τὴν ὑπὸ τὴν ὀρθὴν $\varsigma\tilde{\varsigma}\ \overline{\beta}\ \mu^{o}\ \overline{\alpha}$ ἐν μορίῳ $\varsigma^{o}\ \overline{\alpha}\ \mu^{o}\ \overline{\alpha}$, καὶ ἐὰν πυθόμενοι τὰ δύο εἰς τὸ αὐτὸ μόριον γίνονται $\overline{\kappa^{o}}\ \overline{\beta}$. $\Delta^{o}\ \overline{\Gamma}$. $\varsigma\varsigma^{ov}\ \overline{\Delta}$. $\mu^{o}\ \overline{\alpha}$. ἐν μορίῳ $\Delta^{o}\ \overline{\alpha}\ \varsigma\tilde{\varsigma}\ \overline{\beta}\ \mu^{o}\ \overline{\alpha}$. ἐὰν ἓν μερίσωμεν τοῦτο τὸ μόριον, γίνεται $\varsigma\varsigma^{ov}\ \overline{\beta}\ \mu^{o}\ \overline{\alpha}$. ὥστε τὰ δύο συναμφότερα ποιεῖ $\varsigma\varsigma^{ov}\ \overline{\beta}\ \mu^{o}\ \overline{\alpha}$. ἵνα τετραγώνῳ. ἐζητεῖτο δὲ καὶ $\varsigma\varsigma^{ov}\ \overline{\Delta}\ \mu^{o}\ \overline{\beta}$. ἴσους εἶναι κύβῳ. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ εὑρεῖν κύβον τετραγώνου διπλασίονα ἵνα ᾖ ὁ $\overline{\eta}$. μονάδων $\overline{\Delta}$. ἵστω ἄρα $\varsigma\varsigma^{ov}\ \overline{\Delta}\ \mu^{o}\ \overline{\beta}$. ἴσοι $\mu^{o}\ \overline{\eta}$. καὶ γίνεται ὁ $\varsigma^{o}\ \overline{\alpha}$. $\overline{\alpha^{ov}}$. ἵνα ἄρα ὀρθογώνιον $\overline{\eta}$ $\overline{\eta}$. $\overline{\varsigma\varsigma^{ov}}$. καὶ μένει.

IN QVAESTIONEM XXI.

PVLCHERRIMVM problema, & raræ subtilitatis, quod vt perfectè explicetur aliqua sunt supponenda, nimirum.

Primò datis duobus numeris planus bis sub ipsis contentus, summa quadratorum, & interuallum eorundem, æquantur simul producto ex duplo summæ numerorum in maiorem numerum.

C 14.
A 3. B 4.
D 9. E 16.
F 25. G 7.
H 24.

Sint dati duo numeri A minor B maior, & duplum summæ illorum esto C. at quadrati eorundem D. E. quorum summa F. interuallum G. Ac demum sit H. duplum plani sub A. B. contenti. Dico tres numeros F. G. H. simul, æquari producto ex C in B. Quoniam enim F est summa duorum D E. & G eorundem interuallum, ' erunt F G simul æquales duplo maioris E. Cum ergo ex B in seipsum fiat E, patet ex B. in duplum sui, fieri numerum æqualem ipsis F G. simul. At ex eodem B. in duplum ipsius A fit H. Ergo ex B. in duplum summæ ipsorum A B. hoc est in C. fit numerus æqualis tribus F. G. H. simul. Quod erat intentum. 2. 1. *perism.*

Secundò. Datis duobus numeris vnitate distantibus, interuallum quadratorum ab ipsis æquatur summæ datorum numerorum. Etenim ' ex interuallo numerorum, in summam ipsorum, fit interuallum quadratorum. Quamobrem si interuallum numerorum sit vnitas, patet ex vnitate in summam numerorum, produci summam ipsam numerorum, pro interuallo quadratorum. 4. 2. *perism.*

Tertiò. Datis duobus numeris vnitate distantibus, si maiori eorum addatur planus sub ipsis contentus, fiet quadratus maioris. Sint enim duo numeri A B. A C. quorum interuallum sit vnitas B C. dico si plano sub A B. A C. addatur A C. produci quadratum ipsius A C. Etenim ' quadratus ipsius A C. æquatur planis sub A C. A B. & sub A C. B C. contentis. At planus sub A C. & sub vnitate B C. æquatur ipsi A C. ergo A C. cum plano sub A C. A B. æquatur quadrato ipsius A C. Quod erat demonstrandum.

A . . . B. C.

2. *secundi.*

Quartò. In similibus triangulis si area primi multiplicetur per quadratum denominatoris proportionis laterum, producitur area secundi. Etenim ' areæ sunt in duplicata ratione laterum sed denominator rationis quæ alterius sit duplicata, est quadratus denominatoris prioris rationis, ' quoniam & quadrati sunt in ratione duplicata laterum. Igitur patet propositum. 2. 3. *perism.* 11. *elem.*

His positis nullo negotio explicatur operatio Diophanti. Nam fingatur triangulum ab 1 N. & 1 N. + 1. est hypotenusa summa quadratorum, nimirum 2 Q. + 2 N. + 1. Alterum latus est interuallum eorundem quadratorum, nempe 2 N. + 1 Alterum denique est duplum producti, puta 2 Q. + 2 N. Quorum summa fit 4 Q. + 6 N. + 2. quæ si diuidatur per 1 N. + 1. maiorem numerorum à quibus effictum est triangulum, fiet quotiens duplum summæ numerorum, puta 4 N. + 2. per primum suppositum. Vt igitur numerus æquandus cubo sit simplicior, & expeditior æquatio, ab inuento triangulo formatur aliud simile, diuidendo scilicet singula illius latera per 1 N. + 1. sic enim summa trium laterum fit 4 N. + 2. æquanda cubo.

Area verò per quartum suppositum, fiet si area prioris trianguli puta 2 C. + 3 Q. + 1 N. diuidatur per quadratum ipsius 1 N. + 1. videlicet per 1 Q. + 2 N. + 1. hinc est quod huiusmodi aream esse ait Diophantus $\frac{\text{N}^{\text{Q}}+\text{N}}{\text{Q}+\text{N}+1}$. cui vt addatur alterum latus, nempe $\frac{\text{N}^{\text{Q}}+1}{\text{N}+1}$. omnia facienda eiusdem denominationis, ducendo scilicet 2 N. + 1. in 1 N. + 1. vnde fit 2 Q. + 3 N. + 1. quo ad-

dito ſupradictæ areæ ſub denominatione eiuſdem partis, fit $\frac{2\,Q. + 3\,N. + 1}{2\,N. + 1}$. Hæc autem fractio reducitur ad integros, quia denominator metitur numeratorem. Quod ita probo. Numerator componitur ex duobus numeris, puta ex 2 C. + 3 Q. + 1 N. area prioris trianguli, & ex 2 Q. + 3 N. + 1. qui factus eſt ex 2 N. + 1. in 1 N. + 1. Prior itaque numerus, nempe area prioris trianguli, fit ex interuallo quadratorum à numeris à quibus formatum eſt triangulum, in planum ſub ipſis numeris contentum, hoc eſt ex 2 N. + 1. in 1 Q. + 1 N. Poſterior vero numerus fit ex eodem interuallo quadratorum 2 N. + 1. in maiorem numerorum à quibus effictum eſt triangulum, puta in 1 N. + 1. fiet ergo totus numerator ex 2 N. + 1. in ſummam ipſorum 1 Q. + 1 N. & 1 N. + 1. At cum 1 Q. + 1 N. ſit planus contentus ſub numeris vnitate diſtantibus, & horum maior ſit 1 N. + 1. patet per tertium ſuppoſitum, horum ſummam æquari quadrato ipſius maioris, puta 1 Q. + 2 N. + 1. Quamobrem conſtat ſupradictum numeratorem produci ex 2 N. + 1. in ipſum denominatorem 1 Q. + 2 N. + 1 Quare diuiſo numeratore per denominatorem, fiet quotiens 2 N. + 1. æquandus vtique quadrato, eſt autem hic quotiens ſubduplus ad priorem quotientem 4 N. + 2. qui æquandus eſt cubo. Etenim 4 N. + 2. vt ſuprà oſtenſum eſt, eſt duplum ſummæ numerorum 1 N. & 1 N. + 1. at 2 N. + 1. eſt interuallum quadratorum ab ipſis. Porro interuallum quadratorum æquatur ſummæ numerorum per ſecundum ſuppoſitum, quia numeri vnitate differunt. Ergo duplum ſummæ numerorum eſt dùplum interualli quadratorum.

Iam igitur cùm habeamus 4 N. + 2. æquandum cubo, & 2 N. + 1. æquandum quadrato, patet quærendum eſſe cubum quadrati duplum, cuiuſmodi infinitos reperiri poſſe docuimus ad primam huius. Sumit Diophantus cubum 8. & quadratum 4. æquatque 4 N. + 2 ipſi 8. vel 2 N. + 1. ipſi 4. & fit vtrobique 1 N. $\frac{1}{2}$. Quare latera prioris trianguli fiunt $\frac{3}{2}$. $\frac{5}{2}$. $\frac{4}{2}$. ſed cùm omnia diuidi debeant per 1 N. + 1. puta per $\frac{1}{2}$. fiunt vtique quæſiti latera trianguli $\frac{3}{1}$. $\frac{5}{1}$. $\frac{4}{1}$. eſtque area $\frac{12}{1}$. cui addendo latus $\frac{4}{1}$. fit quadratus $\frac{16}{1}$. ſeu 4. At circumferentia eſt $\frac{8}{1}$. ſeu 8. cubus.

Cæterùm poſſet prius triangulum fingi etiam à 2 N. & 2 N. + 1. vel à 3 N. & 3 N. + 1. & ſic à quolibet Numerorum numero, & altero, vnitate illum ſuperante. Sed eadem ſemper ſolutio continget, ſi cubus & quadratus quibus cum vltima æquatio inſtituitur, iidem ſemper ſumantur. Poſſunt autem alij cubi & quadrati infiniti reperiri in eadem ratione 2. ad 1. per Canonem traditum ad primam huius, dum obſeruetur, cubum maiorem eſſe debere quàm 2. & quadratum maiorem eſſe oportere quàm 1. quia ſcilicet cubus æquandus eſt 4 N. + 2. & quadratus æqualis faciendus 2 N. + 1. Id autem contingit, ſi operando per dictum Canonem, ſumatur quilibet cubus minor vnitate, per quem diuidatur 2. denominator rationis datæ. Verbi gratia ſi ſumas $\frac{1}{2}$. & per eum diuidas 2. fiet 16. latus quadrati quæſiti, nam quadratus eſt 256. cuius duplum 512. eſt cubus. Vnde apparet ex hoc capite quæſtionem infinitas recipere ſolutiones. Nam ſi loco ipſorum 8. & 4. ſumas 512. & 256. fiet 1 N. $\frac{511}{512}$. & diuerſa continget ſolutio, vt potes experiri.

QVÆSTIO XXII.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν τῇ ἐμβαδῷ αὐτῆ περιλαβὼν τὸν ἕνα τῆν περὶ τὴν ὀρθὴν ἢ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτῆ ἢ τετράγωνος. πάλιν ἐπὶ τῆ αὐτῆ ἀγωγῆ χρησώμεθα τῆ πρὸ τούτου ἀπάγεται εἰς τὸ ςς$^{\omega\iota\varsigma}$ δ$^{\tilde{\varsigma}}$. μ$^{\tilde{\iota}}$ β$^{\tilde{\varsigma}}$. ποιεῖ ἴσα τετραγώνῳ, ἐ.ςς$^{\omega\iota\varsigma}$ β$^{\tilde{\varsigma}}$. μ$^{\tilde{\iota}}$ α$^{\tilde{\varsigma}}$. ἴσα κύβῳ. ἐ γίνεται ζητεῖν τετράγωνον κύβου διπλασίονα. ἴσον ις$^{\tilde{\varsigma}}$. ᾧ ἢ$^{\tilde{\varsigma}}$. ἐ πάλιν ἰσάζομεν μ$^{\tilde{\iota}}$ ις$^{\tilde{\varsigma}}$. ἀριθμοῖς δ$^{\tilde{\varsigma}}$. μ$^{\tilde{\iota}}$ β$^{\tilde{\varsigma}}$. ᾧ γίνεται ὁ ς$^{\tilde{\iota}}$ μ$^{\tilde{\iota}}$ γ$^{\tilde{\varsigma}}$. α$^{\tilde{\varsigma}}$ ς$^{\tilde{\varsigma}}$. ἴσαι ἄρα τὸ ὀρθογώνιον. ις$^{\tilde{\varsigma}}$ ι$^{\tilde{\varsigma}}$. ξγ$^{\tilde{\varsigma}}$ ι$^{\tilde{\varsigma}}$. ξϊ ι$^{\tilde{\varsigma}}$.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus areæ adſcito vno laterum circa rectum, ſit cubus, at circumferentiæ numerus ſit quadratus. Si rurſus eodem vtamur ductu quo in præcedente eo res deueniet, vt 4 N. + 2. æquanda ſint quadrato, & 2 N. + 1. æquanda cubo. Et oportet inuenire quadratum cubi duplum. Eſt autem 16. reſpectu 8. Et rurſum æquabimus 16. & 4 N. + 2. & fit 1 N. 3 $\frac{1}{2}$. Erit ergo rectangulum $\frac{15}{2}$. $\frac{8}{2}$. $\frac{17}{2}$.

IN QVAESTIONEM XXII.

OMNIA ex dictis ad præcedentem ſunt manifeſta. Et vti potes Canone ad primam huius tradito ad inueniendum cubos infinitos quadrati ſubduplos, diuidendo ſcilicet $\frac{1}{2}$ denominatorem rationis ſubduplæ per aliquem cubum habebis latus quadrati quæſiti. Obſeruandum autem hîc eſt, vt cubus per quem diuidetur $\frac{1}{2}$. ſit minor vnitate, vt proueniat quadratus maior binario. Verbi gratia ſi diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{8}$. fiet quotiens 4. latus quæſiti quadrati 16. quo vtitur Diophantus. Quod ſi diuidas $\frac{1}{2}$. per $\frac{1}{27}$. fiet quotiens $\frac{27}{2}$. cuius quadratus $\frac{729}{4}$. duplus eſt cubi $\frac{729}{8}$. & ſic de alijs.

Cæterum tam hæc quæstio, quàm præcedens extendi potest ad quaslibet duas species proximas, vel etiam ad non proximas, dum non sint quadratæ, quia vt monuimus ad secundam huius, datis duabus speciebus non quadratis, licet vnam reperire alterius duplam. Itaque poterunt eadem facilitate solui problemata quæ sequuntur.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit cubus, area verò cum altero laterum circa rectum faciat quadratoquadratum. vel è conuerso; vt ambitus sit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum faciat cubum.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratoquadratus, area verò cum altero laterum, faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratocubus, area verò cum altero laterum faciat cubocubum. vel è conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit quadratus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel é conuerso.

Item.

Inuenire triangulum rectangulum, vt ambitus eius sit cubus, area verò cum altero laterum faciat quadratocubum. vel è conuerso.

Et sic de alijs.

QVÆSTIO XXIII.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt circumferentiæ numerus sit quadratus, & adsumens areæ numerum, faciat cubum. Fingatur rectangulum ab 1 N. & 1. fiet vnum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q. — 1. hypotenusa verò 1 Q. + 1. Et oportet quærere 2 Q. + 2 N. æquales quadrato. & 1 C + 2 Q. + 1 N. æquales cubo. Et sanè 2 Q + 2 N. conficere quadratum, facile est. Nam si binarium diuiseris per quadratum binario multatum, inuenies 1 N. Oportet autem eum talem inueniri, vt compositus ex cubo ipsius, duplo quadrati eiusdem, & ipsomet numero, faciat cubum. Est ergo 1 N. ex binario diuiso per 1 Q — 2. At cubus fit 8. sub denominatione partis quæ sit cubus à latere 1 Q. — 2. & duo quadrati fiunt 8. sub denominatione partis quæ quadratus est à latere 1 Q. — 2. Ipse verò numerus est 2. sub denominatione partis 1 Q. — 2. & si omnia ad eandem partem reducantur, fiunt 2 QQ. sub denominatione partis, quæ est cubus à latere 1 Q. — 2. Et est pars cubica. Oportet ergo vt & 2 QQ. æquentur cubo. & omnia per 1 C. diuidantur, fiunt 2 N. æquales cubo. Et si ponamus æquales vnitatibus cubicis, inuenietur 1 N. cubi alicuius dimi-

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν αὐτῷ περιέχῃ ἀυτῷ ἡ περίμετρος, καὶ προσλαβὼν τὸ ἐν τῇ ἐμβαδῷ αὐτῷ, ποιῇ κύβον. πεπλάσθω τὸ ὀρθογώνιον ἀπὸ ς̄ ᾱ μ̄ ᾱ. γίνεται μία μὲν περὶ τὴν ὀρθὴν ς̄ ᾱ, ἑτέρα δὲ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ς̄ β̄. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ̄ ᾱ. μ̄ ᾱ καὶ γίνεται ζητεῖν δ̄ β̄ ς̄ μ̄ β̄. ἴσους τετραγώνῳ, καὶ κ̄ ᾱ δ̄ β̄ ς̄ ᾱ. ἴσα κύβῳ. καὶ τὸ μὲν δ̄ β̄ ς̄ μ̄ β̄. κατασκευάζειν τετράγωνον ῥᾴδιόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δυάδα μερίσας εἰς τετράγωνον ποιεῖ δυάδα, μερισθεὶς ὁ ς̄ ᾱ. ἀλλὰ δεῖ ποιῆσαι μερίσασθαι, ὥστε τὸ ἀπ' αὐτοῦ κύβον, καὶ δὶς τὰς ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνους, καὶ αὐτὸν συναμφότερον, ποιεῖν κύβον. ἔστι οὖν ὁ ς̄ ὁ ἐκ δυάδος μεριζόμενος ἐπὶ δύναμιν ᾱ γ̄ μ̄ β̄. ὁ δὴ κύβος γίνεται μ̄ η̄ ἐν μορίῳ τῷ ὑπὸ δ̄ ᾱ. λείπει μ̄ β̄ κύβῳ, καὶ οἱ δὶς ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνοι, γίνονται μ̄ η̄. ἐν μορίῳ τῷ ὑπὸ δ̄ ᾱ λείπει μ̄ β̄ τετραγώνῳ. αὐτὸς δὴ μ̄ β̄ ἐν μορίῳ δυναμένου ᾱ λείπει μ̄ β̄. καὶ πάντα δεῖ τὸ αὐτὸ μόριον, γίνονται δ̄ δ̄ β̄ ἐν μορίῳ τῷ ὑπὸ δ̄ ᾱ. γ̄ μ̄ β̄ κύβῳ. ἔστι τὸ μόριον κυβικόν. ἔστω οὖν καὶ δ̄ δ̄ β̄. ἴση κύβῳ. καὶ πάντα ἑξῆς κύβοι ᾱ. γίνονται ς̄ β̄. ἴσοι κύβῳ. καὶ ἐπεὶ τάξωμεν ἴσα μοναῖς κυβικαῖς, διαιρεῖται ὁ ς̄ κύβου πρὸς τὸ ἥμισυ. ἔστω ὁ κύβος μ̄ η̄. γίνεται ἄρα ὁ ς̄ τούτου τὸ ἥμισυ μ̄ δ̄. καὶ ὁ τετράγωνος ἔστι μ̄ ις̄.

τάσω ἐν δυνάμεσι, καὶ γίνονται δῡ ις̄. ἴσα δῑ β̄ ϛς̄ῑ β̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ α̃ ϛ̄. ὁ ἓξ τετράγωνος γίνεται α̃ ϛ̄ϛ̄. καὶ δεῖ ἀπὸ τούτου ἀφῃρεῖν μῑ α̃. ἐπεὶ ὑπερ ἡ μία τῆς πλευρᾶς τῶν ὁρθίων ἐστὶ δῡ α̃ λείψει μῑ α̃. καὶ ἀπάγεται εἰς τὸ ζητῆσαι κύβον, ὅπως τὸ τέταρτον τῆς ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου μεῖζον ᾖ μῑ β̄. ἐλάσσω δὲ μῑ δ̄. καὶ ἐπὶ τάξεως αὐτὸν ϰ̄ α̃. ζητήσομεν κυβοκύβου α̃ ϡ̄ϛ̄. μείζονα μὲν μονάδων β̄. ἐλάσσονα δὲ μῑ δ̄. ὁ ἄρα κυβόκυβος μείζων μὲν μῑ η̄. ἐλάσσων δὲ μῑ ις̄. ἴσα δὲ τὰ ψκδ̄ ἐϡ̄ϛ̄. ὥστε ὁ κύβος ϰ̄ζ̄ ἐ̄. τάσσω οὖν ϛ̄ϛ̄ῑ β̄. ἵπου μῑ ϰ̄ζ̄ ἐ̄. καὶ γίνεται ὁ ϛ̄ ϰ̄ζ̄ ϡ̄ϛ̄ῑ. ἡ δύναμις ψκδ̄ ϡ̄ϛ̄ῑ. καὶ ἐὰν δυάδα μερίσωμεν εἰς τὸν τούτου δυπλασίονα, δώσομεν τὸν ϛ̄ φιδ̄ ϡ̄ϛ̄ῑ. καὶ ἔχομεν ἀπὸ τῆς ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου, ἄρα μονάδα α̃.

dium. Esto cubus 8. Fit ergo 1 N. huius dimidium, nempè 4. cuius quadratus est 16. Statuo in quadratis, & fiunt 16 Q. æquales 2 Q. + 2 N. & fit 1 N. $\frac{1}{2}$. At quadratus fit $\frac{1}{4}$. Et oportet ab hoc auferre 1. Quandoquidem vnum laterum circa rectum est 1 Q. − 1. Quamobrem res eò deducitur, vt quærere opus sit cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. Et si eum ponamus 1 C. quæremus $\frac{1}{2}$ C C. maiorem quidem quàm 2. minorem verò quàm 4. Ergo 1 C C. maior est quàm 8. minor quàm 16. Talis est $\frac{729}{64}$. Ergo cubus $\frac{27}{8}$. Pono ergo 2 N. æquales $\frac{27}{8}$ & fit 1 N. $\frac{27}{16}$. Quadratus $\frac{729}{256}$. Et si binarium diuidamus per hunc binario multatum, inueniemus 1 N. $\frac{512}{665}$. & poterit ab illius quadrato vnitas auferri.

IN QVAESTIONEM XXIII.

TOTA operatio Diophanti sic habet. Fingatur triangulum ab 1 N. & ab 1. erit hypotenusa 1 Q. + 1. alterum laterum 1 Q. − 1. alterum verò 2 N. Quare ambitus siue summa trium laterum, erit 2 Q. + 2 N. æquanda quadrato. Area verò est 1 C. − 1 N. cui si adiiciatur ambitus, fit 1 C. + 2 Q. + 1 N. æquandus cubo. Et quidem facilè est æquare quadrato 2 Q. + 2 N. si ad hoc solùm respiciamus, nam poterit æquari cuilibet quadratorum numero quadrato maiori quàm 2. & fiet valor Numeri, ab huiusmodi quadrato auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. Talis autem debet esse valor Numeri, vt per eum resoluendo hypostases 1 C. + 2 Q. + 1 N. inueniatur cubus. Quare apparet necessitas secundæ operationis, qua quæritur quadratus, qui multatus binario, & diuidens binarium, det quotientem, cui adiiciendo suum cubum, & duplum sui quadrati, fiat cubus.

In secunda igitur operatione, ponitur quadratus quæsitus 1 Q. vnde auferendo 2. & per residuum diuidendo 2. fit $\frac{1}{2}$ Q. − 1. cuius cubus est $\frac{1}{8}$ C. − $\frac{3}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ Q Q. − $\frac{1}{8}$. duplum autem quadrati eiusdem est Q Q. − Q. + 2. Quare vt hæc omnia simul addantur reducantur ad maiorem denominationem, & $\frac{1}{2}$ Q. − 1. fiet $\frac{1}{8}$ C. − $\frac{3}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ Q Q. − $\frac{1}{8}$. At $\frac{1}{2}$ Q Q. − $\frac{1}{2}$ Q. + 2. fiet $\frac{1}{8}$ C C. − $\frac{1}{2}$ Q. + $\frac{1}{2}$ Q Q. − $\frac{1}{8}$. Tum omnia simul conficient $\frac{1}{8}$ C C. + $\frac{1}{8}$ C. − $\frac{5}{4}$ Q. + $\frac{1}{2}$ Q Q. − $\frac{1}{8}$. æquandus cubo, & cum denominator sit cubus, vt constat ex ipsa constructione, restat vt æquemus cubo numeratorem, puta 2 Q Q. Quod facilè fiet, nam æquari potest cuilibet numero cuborum cubico, eritque simplex æquatio, cùm sint duæ species proximæ, quæ reducetur ad primam simplicium, diuidendo omnia per 1 C. vt innuit Diophantus. Erit itaque valor Numeri in hac secunda operatione, semissis alicuius cubi, cuius vtique quadratus æquabitur 2 Q. + 2 N. At hîc duo curanda sunt. Primùm, vt huiusmodi quadratus sit maior quàm 2. vt euidens est. Secundum, vt idem quadratus talis sit, vt multatus binario, & diuidens 2. det quotientem maiorem vnitate, vt scilicet 1 Q. sit etiam maior quàm 1. eò quod vnum laterum circa rectum positum est 1 Q. − 1. vt autem in diuisione prodeat quotiens maior vnitate, oportet diuisorem minorem esse diuidendo. Igitur 1 Q. − 2. debet esse minor quàm 2. & addendo vtrimquè 2. 1 Q. debet esse minor quàm 4. Constat ergo, quod ait Diophantus, quadratum esse debere maiorem quàm 2. minorem quàm 4. Cùm autem quadrati huius latus sit semissis alicuius cubi, vt dictum est, & quadratus semissis alicuius numeri, sit quadrans quadrati totius numeri, rectè infert Diophantus, quærendum esse cubum, vt quadrans quadrati qui ab eo fit maior sit quàm 2. minor quàm 4. & ideo tertiam instituit operationem.

In tertia operatione ponit cubum quæsitum 1 C. cuius quadratus 1 C C. cuius quadrans $\frac{1}{4}$ C C. debet esse maior binario, minor quaternario. Quare 1 C C. debet esse maior quàm 8. minor quàm 16. Quomodo autem inueniri possint tales quot quis voluerit, cubocubi, constare potest ex iis quæ in simili adnotauimus ad secundam huius. Reducantur enim 8. & 16. ad fractionem cubocubicam, puta ad eam cuius denominator 64. fient $\frac{512}{64}$. & $\frac{1024}{64}$. inter quos cùm cadat cubocubus $\frac{729}{64}$. is optimè satisfaciet proposito. Porro eius latus quadratum, puta $\frac{27}{8}$. est cubus quæsitus, æquandus

2 N. vnde fit in secunda operatione 1 N. $\frac{7}{12}$. cuius quadratus $\frac{49}{144}$ nota quadrati insignitus æquabitur in prima operatione cum 2 Q. + 2 N. Reliquam operationem omisit Diophantus molestiam subterfugiens, nos in gratiam studiosorum, eam persequemur 2 Q. + 2 N. æquantur $\frac{49}{144}$ Q. & fit 1 N. $\frac{49}{288}$. per quem resoluendo primas hypostases, fiunt latera quæsiti trianguli hæc $\frac{1225}{288}$. $\frac{1201}{288}$. $\frac{337}{288}$. vel $\frac{35}{12}$. Area est $\frac{20580}{288}$. summa trium laterum est $\frac{2763}{288}$. quadratus à latere $\frac{9604}{288}$. & ipsi summæ laterum si addas aream, fit cubus $\frac{2763000763}{288}$. cuius latus $\frac{143}{12}$.

Cæterùm tota ratio diuersitatis in solutione, pendet ex eo quod 2 N. qui debet æquari cubo, potest diuersis æquari cubis, cùm infiniti reperiri possint ad hoc idonei. Nam quod attinet ad primas positiones, vix reor eas aliter institui posse, ita vt in commodam incidamus æquationem.

QVÆSTIO XXIV.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt numerus circumferentiæ sit cubus, & adscito areæ numero, faciat quadratum. Primùm inspicere oportet datis duobus numeris, quomodo inueniatur triangulum rectangulum, vt circumferentia quidem æquetur vni datorum numerorum, area vero æquetur alteri. Sunto duo numeri 12. & 7. & iniunctum sit ipsum 12. æquari circumferentiæ, ipsum verò 7. areæ. Qui fit ergo ex mutuo ductu laterum circa rectum, erit 14. Et si ponamus ipsorum alterum $\frac{1}{2}$ erit alterum 14 N. Est autem circumferentia 12. Quamobrem hypotenusa erit 12 − $\frac{1}{2}$ − 14. N. Restat vt huius quadratum, quod quod est $\frac{1}{4}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{1}{2}$ − 336 N. æquetur quadratis laterum circa rectum, hoc est $\frac{1}{4}$ + 196 Q. Communis addatur defectus, & a similibus auferantur similia, & omnia in 1 N. ducantur, fiunt 172 N. æquales 336 Q. + 24. & non possibile est hanc æquationem absolui, nisi dimidium numerorum in seipsum, detracto producto ex quadratis in vnitates, faciat quadratum. Et sunt numeri quidem compositi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ; productum vero ex quadratis in vnitates, fit ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream ducto. Quamobrem si huiusmodi dentur numeri, soluetur quæstio. Esto numerus areæ 1 N. circumferentiæ verò numerus cubus simul & quadratus, putà 64. Et vt constituatur triangulum, oportet vt dimidium compositi ex quadrato ipsius 64. & ex 4. N. ducentes in seipsum, auferamus inde quod fit octies ex quadrato circumferentiæ in 1 N. & reliquum quæramus æquale quadrato. Fiunt 4 Q + 4194304 − 24576 N. & omnium quadrans, fit 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquale quæ-

ΕΤΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἵνα ὁ ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἀριθμὸς κύβος, περισσεῶν δὲ τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτοῦ, ποιῇ τετράγωνον. πρότερον δεῖ σκοπεῖσθαι δύο ἀριθμοὺς δοθέντας δύρεῖν τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ μὲν ἐν τῇ περιμέτρῳ αὐτοῦ ἴσος ᾖ τῷ δοθέντι, ὁ δὲ ἐν τῷ ἐμβαδῷ αὐτῷ τῷ ἑτέρῳ ἴσος ἂν δύο ἀριθμοὶ ὅτι ιβ. καὶ ὁ ζ. καὶ ὑποτάξω τὸν μὲν ιβ. ἐφ' ἑαυτὸν τὸν δὲ ζ. τὸν ἐν τῷ ἐμβαδῷ. ὁ ἄρα ὑπὸ τοῦ τε ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης αὐτῷ ὅσοι μ̄ ιδ̄ ᾧ ἐστὶ τάξομαι μίαν αὐτῶν α̅. ἡ ἑτέρα ἔσται ις̄ ιδ̄. ἔστω δὴ καὶ ἡ περίμετρος αὐτῷ μ̄ ιβ̄. ἡ ἄρα ὑποτείνουσα ἔσται μ̄ ιβ̄. ϛ α̅ ᾱ. ις̄ ιδ̄. λοιπὸν ἔσται τὸν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὅπερ δεῖ α̅ ᾱ. δ̄ ρϟς̄. μ̄ ρ̄ιβ̄. λείψει κδ̄ ᾱ. ις̄ τλς̄. ἰσωθήσεται τοῖς ἀπὸ τῆς περὶ τὸν ὀρθὸν πλευρὰς, τυτέστι α̅ ῡ. δ̄. δ̄ ρϟς̄. καὶ ἀποπείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια, καὶ πάντα δὶς ἀριθμόν, γίνονται ις̄ ρο̄β̄. ἴσων δ̄ τλς̄. μ̄ κδ̄. καὶ ἐπεὶ παντὶ δύνατόν ἐστι, εἰ μὴ τὸ ἥμισυ τῶν ις̄ ἐφ' ἑαυτὸ λείψαν τὰς δυνάμεις δύναται τοὺς μονάδας, ποιῇ τετράγωνον. εἰσὶν οἱ μὲν ις̄ ἐν τῇ ἀπὸ τῆς περιμέτρου, καὶ τῷ τετραπλασίου τῷ ἐν τῷ ἐμβαδῷ. αἱ δὲ δυνάμεις δύνανται τοὺς μονάδας, ἐν τῇ ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου δύναται τὸ ἐμβαδόν. ὥστε ἐπὶ τοιούτοις δοθεῖσιν οἱ ἀριθμοὶ λύσονται τὸ ζητούμενον, ἔστω ὁ μὲν εἷς ἐν τῷ ἐμβαδῷ ἀριθμὸς α̅. ὁ δὲ ἐν τῇ περιμέτρῳ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος μ̄ ξδ̄. καὶ ἵνα συσταθῇ τὸ τρίγωνον δεῖ τῷ ἀπὸ μ̄ ξδ̄. τετραγώνου, καὶ ἀριθμοῦ δ̄. τὸ ἥμισυ ποιήσαντα ἐφ' ἑαυτὸ ἀφελεῖν τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τῆς περιμέτρου ὡς ἀριθμὸν α̅. καὶ ζητῆσαι τὰ λοιπὰ ἴσα τετραγώνῳ. γίνονται δ̄ δ̄. μ̄ ιϟ̄. ϡτδ̄. λείψει ἀριθμοῦ β̄. ϡφος̄. καὶ παντὸν τὸ τέταρτον, γίνεται δ̄

ἀ. μ̄ ρδ̄. μ̄ρος̄. λείψει ἀριθμῷ ϛρια δ̄. ἵνα τετράγωνῳ. ἵνα δὲ ϗ ἀριθμὸς ἀ. μ̄ ξδ̄. ἵνα τετράγωνῳ, καὶ ἐξισώσω σοι ἀριθμοῖ, ϗ ἡ ὑπαρχὴ, ϗ ἡ μέτρησις, ϗ τὰ λοιπὰ δῆλα.

drato. Porro autem & 1 N̄ + 64. æquatur quadrato. Et exæquentur tibi numeri; & excessus, & mensuratio, & reliqua sunt dilucida.

IN QVAESTIONEM XXIV.

OPERATIO Diophanti subtilis est, quam ipse compendiosè persequitur. Nos autem vt omnia fiant dilucida, eam fusius explicabimus. Data circumferentia trianguli 12. & area 7. constat productum ex lateribus circa rectum esse 14. sit ergo alterum latus 14. N. alterum $\frac{1}{14}$. vt eorum mutuo ductu fiat 14. vtroque igitur de summa laterum 12. detracto, relinquitur hypotenusa $12 - \frac{1}{14} - 14$ N. Quare vt triangulum exhibeatur in rationalibus, oportet huius quadratum, æquari quadratis reliquorum laterum simul iunctis. Vt autem habeamus quadratum de $12 - \frac{1}{14} - 14$ N. sumemus quadratos partium, & quod fit bis ex qualibet parte in quamlibet ex alijs, per primam secundi porismatum, fietque totus quadratus $\frac{1}{196}$ + 196 Q. + 172 − $\frac{12}{14}$. − 336 N. æqualis quadratis laterum circa rectum, puta $\frac{1}{196}$ + 196 Q. Quare tandem 172. æquatur $\frac{12}{14}$ + 336 N. & ducendo omnia in 1 N. fiunt 172 N. æquales 24 + 336 Q. Quæ est tertia compositarum. Quamobrem operando more Diophanti, vt docuimus ad trigesimam tertiam primi, oportet ducere vnitates in quadratos, hoc est 24. in 336. & productum 8064. auferre à quadrato numeri 86. qui est semissis numeri Numerorum 172. hoc est à 7396. Quod fieri nequit, quia 7396. minor est quàm 8064. Hæc igitur æquatio est impossibilis. Itaque inspiciendum est vnde prouenerint 172 N. itemque 24. & 336 Q. Quod si consideres qua ratione sumptus sit quadratus de $12 - \frac{1}{14} - 14$ N. facile omnia consequeris. Nam 172. fit ad 144. quadratum de 12. addendo 28. duplum ipsius 14. Quarecùm 14. sit duplum areæ 7. ac proinde 28. eiusdem quadruplum. Rectè dixit Diophantus 172. numerum Numerorum, componi ex quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ. At 24 est duplum circumferentiæ 12. & 336. est numerus qui fit bis ex 12. in 14. hoc est ex duplo ipsius 12. in 14. Atqui 14. est duplum areæ, & quod fit ex duplo vnius numeri in duplum alterius, idem est atque id quod fit ex quadruplo vnius in alterum. Igitur 336 fit ex quadruplo circumferentiæ 12. in aream 7. Constat ergo vnitates 24. esse duplum circumferentiæ, & numerum quadratorum 336. esse productum ex quadruplo circumferentiæ in aream. Proinde ducere vnitates in quadratos, idem est ac ducere duplum circumferentiæ in quadruplum ipsius circumferentiæ, & productum in aream. At ex duplo alicuius numeri, in quadruplum eiusdem, fit octuplum quadrati ipsius numeri. Rectè igitur infert Diophantus numerum qui fit ex quadratis in vnitates, produci ex octuplo quadrati circumferentiæ in aream.

Corrigenda igitur est prima operatio, & tales ponendi numeri areæ & circumferentiæ, vt à quadrato semissis compositi, è quadrato circumferentiæ, & ex quadruplo areæ, auferendo octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream, supersit quadratus. Idcirco ponit aream Diophantus 1 N. circumferentiam numerum cubum, puta 64. quia id requirit lex problematis, quem vult præterea esse quadratum, ob causam quam infra explicabimus. Est ergo ipsius 64. quadratus 4096. cui addendo quadruplum areæ fit 4096 + 4 N. cuius semissis 2048 + 2 N. cuius quadratus est 4 Q. + 4194304. + 8192 N. vnde si auferas octuplum ex quadrato ipsius 64. in 1 N. nempe 32768 N. superest 4 Q. + 4194304. − 24576 N. æquandus quadrato, & sumendo quadrantem more Diophanti 1 Q. + 1048576 − 6144 N. æquandus quadrato. Quoniam verò requiritur, vt & circumferentia adsumens aream, faciat quadratum, oportet etiam 1 N. + 64. æquari quadrato. Quare in duplicatam incidimus æqualitatem. Quæ vt resolui possit, imitando artificium decimæ octauæ tertij, exæquandæ prius sunt vnitates, vt tangit Diophantus. Quod quidem facilè præstari potest, quia vterque 1048576. & 64. quadratus est, vnde patet cur 64. voluerit esse quadratum, nam aliter non posset 64. ad quadratum 1048576. habere rationem quadrati ad quadratum. Necessario autem 1048576. quadratus reperitur, quia quadrans est quadrati de 2048. vt ex constructione manifestum est. Itaque quoniam denominator rationis 64. ad 1048576. est quadratus 16384. ducto hoc quadrato in 1 N. + 64. fiet hinc 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato. Inde vt prius 1 Q. + 1048576. − 6144 N. æquandus quoque quadrato. Quia verò vterque & quadratorum & vnitatum numerus quadratus est, duplici via resolui potest duplicata æqualitas. Primo enim respiciendo ad 1 Q. sumo interuallum Numerorum quadrato æquandorum, quod est 22528 N. − 1 Q. quod mutuo ductu conficiunt 22528 − 1 N. & 1 N. (hi soli apti sunt æquationi resoluendæ, vt constat ex iis quæ passim libro tertio docuimus, vt scilicet in semisse interualli eorum reperiatur 1 N. latus 1 Q.) Horum summa est 22528. cuius semissis quadratus 126877696. æquatur 16384 N. + 1048576. vnde fit 1 N. 7680. numerus scilicet areæ, cùm circumferentia sit 64. sed omnino impossibile est triangulum constituere cuius area sit 7680. circumferentia 64. Quia ex 64. fieri nequeunt tres partes, quarum duæ inuicem ductæ efficiant 15360. duplum scilicet areæ, cùm 64. neque in duas partes diuidi possit

quæ

quæ jd præstent: siquidem quadratus semissis ipsius 64. puta 1024. maior est producto multiplicationis duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 64. per quintam secundi Euclidis. Quod si primam operationem repetendo quæras triangulum cuius area 7680. circumferentia 64. inuenies sanè à quadrato semissis compositi è quadrato circumferentiæ 64. & ex quadruplo areæ 7680. non posse subduci octuplum producti ex quadrato circumferentiæ in aream. Denique si per valorem Numeri 7680. resoluas primas hypostases, inuenies hypotenusam longè minorem nihilo, cùm vnum laterum circa rectum, fiat multo maius tota circumferentia.

Aliam igitur inire viam cogimur, qua respiciendo ad vnitates, sumo interuallum numerorum quadrato æquandorum 1 Q. − 22528 N. Tum quæro duos numeros, quorum mutuo ductu id fiat. Ita tamen vt in semisse summæ illorum, vel interualli, reperiantur vnitates 1024. quod est latus ipsius 1048576. Sunt ergo huiusmodi numeri 11 N. & $\frac{1}{2}$ N. − 2048. horum interuallum 2048 + 10 $\frac{1}{2}$. cuius semissis 1024. + 5 $\frac{1}{4}$ N. cuius quadratus 1048576. + $\frac{1}{16}$. N. + $\frac{5}{16}$ Q. æquatur 1048576 + 16384 N. vnde fit 1 N. 175. $\frac{5}{8}$. Area scilicet quæsiti trianguli. Redeo ergo ad propositam initio quæstionem, & quæro triangulum, cuius ambitus sit 64. area 175 $\frac{5}{8}$. Pono vnum laterum circa rectum $\frac{1}{2}$. alterum $\frac{1}{4}$ N. fit hypotenusa 64 − $\frac{1}{2}$. − $\frac{1}{4}$ N. cuius quadratum si facias æqualem quadratis laterum circa rectum, fiunt tandem $\frac{1}{16}$. æquales $\frac{1}{16}$ + $\frac{1}{16}$ N. & ducendo omnia in 1 N. tum in 225. fiunt 1079296 N. æquales 28800. + 10092544 Q. & rursus diuidendo omnia per 128. vt in minimis exhibeantur, habes 8432 N. æquales 225 + 78848 Q. Quare fit 1 N. $\frac{225}{8432}$ vel $\frac{225}{78848}$. seu in minimis $\frac{225}{8432}$. vel $\frac{225}{78848}$. Et si per vtrumlibet valorem Numeri resoluas hypostases, fiunt vtroque modo latera circa rectum 19 $\frac{1}{2}$ & 17 $\frac{1}{2}$. Est ergo hypotenusa 26 $\frac{1}{2}$ ambitus 64. cui addendo aream, puta 175 $\frac{5}{8}$. fit quadratus $\frac{1}{16}$. cuius latus $\frac{1}{4}$. Hæc ad omnium pulcherrimi subtilissimique problematis explicationem adnotasse sufficiat.

Quoniam verò in his libris Diophantus diuersimodè vtitur duplicata æqualitate, non abs re me facturum arbitror, si omnes quos vsurpat modos sigillatim recenseam, & vnum in locum quæ sparsim à nobis adnotata sunt, collecta coniiciam, vt sic tota duplicatæ æqualitatis doctrina discentium animis firmius inhæreat. Nec solas Diophanti hypotheses afferemus, sed & alias plerúmque exhibebimus, quibus varia huiusmodi æquationum symptomata declarentur, nouamque insuper quam excogitauimus æquationis rationem, quamque ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, alijs adiiciemus.

OBSERVATIO D. P. F.

Vbi non sufficiunt duplicatæ æqualitates vel διπλοισότητες, recurrendum ad τριπλοτεσσάκοντας, seu triplicatas, æqualitates quæ est nostra inuentio, ad plurima problemata pulcherrima præuiam facem præferens. Æquentur videlicet quadrato

2 N + 4 *oritur triplicata æqualitas cuius solutio per medium duplicatæ æqua-*
2 N + 4 *litatis est in promptu. Si ponatur loco 1 N. numerus vna cum 4 quadra-*
5 N + 4 *tum conficiens v. g. 1 Q + 4. N. fiet primus numerorum æquandorum quadrato 1 Q. + 4 N. + 4 secundus igitur erit 2 Q + 8 N. + 4. tertius 5 Q + 20 N + 4. primus autem ex constructione est quadratus, ergo debent æquari quadrato 2 Q + 8 N + 4 & 5 Q + 20 N + 4 &. oritur duplicata æqualitas quæ vnicam certè exhibebit solutionem, sed eâ exhibitâ prodibit rursum noua, & à secunda tertia deducetur & in infinitum. Quod opus ita procedet vt inuento valore 1 N. rursus ponatur 1 N. esse 1 N + numerus qui primum ipsi 1 N. inuentus est æqualis. Hac enim viâ infinitæ prioribus solutionibus solutiones accedunt & postrema semper derivabitur à proxime antecedenti. Huius inuentionis beneficio infinitâ triangula eiusdem areæ possumus exhibere, quod ipsum videtur latuisse Diophantum, vt patet ex quæstione octaua lib. 5. in quâ tria tantum triangula æqualis areæ inuestigat vt sequentem quæstionem in tribus numeris construat qua ad infinitos ex iisque nos primi deteximus, recipit extensionem.*

Primvs Modvs vtendi duplicata æqualitate est, quando vterque numerus quadrato æquandus componitur ex Numeris & ex vnitatibus, & numerus Numerorum idem est vtrobique. Et hîc quatuor casus considerari possunt. Primus casus est, cùm vterque numerus & vnitatum & Numerorum afficitur signo pluris, vt accidit duodecima secundi, vbi æquandi erant quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. Itemque decima quarta tertij vbi æquandi erant quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. Et hîc facilis est æquationis ratio. Nam inueniendi sunt duo quadrati, quorum idem sit interuallum

atque ipſarum vnitatum quæ reperiuntur in numeris quadrato æquandis , hac tamen lege vt maior quæſitorum quadratorum excedat maiorem vnitatum numerum , minor quadratus excedat minorem vnitatum numerum. Vt cùm æquantur quadrato 1 N. + 2. & 1 N. + 3. quorum interuallum 1. quæremus duos quadratos ,quorum interuallum ſit 1. ita vt maior quadratorum excedat 3. minor excedat 2. idcirco ſumi non poſſunt $\frac{1}{4}$. & $\frac{9}{4}$. neque $\frac{1}{9}$ & $\frac{4}{9}$. ſed ſumpſit Diophantus $\frac{49}{144}$ & $\frac{25}{144}$. Similiter cùm æquandi ſunt quadrato 10 N. + 6. & 10 N. + 54. quorum interuallum 48. ſumit Diophantus quadratos 16. & 64. quia 16. excedit 6. & 64. excedit 54. non potuerunt autem ſumi 1. & 49. ob defectum conditionis adiectæ.

Secundus caſus eſt , cùm vnitatum numeri afficiuntur vtrobique ſigno minoris , vt accidit decima quarta ſecundi , vbi æquandi fuere quadrato 1 N. − 6 & 1 N. − 7. & in hoc caſu abſque vlla conditione ſufficit inuenire duos quadratos , quorum interuallum æquet interuallum propoſitorum numerorum , vt in data hypotheſi , quia interuallum eſt 1. duo quicunque quadrati vnitate diſtantes , ſatisfacient propoſito , ſumpſit Diophantus $\frac{25}{144}$ & $\frac{16}{144}$. & ſumere potuiſſet $\frac{1}{9}$ & $\frac{1}{16}$. vel alios quoſcumque quorum interuallum ſit vnitas.

Tertius caſus eſt. Cùm Numerorum numeri afficiuntur vtrobique ſigno minoris , quod nuſquam accidit in Diophanto, ſed nobis decimam tertiam ſecundi per duplicatam æqualitatem ſoluentibus, in hunc caſum cõtingit incidiſſe, æquantibus quadrato tum 9 − 1 N. tum 81 − 1 N. Hic autem inueniendi ſunt duo quadrati eodem interuallo diſtantes, quo & propoſiti numeri, ea tamen lege vt maior ipſorum ſit minor vnitatibus maioris propoſitorũ numerorum; minor autem ſit minor vnitatibus minoris. Vt in data hypotheſi , quia propoſitorum numerorum interuallum eſt 12. Quærendi ſunt duo quadrati , quorum interuallum ſit 12. ita tamen vt maior quæſitorum quadratorum ſit minor quàm 21. minor autem ſit minor quàm 9. quales ſumpſimus 4. & 16.

Quartus caſus eſt. Cùm in vno propoſitorum numerorum , vnitatum numerus afficitur ſigno pluris , in altero afficitur ſigno minoris, vt ſi ſint æquandi quadrato 1 N. + 8. & 1 N. − 12. Tuncque inueniendi ſunt duo quadrati quorum interuallum ſit idem , atque propoſitorum numerorum, abſque vlla conditione. Sic in data hypotheſi , quia propoſitorum numerorum interuallum eſt 20. ſumam duos quadratos , quorum interuallum ſit 20. quales ſunt 36. & 16. Itaque in his omnibus caſibus, manifeſtum eſt propoſitam quamcunque duplicatam æqualitatem infinitis modis explicari poſſe.

Secvndvs Modvs vtendi duplicata æqualitate eſt , quando rurſus vterque propoſitorum numerorum componitur ex Numeris & vnitatibus , & Numerorum numeri ſunt inæquales , ſed vnitatum numerus vtrimque quadratus eſt. Et hic duplex caſus conſiderari poteſt. Primus caſus eſt , cùm idem quadratus numerus vnitatum vtrimque reperitur , vt accidit in prima operatione quadrageſimæ quintæ quarti vbi æquantur quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. & in hoc caſu cùm interuallum propoſitorum numerorum conſtet ex ſolis Numeris (vt vides in data hypotheſi huiuſmodi interuallum eſſe 2 N.) quærendi ſunt duo numeri , quorum mutuo ductu fiat dictum interuallum, ea lege vt in ſumma eorum contineatur duplum lateris quadrati , qui eſt in vtroque propoſitorum numerorum , vt in dato exemplo cùm latus quadrati 4. ſit 2. cuius duplum 4. deligendi ſunt duo numeri quorum mutuo ductu fiant 2 N. ita vt in ſemiſſe ſummæ illorum reperiantur 4. vnitates, vnde patet alios deligi non poſſe quàm $\frac{1}{2}$ N. & 4. quorum ſummæ ſemiſſis quadratum ſi æques maiori 8 N. + 4. vel eorundem interualli ſemiſſis quadratum æques minori 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. 112. vnde liquet in hoc caſu vnicam tantum dari poſſe ſolutionem. Reducitur tamen hic caſus ad quartum modum , vt infrà oſtendemus , qua ratione infinitis modis reſolui poteſt.

Secundus caſus eſt , cùm in propoſitis numeris , inæquales vnitatum numeri quadrati continentur , vt accidit decima ſeptima tertij , vbi æquantur quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. quorum interuallum cùm componatur ex Numeris & vnitatibus , eſt quippe 5 N. + 5. tales ſunt deligendi duo numeri quorum mutuo ductu id fiat , vt in eorum ſumma reperiatur duplum lateris maioris quadrati , & in eorum interuallo reperiatur duplum lateris minoris quadrati , hoc eſt vt in ſumma reperiatur 6. in interuallo 4. Quare per Canonem primæ primi facilè reperientur huiuſmodi numeri puta 5. & 1. Aliter eoſdem numeros reperies , ſi capias ſummam & interuallum laterum quadratorum 9. & 4. hoc eſt ſummam & interuallum ipſorum 3. & 2. fient enim vt prius 5. & 1. Quia igitur ad conficiendum interuallum 5 N. + 5. ſumendi ſunt duo numeri , in quorum altero ſint vnitates 5. in altero 1. Patet nonniſi duobus modis tales numeros ſumi poſſe, puta vel 5 N. + 5. & 1. vel 1 N. + 1. & 5. vnde liquet in hoc caſu contingere poſſe vt duæ ſolutiones exhibeantur , dico contingere poſſe quia plerumque vnica prouenit ſolutio , vt in data hypotheſi , non enim ſumendo 5 N. + 5. & 1. ſolui poteſt quæſtio , quia horum ſummæ ſemiſſis quadratus , puta $\frac{1}{4}$ Q. + 15 N. + 9. maior eſt omnino quàm 10 N. + 9. ac proinde illi æquari nequit. Contingit autem duplex ſolutio ſi proponantur æquandi quadrato 36 N. + 49. & 12 N. + 1. quia enim horum interuallum eſt 24 N. + 48. conſtat ex tradita regula produci poſſe huiuſmodi interuallum , ſiue ex 6. in 4 N. + 8. ſiue ex 8. in 3 N. + 6. Vnde fit 1 N. vel 2. vel $\frac{25}{24}$.

Porro in hoc ſecundo caſu poteſt accidere vt vterque vel alter numerus Numerorum afficiatur ſigno minoris. Vt ſi ſint æquandi quadrato 36 − 6 N. & 16 − 1 N. quorum interuallum 20 − 5 N. Quod ſi ponatur fieri ex 2. in 10 − ½ N. optimè reſoluetur æquatio, & fiet 1 N $\frac{23}{24}$. Rurſus ſi ſint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 + 9 N. quorum interuallum 20 − 10 N. hoc ſi ponatur fieri ex 2. in 10 − 5 N. vel etiam ex 10 in 2 − 1 N. duobus modis reſoluetur æquatio, & fiet 1 N. vel $\frac{144}{169}$. vel 20. Attamen vtrumlibet horum accidat, ſæpè continget æquationem reſolui nullatenus poſſe, vt ſi ſint æquandi quadrato 36 − 1 N. & 16 − 6 N. quorum interuallum 20 + 5 N. Etenim ſi per regulam traditam ſumantur numeri, quorum mutuo ductu fiat 20 + 5 N. horum ſummæ ſemiſſis quadratus ſemper erit maior quàm 36 − 1 N. quia omnes illius partes afficientur ſigno Pluris. Quare quotieſcunque minor Numerorum defectus ſe tenebit ex parte maioris quadrati, erit impoſſibilis æquationis duplicatæ reſolutio. Sed etſi minor defectus iungatur minori quadrato, non ſemper reſolui poterit æquatio, vt ſi ſint æquandi quadrato 9 − 8 N. & 4 − 6 N. Cùm enim horum interuallum ſit 5 − 2 N. ſiue ponas illud produci ex 1. in 5 − 2 N. ſiue ex 5. in 1 − ⅖ N. nil ages, nam horum ſummæ ſemiſſis quadratus ſemper erit maior quàm 9 − 8 N. Similiter cùm numeri ex vna tantùm parte deficiunt, poteſt impoſſibilis eſſe æquationis reſolutio, vt ſi ſint æquandi quadrato 36 + 3 N. & 16 − 9 N. Cùm enim horum interuallum ſit 20 + 12 N. non poteſt id fieri niſi ex 2. in 10 + 6 N. vel ex 10. in 2. + ⅘ N. ſed vtroque modo, illorum ſummæ ſemiſſis quadratus maior eſt quàm 36 + 3 N. Quia vero & caſus iſte ſecundus cum omnibus ſuis ſymptomatis reduci poteſt ad Quartum modum, vt infrà docebimus, ſemper huiuſmodi æquationes non vna ratione reſolui poterunt.

TERTIVS MODVS eſt, cùm rurſus propoſiti numeri componuntur ex Numeris & vnitatibus inæqualibus multitudine, & vnitatum numeri quadrati non ſunt, ſed Numerorum numeri ſunt plani ſimiles. Vt accidit decima octaua & decima nona tertij. Itemque trigeſima quinta quarti. Et reducitur hic modus ad primum, faciendo numeros Numerorum æquales. Nam interdum minor ducitur in denominatorem rationis quàm habet ad eum maior, & ſic fit æqualis maiori, vt trigeſima quinta quarti, vbi cùm æquandi ſint quadrato 65 − 6 N. & 65 − 24 N. quia 24. ad 6. eſt ratio quadrupla ducitur 4. in 65 − 6 N. & fit 260 − 24 N. Iam ergo ſi æques quadrato 260 − 24 N. & 65 − 24 N. id perages per ea quæ dicta ſunt de tertio caſu primi modi. Interdum verò ad vitandas fractiones ſumuntur quadrati duo in eadem ratione quam habent inter ſe propoſiti Numerorum numeri, quique habeant partes propoſitis fractionibus expreſſas, & maior ducitur in minorem, & minor in maiorem, vnde productorum exiſtit æqualitas ob identitatem proportionis. Sic decima octaua tertij cùm æquandi ſint quadrato 5 ½ N. + 4 ½ & ¼ N + ⅛. Quamuis Numerorum inter ſe ſit ratio quadrupla, non ducitur tamen 4. in minorem, quia ſic non tollerentur fractiones, ſed ſumuntur duo quadrati 100. & 25 in eadem ratione, quique habeant partes fractionibus expreſſas, puta ½. & ⅛. ductoque maiore 100. in minorem ¼ N. + ⅛. & minore 25. in maiorem 5 ½ N. + 4 ½. fiunt iam æquandi quadrato 130 N. + 30. & 130 N. + 105. qui eſt primus caſus primi modi. Rurſus decima nona tertij, cùm ſint æquandi quadrato 2 ½ N. − 3 ½ & ½ N. − ½. vbi etiam numeri Numerorum ſunt quadrupli, ſumuntur quadrati 4. & 16. in eadem ratione qui habent partes fractionibus expreſſas, puta ½ & ⅛. Factaque decuſſatim multiplicatione fiunt æquandi quadrato 10 N. − 26. & 10 N. − 14. qui eſt ſecundus caſus primi modi. Cæterùm aduerte ſimili prorſus artificio caſum ſecundum ſecundi modi reduci poſſe ad primum. Sint enim æquandi quadrato 9 N. + 16. & 7 N. + 4. Quia 16. ad 4. eſt in ratione quadrupla, ſi ducas 4. in 7 N. + 4. fient iam æquandi quadrato 28 N. + 16. & 9 N. + 16. qui eſt primus caſus ſecundi modi. Quod ſi vnitates quadratæ in propoſitis numeris contentæ, ſint minimi in ſuis rationibus numeri, tunc ad vitandas fractiones, commodius erit quemlibet propoſitorum numerorum viciſſim multiplicare per vnitates alterius, vt in hypotheſi decimæ ſeptimæ tertij, vbi æquandi ſunt quadrato 10 N. + 9. & 5 N. + 4. duces 4. in 10 N. + 9. & duces 9. in 5 N. + 4. fientque quadrato æquandi 40 N. + 36. & 45 N. + 36. Et in vniuerſum quoties rationis quadratorum talis eſt denominator, vt eo ducto in illum propoſitorum numerorum, in quo continetur minor quadratus, non fiat integer numerus Numerorum, ſumptis ſimiliter minimis in ratione quadratorum eorundem, per eos decuſſatim multiplicabis propoſitos numeros, vt ſi ſint æquandi quadrato, 10 N. + 36. & 5 N. + 16. ſumes minimos in ratione 36 ad 16. puta 9. & 4. & per eos facta decuſſatim multiplicatione, fient iam æquandi quadrato 40 N. + 144. & 45 N. + 144. qui eſt vtique primus caſus ſecundi modi.

QVARTVS MODVS eſt, cùm propoſiti Numeri quadrato æquandi conſtant ex Numeris & vnitatibus, & vnitatum numerus quadratus eſt, & idem vtrimque, vt in primo caſu ſecundi modi. Sed cùm per ſecundum modum vix vna aut altera contingat ſolutio, per hunc quartum modum infinitæ poſſunt exhiberi ſolutiones, etiamſi requiratur vt valor Numeri conſiſtat intra præſcriptos limites. Sic Diophantus quadrageſima quinta quarti æquauit quadrato 8 N. + 4. & 6 N. + 4. volens valorem numeri minorem eſſe quàm 2. Cùm per ſecundum modum, valor Numeri neceſſario fiat 112. & hic triplex caſus conſiderari poteſt.

Primus caſus eſt, quando vterque propoſitorum numerorum, continet Numeros affectos ſigno

pluris. Sic in hypothesi Diophanti, vbi in vtroque numero Numeri afficiuntur signo pluris, procedet æquatio si considerentur tres numeri 8 N. + 4. 6 N. + 4. & 4. Nam cum maiorum interuallum sit 2 N. minorum 6 N. quærendi sunt duo quadrati, quorum interuallum sit triens interualli, quo minor illorum superabit 4. Ponatur minoris latus 1 N. + 2. fiet quadratus 1 Q. + 4 N. + 4. qui cum excedat 4. numero 1 Q. + 4 N. cuius triens $\frac{1}{3}$ Q. + 1 $\frac{1}{3}$ N. hoc addito, ipsi quadrato, fiet maior quadratus 1 $\frac{1}{3}$ Q. + 5 $\frac{1}{3}$ N. + 4. Hic ergo æquandus est quadrato, & ad tollendas fractiones omnia ducendo in 9. tum vt æquatio reducatur ad minimos, omnia diuidendo per 4. fit 3 Q. + 12 N. + 9. æquandus quadrato, cuius latus vt patet infinitis modis fingi potest, & cum qualibet data Numeri determinatione, fingatur cum Diophanto 5 N. − 3. fiet 1 N. $\frac{1}{3}$. Erunt ergo latera quadratorum $\frac{11}{3}$ & $\frac{14}{3}$. ipsi quadrati $\frac{121}{9}$. $\frac{196}{9}$. quorum priorem si æques 8 N. + 4. vel posteriorem 6 N. + 4. fit vtrobique 1 N. $\frac{25}{9}$.

Secundus casus est. Quando vterque numerus Numerorum afficitur signo minoris, vt si sint æquandi quadrato 16. − 1 N. & 16 − 5 N. Tuncque considero tres Numeros 16. 16 − 1 N. 16 − 5 N. & quia maiorum interuallum est 1 N. minorum 4 N. vnde interuallorum ratio est quadrupla, quæro duos quadratos, quorum interuallum sit quadruplum interualli, quo maior superabitur à 16. Ponatur latus maioris 4 − 1 N. fiet quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius quadruplum 32 N. − 4 Q. Quod si auferas à prædicto quadrato, manet minor quadratus 16 − 40 N. + 5 Q. cuius latus ita finges, vt 1 N. sit minor quàm $\frac{16}{5}$. ob numerum 16 − 5 N. Pone illud 4 − 6 N. fiet 1 N. $\frac{1}{5}$. Ergo latera quadratorum sunt $\frac{11}{5}$ & $\frac{14}{5}$. ipsi quadrati $\frac{121}{25}$. $\frac{196}{25}$. quorum maiorem si æques 16 − 1 N. minorem verò 16 − 5 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{221}{25}$.

Tertius casus est, cùm in maiore propositorum numerorum Numeri afficiuntur signo pluris, in minore verò afficiuntur signo minoris, vt si quadrato æquandi sint 16 + 6 N. & 16 − 2 N. Tuncque considerans tres numeros 16 + 6 N. 16. & 16 − 2 N. vbi maiorum interuallum 6 N. triplum est interualli minorum 2 N. quæro duos quadratos, vt interuallum maioris super 16. sit triplum interualli quo 16. superabit minorem. Esto latus minoris 4 − 1 N. fit quadratus 16 − 8 N. + 1 Q. qui superatur à 16. interuallo 8 N. − 1 Q. cuius triplum 24 N. − 3 Q. quod addito ad 16. fit maior quadratus 16 + 24 N. − 3 Q. cuius latus ita fingendum, vt 1 N. sit maior quàm 4. quia latus minoris quadrati ponitur 4 − 1 N. Ponatur 5 N. − 4 fiet 1 N. $\frac{16}{7}$. eruntque quadratorum latera $\frac{37}{7}$. & $\frac{44}{7}$. quadrati $\frac{1369}{49}$. $\frac{1936}{49}$. quorum maior si fiat æqualis 16 + 6 N. vel minor æquetur 16 − 2 N. fiet vtrobique valor Numeri $\frac{337}{49}$.

Itaque quoniam vt suprà docuimus secundus casus secundi modi semper reduci potest ad primum, ac per consequens ad aliquem horum trium casuum, & in quolibet horum trium casuum solutiones infinitæ reperiri possunt, constat vtique & secundum casum secundi modi cum omnibus suis symptomatis semper infinitis modis resolui posse.

QVINTVS MODVS quem ipsi commenti sumus est. Quando vterque propositorum numerorum quadrato æquandorum componitur ex Numeris & vnitatibus, & numeri Numerorum sunt inæquales, nec habent inter se rationem quadrati ad quadratum, nec etiam vnitatum numeri sint quadrati. Quoniam verò modum hunc, & duplicem illius casum fusè ad quadragesimam quintam quarti explicauimus, non est cur ibidem adnotata hîc reponantur, ne inani eiusdem rei repetitione commentarios nostros augere velle videamur.

SEXTVS MODVS est. Quando propositi numeri diuersimodè componuntur ex quadratis, Numeris & vnitatibus, & hîc pro omni casu qui excogitari possit, duæ regulæ sunt obseruandæ, vt æquatio sit explicabilis. Primo enim oportet, vt vel quadratorum, vel vnitatum numerus quadratus sit. Deinde oportet interuallum propositorum numerorum, ex vna vel ex duabus speciebus tantùm componi. Cæterùm casus omnes possibiles explicare nobis non est propositum, sed eos omnes in quos incidit Diophantus subiicere satis habebimus, cùm ex iis colligi possit quomodo in aliis sit procedendum.

Primò ergo accidit vtrumque propositorum Numerorum componi ex tribus speciebus supradictis, & eorum interuallum vnica tantùm constare specie, vt vigesima tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. + 4 N. − 1. quorum interuallum 1 N. ad quod conficiendum mutuo ductu deligi possunt soli $\frac{1}{3}$. & 4 N. vt in eorum summa reperiantur 4 N. duplum scilicet 2 N. lateris quadrati 4 Q. Quare vnica contingit solutio. Sic etiam vigesima prima tertij, æquantur quadrato 4 Q. + 3 N. − 1. & 4 Q. − 1 N. − 1. quorum interuallum 4 N. quod mutuo ductu conficiunt 1. & 4 N. ob causam suprà allatam. Et vnica tantùm contingit solutio.

Secundò accidit vtrumque propositorum numerorum ex duabus componi speciebus, alterum scilicet ex quadratis & vnitatibus, alterum ex Numeris & vnitatibus, interuallum autem illorum constare ex quadratis & Numeris. Sic prima quinti æquantur quadrato 1 Q. − 12. & 6 $\frac{1}{3}$ N. − 12. quorum interuallum 1 Q. − 6 $\frac{1}{3}$ N. Quare tales deligendi numeri quorum mutuo ductu id fiat, vt in eorum summa reperiantur 2 N. duplum lateris quadrati 1 Q. Igitur alij sumi non possunt quàm 1 N. & 1 N. − 6 $\frac{1}{3}$. Sic rursus secunda quinti æquantur quadrato 1 Q. + 20. & 4 N. + 20. quorum

interuallum 1 Q. − 4 N. quod fit ex 1 N. in 1. N. − 4. Sic denique sexta sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 1. & 14 N. + 1. quorum interuallum 1 Q. − 14. N. quod fit ex 1 N. in 1 N. − 14.

Tertiò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus. Alterum ex quadratis & Numeris, vt decima quinta tertij, vbi æquantur quadrato 4 Q. − 1 N. − 4. & 4 Q. + 15 N. quorum interuallum 16 N. + 4. ad quod conficiendum deligendi numeri, quorum summa reperiantur 4 N. ac proinde soli 4. & 4 N. + 1. deligi possunt.

Quartò accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis Numeris, & vnitatibus, alterum ex quadratis & vnitatibus. Sic vigesima quarta quarti, æquantur quadrato 1 Q. + 1 N. − 1 & 1 Q. − 1. quorum interuallum 1 N. quod fit ex ½. in 2 N. Sic rursus octaua sexti, æquantur quadrato 1 Q. + 14 N. + 1. & 1 Q. + 1. quorum interuallum 14 N. quod fit ex 2 N. in 7. Posset etiam in hoc casu interuallum numerorum componi ex Numeris & vnitatibus, vt nobis accidit vigesimam tertiam quarti, per duplicatam æqualitatem soluentibus, æquauimus enim quadrato 1 Q. + 1 − 1 N. & 1 Q. − 1. quorum interuallum 2 − 1 N. quod fit ex ½. in 4 − 2 N.

Quinto denique accidit alterum propositorum numerorum componi ex quadratis, Numeris, & vnitatibus, alterum verò ex Numeris & vnitatibus, vt propositione hac vigesima quarta libri huius, vbi 1 Q. + 1048576 − 6144 N. & 1 N. + 64. æquantur quadrato. Quo casu vt interuallum ex duabus tantùm speciebus componatur, necesse est vel vnitates, vel Numeros vtrobique æquales multitudine reperiri, vel saltem inter eos esse rationem quadrati ad quadratum, quò possint ad æqualitatem reduci, vt in data hypothesi, quia vnitates 1048576. & 64. sunt in ratione quadrati ad quadratum, cùm vterque numerus sit quadratus, reducuntur ad æqualitatem ducendo 1 N. + 64. in 16384. denominatorem rationis quam habet 1048576. ad 64. & fit 16384 N. + 1048576. æquandus quadrato, vnà cum ipso 1 Q. + 1048576 − 6144 N. Quare horum interuallum, iam ex duabus tantùm constat speciebus, est enim 22528 N. − 1 Q. vel contrà 1 Q. − 22528 N. & duobus modis resolui potest æquatio, quia tam quadratorum quàm vnitatum numerus quadratus est, vt suprà satis superque docuimus.

OBSERVATIO D. P. F.

HVic de duplicatis æqualitatibus tractatui multa possemus adiungere quæ nec veteres nec noui detexerunt. Sufficit nunc, vt methodi nostræ dignitatem & vsum asseramus, vt quæstionem sequentem quæ sane difficillima est resoluamus. Inuenire triangulum rectangulum numero, cuius hypotenusa sit quadratus, & pariter summa laterum circa rectum. Triangulum quæsitum repræsentant tres numeri sequentes 468729861028 9. 456548602776 1. 106165229352 0. *Formatus autem à duobus numeris sequentibus* 2150905. 246792. *Aliâ autem methodo sequentis quæstionis solutionem deteximus. Inuenire triangulum rectangulum numero eâ conditione vt quadratum differentia laterum circa rectum minus duplo quadrati à minore latere conficiat quadratum. Vnum ex triangulis quæ huic quæstioni aptantur est id quod sequitur* 1525. 1517. 156. *formatur à numeris* 2. 9. *&* 2.

Imo confidenter adiungimus duo triangula rectangula quæ tam exposuimus ad solutionem duarum propositarum quæstionum esse minima omnium in integris quæstiones adimplentium.

Methodus nostra hæc est. Quæratur quæstio proposita secundum methodum vulgarem, si non succedat solutio post absolutam operationem quia nempè valor numeri notâ defectus insignitur & ideo minor esse nihilo intelligitur, non tamen despondendum animum confidenter pronuntiamus (quæ ofcitantia, vt loquitur Vieta, fuit & ipsius & veterum analystarum.) Sed iterum quæstionem tentemus & pro valore radicis ponamus 1 N. − numero quem sub signo defectus æquari radici incognitæ in prima operatione inuenimus, prodibit noua haud dubiè æquatio quæ per veros numeros solutionem quæstionis repræsentabit. Et hac via superiores duas quæstiones alioquin difficillimas resoluimus, demonstrauimus pariter & construximus numerum ex duobus cubis compositum in duos alios eosdem diuidi posse, sed hoc per iteratam ter aliquando operationem. Sæpius enim contingit vt veritas quæsita ad multiplices operationum iterationes solertem & industrium necessariò adigat analystam vt facillimè experiendo deprehendes.

QVÆSTIO XXV.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρὰ, καὶ μερισθεὶς ἀφ' ἑνὸς τὸν ἕνα περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῇ κύβον, καὶ πλευράν. τετάχθω ἡ μὲν περὶ τὴν ὀρθὴν τῶν ᾱ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα δ^ος ᾱ. καὶ ἰσάκις ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἂν τετράγωνος, καὶ πλευρά. καὶ μερισθεὶς ἀφ' ἑνὸς τὸν ἕνα τὸν περὶ τὴν ὀρθὴν, ποιῶν κύβον καὶ πλευράν. λοιπὸν ὅτι δ^ος δ^ος ᾱ. δ^ος ᾱ. ἰσωθῆναι τετραγώνῳ, καὶ παντὶ ἀφ' ἑνὸς δύναμιν. γίνεται δύναμις ᾱ μ^ος ᾱ. ὑπὸ τετραγώνῳ. ἔστω τῷ ἀπὸ πλευρᾶς ς^ος ᾱ. ϛ μ^ος β. ὅθεν ὁ ς^ος γίνεται μ^ος γ^ος. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

INVENIRE triangulum rectangulum, vt quadratus hypotenusæ sit alius quadratus, & latus; & diuisus per vnum laterum circa rectum, faciat cubum & latus. Statuatur vnum laterum circa rectum 1 N. alterum verò 1 Q. & manet quadratus hypotenusæ æqualis quadrato aucto suo latere, idemque diuisus per vnum laterum circa rectum, facit cubum cum suo latere. Restat vt 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et omnia per 1 Q. diuidantur, fit 1 Q. + 1. æqualis quadrato. Esto quadrato à latere 1 N. − 2. fit 1 N. $\frac{1}{4}$. & reliqua sunt manifesta.

IN QVAESTIONEM XXV.

NESCIO quid somniat hîc Xilander de quadrilatero regulari, & de numero 80. Sanè in codice manu exarato sic habebatur, ὅπως ὁ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τετράγωνος, ἢ ἄλλος τετράγωνος ἐ π̄. Quare cùm passim hoc libro vox πλευρὰ exprimatur vnico π cum λ. superscripto, hac ratione π^λ. satis colligi poterat, veram lectionem esse, ἢ ἄλλος τετράγωνος, καὶ πλευρά.

Cæterùm artificiosè Diophantus per ipsas positiones, duabus propositi partibus satisfacit, nam quadratus hypotenusæ fit 1 QQ. + 1 Q. qui est quadratus cum suo latere, & idem quadratus hypotenusæ diuisus per alterum laterum circa rectum, puta per 1 N. dat quotientem 1 C. + 1 N. cubum scilicet cum suo latere. Quamobrem supereſt solùm, vt quadratus hypotenusæ, nempe 1 QQ. + 1 Q. æquetur quadrato. Et diuidendo per 1 Q. fit 1 Q. + 1. æquandus quadrato, cuius latus poni potest 1 N. − quotlibet vnitatibus quarum quadratus superet 1. Ponit Diophantus 1 N. − 2. vnde fit 1 N. $\frac{1}{4}$. suntque trianguli quæsiti latera $\frac{1}{4}$. $\frac{15}{4}$. $\frac{17}{4}$. Quadratus hypotenusæ est $\frac{289}{16}$. qui continet quadratum $\frac{225}{16}$. & eius latus $\frac{15}{4}$. seu $\frac{960}{64}$. & diuidendo eundem quadratum hypotenusæ per latus $\frac{1}{4}$. fit $\frac{3375}{64}$. seu $\frac{27}{8}$. qui continet cubum $\frac{27}{64}$. & eius latus $\frac{3}{4}$. seu $\frac{12}{16}$. Non solùm autem inuenti hac arte numeri præstant ea quæ requirit Diophantus, sed præterea summa laterum circa rectum est quadratus cum suo latere, vt patet tum ex positionibus, nam summa laterum circa rectum posita est 1 Q. + 1 N. tum ex ipsa solutione, nam $\frac{1}{4}$. est latus quadratum de $\frac{1}{16}$.

Hic etiam formari poterit expeditus Canon.

Quemlibet quadratum vnitate multatum, diuide per duplum sui lateris, velè conuerso, vter volueris quotientum erit alterum laterum circa rectum, & eius quadratus erit alterum latus. Horum autem quadrati simul conficient hypotenusæ quadratum.

Verbi gratia auferr 1. à quadrato 9. & residuum 8. diuide per 6. duplum lateris ipsius 9. vel contrà diuide 6. per 8. quotiens $\frac{3}{4}$. vel $\frac{4}{3}$. alterum laterum circa rectum. Ergo alterum erit $\frac{3}{4}$. vel $\frac{4}{3}$ & hypotenusa $\frac{5}{4}$ vel $\frac{5}{3}$. Quare vnica operatione duplex reperitur solutio, cuius rei ratio est, quia contingit 1 Q. + 1. æquari quadrato, & quia tam 1 Q quàm 1. quadratus est, potest latus illius fingi vel 1 N. − quotlibet vnitatibus, vel 1 − quotlibet numeris, puta, vel 1 N. − 3. vel 1 − 3 N.

QVÆSTIO XXVI.

ΕΥΡΕΙΝ τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὅπως ὁ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ᾖ κύβος, ὁ δὲ ἐν τῇ ἑτέρᾳ κύβος ἀφ' ἑαυτοῦ πλευρὰν, ὁ δὲ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κύβος ἐ πλευρά. τετάχθω ὁ ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ κ^ος ᾱ. ἀριθμὸς ᾱ. ὁ δὲ ἐν μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν κ^ος ᾱ. λείψει ἀριθμῷ ᾱ. ὁ ἄρα ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἴσος δυνάμεσιν

INVENIRE triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum sit cubus; alterum verò sit cubus suo multatus latere, hypotenusa denique sit cubus auctus suo latere. Statuatur hypotenusa 1 C. + 1 N. vnum verò laterum circa rectum 1 C. − 1 N. Reliquum ergo latus erit

2 Q. Reſtat vt 2 Q. æquentur cubo. Eſto 1 C. & fit 1 N. 2. Ad poſitiones. Erit triangulum 6. 8. 10. & conſtat.

β. λειπὸν ὅτι δυνάμει· β. ἰσῶται κύβῳ ἑνὶ κ̄ α. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ̄ β. ὅτι τὰς πλευρὰς ἕξει τὸ τρίγωνον ς̄. η̄. ῑ. κ̣μ̣ϛ̣ι.

IN QVÆSTIONEM XXVI.

Hîc duo maximè notanda ſunt. Primum non ſine arte poni hypotenuſam 1 C. + 1 N. & alterum laterum 1 C. − 1 N. Nam hac ratione ſatisfit duabus poſtulati partibus, ſiquidem hypotenuſa eſt cubus cum ſuo latere, & alterum laterum eſt cubus ſuo latere multatus. Deinde cum vt habeamus tertium latus, oporteat à quadrato hypotenuſæ, nempe ab 1 C C. + 2 Q Q. + 1 Q. auferre quadratum lateris ſecundi, puta 1 C C. − 2 Q Q. + 1 Q. & quod ſupereſt, nempe 4 Q Q ſit quadratus tertij lateris, res optimè ſuccedit, eo quod 4 Q Q. eſt quadratus, ac proinde latus eius 2 Q. eſt tertium latus. Et ſimile ſemper eueniet ſi hypotenuſa ponatur quilibet cuborum numerus cubicus, plus ſuo latere, & ſecundum latus ponatur idem cubus, minus ſuo latere. Nam interuallum quadratorum, erit ſemper certus quadratoquadratorum numerus, qui fit quater ex cubo in ſuum latus, quandoquidem hi quadrati ſunt omnino ſimiles, niſi quod in quadrato hypotenuſæ continetur duplum producti ex cubo in ſuum latus cum ſigno pluris, & in quadrato lateris ſecundi, continetur idem duplum producti ex cubo in ſuum latus cum ſigno minoris. Proinde quadratorum interuallum aliud non eſt quàm quadruplum producti ex cubo in ſuum latus. Igitur quadruplum hoc ſemper eſſe quadratum demonſtrandum eſt. Non ſolùm autem hoc oſtendemus, ſed quod vniuerſalius eſt, ducto quolibet quadrato in aliquem numerum, & producto in cubum eiuſdem numeri multiplicato, produci quadratum, vt non de quadruplo tantùm, ſed etiam de noncuplo, ſedecuplo, &c. idem conſtet.

D 9. E 3. F 1. A 2. B 4. C 8. G 18. H 12.

Eſto quilibet numerus A. cuius quadratus B. & cubus C. & ſumatur quilibet quadratus D. quo ducto in A. fiat G. dico ſi G ducatur in cubum C. fieri quadratum. Sumatur enim E. latus quadrati D. & ſit F vnitas, ductoque E in B producatur H. Patet igitur per ea quæ ad definitionem quartam primi, demonſtrata ſunt, tam tres A B C. quàm tres D E F. eſſe proportionales. Quare cùm ex primo D in primum A. fiat G. & ex ſecundo E in ſecundum B fiat H. ac denique ex tertio F in tertium C. fiat ipſe C. erunt & tres G. H. C. proportionales. Quare ex G in C. fiet quadratus ipſius H. Quod erat propoſitum.

Hinc euidens eſt dupliciter variari poſſe ſolutionem & poſitiones. Nam primò licet ponere pro hypotenuſa quemlibet cuborum numerum cubicum, plus latere ipſius cubi, & pro altero laterum, eundem cubum minus ſuo latere. Deinde tertium latus quod ſemper reperitur certus quadratorum numerus, poteſt æquari diuerſimodè alicui cuborum numero cubico, vt in hypotheſi Diophanti 2 Q poſſunt æquari ½ C. ÷ C. ÷ C. &c. vt ſi ponas 2 Q. æquales ½ C. fiet quæſitum triangulum 4112. 4080. 512. Neceſſe eſt autem hîc 2 Q. æquari alicui cuborum numero cubico minori quàm 2. quia cum alterum latus poſitum ſit 1 C. + 1 N. oportet vt 1 C. ſit maior ſuo latere, quod accidet ſi 1 N. ſit maior vnitate. Id autem continget ſi 2 Q. æquentur cuilibet cubo minori quàm 2. vt euidens eſt, quia valor Numeri reperitur diuidendo 2. per aliquem cubum. Si ergo cubus ille ſit minor quàm 2. fiet vtique quotiens maior vnitate.

Hic etiam formabitur huiuſmodi Canon.

Per quemlibet cubum minorem binario, diuide binarium, quotientem adde ſuo cubo, & deme à ſuo cubo, habebis hypotenuſam, & vnum laterum. Tertium verò latus erit duplum quadrati quotientis eiuſdem.

Sed & ſimili prorſus artificio licebit ſoluere huiuſmodi quæſtiones.

Inuenire triangulum rectangulum, vt vnum laterum circa rectum, ſit quadratus, alterum quadratus abſque latere: hypotenuſa quadratus cum latere.

Eſto hypotennſa 1 Q. + 1 N. vnum latus 1 Q. − 1 N. ergo à quadrato hypotenuſæ auferendo lateris quadratum, manet tertij lateris quadratus 4 C. quod quia volumus eſſe quadratum, oportet vt quadratus ipſius ſit quadratoquadratus. Igitur 4 C. æquantur quadratoquadrato. Eſto 1 Q Q. fit igitur 1 N. 4. eſtque triangulum 20. 12. 16. vbi etiam neceſſe eſt 4 C. æquari alicui quadratoquadrato minori quàm 4. ob cauſam ſuprà explicatam. Et ſi ponas 4 C. æquari ¼ Q Q. fiet 1 N. 64. eritque triangulum 4160. 4032. 1024.

Hic finem impoſiturus eram noſtris commentariis in hoſce Diophanti Arithmeticorum libros, cùm venit in mentem, multa alia, eaque non iniucunda proponi poſſe de triangulis rectangulis problemata, quæ huic libro ſubiicere non abs re viſum eſt, ab illis ſumentes exordium quæ determinationes varias de lateribus, vel de ipſa trianguli area docent.

PROBLEMA PRIMVM.

Dato ambitu trianguli, inuenire terminos intra quos consistere debet hypotenusa.

Datus ambitus esto 10.

Primum certum est hypotenusam, minorem esse debere semisse dati ambitus, eò quod cuiuslibet trianguli latus, minus est duobus reliquis simul. Quare maior quæsitorum terminorum est 5. exclusiuè. Vt autem habeatur minor terminus, ponatur hypotenusa 1 N. ergo reliqua latera simul erunt 10 − 1 N. Quare vt fiat triangulum rectangulum, oportet diuidere 10 − 1 N. in duos numeros, quorum quadrati simul conficiant 1 Q. Quod vt fieri possit per Canonem trigesimæ primi, constat oportere, vt duplum summæ quadratorum, putà 2 Q. superet quadratum summæ duorum numerorum, nempè 100 − 20 N. + 1 Q. Quare sublatis vtrimque æqualibus, & addito defectu, fit 1 Q. + 20 N. maior quàm 100. ex hac autem æquatione fit 1 N. ℞ 200 − 10. Ergo certum est hypotenusam, non posse esse minorem quàm ℞ 200 − 10. Quapropter ℞. 200 − 10. est minor terminus inclusiuè. Dico inclusiuè, quia hypotenusa poni potest ℞ 200 − 10. si videlicet latera circa rectum ponantur æqualia. Nam conditio ad trigesimam primam primi apposita, eatenus locum habet, quatenus inæquales numeri quæruntur, vt ibi adnotauimus. Ex his igitur elici potest huiusmodi Canon.

Semissis dati ambitus est maior terminus exclusiuè. Et si sumas duplum quadrati eiusdem ambitus, & ab illius latere auferas ipsum ambitum, residuum erit minor terminus inclusiuè.

Itaque si in rationalibus numeris ipsum minorem terminum exhiberi cupias, id fiet per approximationem hac arte. Quia vt constat ex suprà dato Canone, minor terminus hypotenusæ respectu ambitus, est ℞ 2 Q. − 1 N. sume latus proximum de 2 Q. putà $\frac{3}{2}$ N. & hinc aufer 1 N. restat $\frac{1}{2}$ N. Quare talem habeto regulam.

Ducito datum ambitum in 29. productum diuide per 70. orietur minor terminus quæsitus.

Vt data circumferentia 10. ducito 10 in 29. fit 290. quem diuide per 70. fit minor terminus quæsitus 4 $\frac{1}{7}$. Quare dices dato ambitu 10. hypotenusam fore minorem quàm 5. non minorem quàm 4 $\frac{1}{7}$.

PROBLEMA II.

Dato ambitu trianguli rectanguli, inuenire terminos summæ laterum circa rectum.

Ex præcedente pendet hæc quæstio, quia enim summa laterum circa rectum, vna cum hypotenusa, conficit totum ambitum, patet terminos summæ laterum circa rectum respondere terminis hypotenusæ, ita vt ab ambitu trianguli auferendo figillatim terminos hypotenusæ, relinquantur termini summæ laterum. Sic posito ambitu 10. cùm per præcedentem fiant termini hypotenusæ, 5. & 1. ℞ 200 − 10. si vtrumque auferas à toto ambitu 10. remanebunt termini summæ laterum circa rectum, nimirum minor exclusiuè 5. inclusiuè 20 − ℞ 200.

Vnde Canon.

Semissis dati ambitus est minor terminus exclusiuè, & si à duplo ambitus, auferas latus dupli quadrati ipsius ambitus, residuum erit maior terminus inclusiuè.

Fiet igitur terminus respectu ambitus 2 N. − ℞ 2 Q. seu per approximationem $\frac{41}{7}$ N. vnde regula.

Ducito datum ambitum in 41. productum diuide per 70. orietur maior terminus quæsitus.

Vt dato ambitu 10. ducito 10. in 41. fit 410. quem diuide per 70. fit maior terminus quæsitus 5 $\frac{5}{7}$. Oportet ergo summam laterum circa rectum cadere inter 5. & 5 $\frac{5}{7}$.

PROBLEMA III.

Dato ambitu, inuenire terminos aggregati ex hypotenusa, & ex altero laterum.

Ambitus esto 12.

Primo patet maiorem terminum exclusiuè esse ipsum ambitum 12. potest enim aggregatum hypotenusæ & alterius lateris, statui quilibet numerus infrà 12. & quantumuis exiguus numerus relinquatur pro tertio latere, perfici poterit triangulum. Minor vero terminus est 6. semissis ipsius 12. Quod sic probatur. Quia quadratus ipsius ambitus 12. æquatur duplo producti ex aggregato hypotenusæ & baseos, in aggregatum hypotenusæ & perpendiculi, semissis eiusdem quadrati, puta 72. æquabitur producto ex aggregato eodem in idem aggregatum. At 72. fit vt patet, ex 12. in suum semissem 6. Quare si 72. diuidatur per 6. fit quotiens 12. & si 72. diuidatur per numerum minorem quàm 6. fit quotiens maior quam 12. Euidens ergo est aggregatum hypotenusæ & baseos non posse esse 6. vel minorem quàm 6. alioquin sequeretur aggregatum hypotenusæ & perpendiculi esse 12. vel maius quàm 12. Quod est impossibilè cùm totus ambitus ponatur 12. Itaque fiet breuissimus Canon. 19. 3. perif.

Ipse ambitus, & eius semissis sunt quæsiti termini exclusiuè.

PROBLEMA

PROBLEMA XIII.

Data area præſcribere minimum ambitus terminum. Area eſto 6.

Sumantur per duas præcedentes minimi termini ſummæ laterum & hypotenuſæ, puta ℞ 48. & ℞ 24. horum ſumma ℞ 48. + ℞ 24. eſt quæſitus circumferentiæ terminus, vt euidens eſt.

PROBLEMA XIV.

Triangulum rectangulum in rationalibus conſtituere, vt ſumma laterum circa rectum ſit datus numerus.

Summa laterum circa rectum eſto 8.

Ponatur vnum latus 1 N. erit alterum 8 − 1 N. cùm ergo horum quadrati ſimul debeant æquari quadrato hypotenuſæ, fiet ſumma quadratorum 64 − 16 N. + 2 Q. æqualis quadrato, cuius latus ponatur 8 − tot numeris qui excedant 2. vt ſcilicet fiat 1 N. minor quàm 8. quia latus alterum poſitum eſt 8 − 1 N. fingatur ergo latus prædictum 8 − 3 N. fiet quadratus 64 − 48 N. + 9 Q. æquales 64 − 16. N. + 2 Q. vnde fit 1 N. $\frac{4}{7}$. vnum laterum circa rectum, eſtque alterum $\frac{20}{7}$. ipſa hypotenuſa $\frac{52}{7}$. Hinc elicitur facilis Canon.

Sume quemlibet numerum maiorem binario, inde aufer 1. reſidui duplum ducito in datam ſummam, productum diuide per quadratum ſumpti numeri binario multatum, orietur vnum laterum circa rectum.

PROBLEMA XV.

Inuenire triangulum rectangulum in rationalibus, vt eius ambitus ſit datus numerus.

Eſto ambitus 20.

Pone latera quæſiti trianguli 3 N. 4 N. 5 N. fit ſumma 12 N. æqualis 20. eſt ergo 1 N. $\frac{2}{3}$. & quæſitum triangulum 5. 6 $\frac{2}{3}$. 8 $\frac{1}{3}$. & ſic infinitæ reperientur ſolutiones ſi loco 3. 4. 5. deligantur alia atque alia triangula non ſimilia. Sed & licebit inuenire triangulum ſimile cuicunque dato triangulo rectangulo, eodem numero ambitus manente.

Aliter ſume ſemiſſem quadrati ipſis 20. puta 200. & ſtatue aggregatum hypotenuſæ & baſeos quemlibet numerum inter 20. & eius ſemiſſem 10. ob ea quæ demonſtrata ſunt tertia harum. Verbi gratia pone tale aggregatum 15. erit ergo perpendiculum 5. At diuidendo 200. per 15. quotiens 13 $\frac{1}{3}$. erit aggregatum hypotenuſæ & perpendiculi per decimam nonam tertij poriſmatum. Quare ſi inde auferas perpendiculum, puta 5. manebit hypotenuſa 8 $\frac{1}{3}$. quam ſi ſubtrahas à 15. fiet baſis 6 $\frac{2}{3}$.

PROBLEMA XVI.

Dato ambitu, & data area trianguli rectanguli, inuenire triangulum.

Eſto ambitus 40. Area 60.

Pone hypotenuſam 1 N. ergo latera circa rectum ſimul ſunt 40. − 1 N. cuius quadratus 1600 − 80. N. + 1 Q. æquatur quadratis laterum circa rectum, & duplo plani ſub ipſis contento, hoc eſt quadrato hypotenuſæ, & quadruplo areæ. Quare 1 Q. + 240. æquantur 1600 − 80 N. + 1 Q. Vnde fit 1 N. 17. Ipſa ſcilicet hypotenuſa. Igitur ſumma laterum circa rectum eſt 23 Quamobrem duplici via inueniri poſſunt ipſa latera, diuidendo ſcilicet 23. in duas partes, quarum quadrati ſimul efficiant 289. per trigeſimam primam primi, vel in duas partes quarum mutuo ductu fiat 120. per trigeſimam primi, & vtroque modo reperientur latera 15. & 8. Hinc fit Canon. 4. ſecundi.

A quadrato ambitus aufer quadruplum areæ, reſiduum diuide per duplum ambitus, orietur hypotenuſa.

PROBLEMA XVII.

Dato ambitu, & ſolido ſub tribus lateribus, inuenire triangulum.

Eſto ambitus 12. ſolidus 60.

Pone hypotenuſam 1 N. erunt latera circa rectum ſimul 12 − 1 N. At planus ſub iiſdem lateribus $\frac{60}{1}$. Quadratus autem ſummæ laterum circa rectum eſt 144. − 24 N. + 1 Q. vnde ſi auferas quadratos ipſorum laterum, hoc eſt illis æqualem quadratum hypotenuſæ, relinquetur 144 − 24 N. duplum plani ſub lateribus. Igitur huius dimidium, puta 72 − 12 N. æquatur $\frac{60}{1}$. Vnde fit 1 N. 5. hypotenuſa ſcilicet, eſt ergo ſumma laterum circa rectum 7. & planus ſub ipſis 12. vnde etiam vt ſuprà duplici via, nimirum per trigeſimam vel per trigeſimam primam primi inuenies latera 3. & 4. Hinc elicietur facilis Canon.

Diuide datum solidum per datum ambitum, quotientem aufer à quadrato quadrantis ipsius ambitus, residui latus adde eidem quadranti, fiet hypotenusa.

PROBLEMA XVIII.

Dato vno laterum circa rectum, & plano sub altero latere & hypotenusa, inuenire alterum latus & hypotenusam.

Esto alterum latus 4. Planus sub altero & hypotenusa 15. faciat.

Ponatur latus quæsitum 1 N. ergo hypotenusa est $\frac{15}{4}$. cuius quadratus $\frac{225}{16}$. æquatur quadratis laterum, puta 16 + 1 Q. & tandem 1 QQ + 16 Q. æquantur 225. & fit 1 N 3. quæsitum latus. Est ergo hypotenusa 5. Sic poni potest hypotenusa 1 N. alterum latus $\frac{4}{15}$. & fiet 1 Q. æqualis 16 + $\frac{225}{256}$. & tandem 1 QQ. æquabitur 16 Q. + 225. vnde fiet 1 N. 5. Hinc formatur Canon.

Quadrato dati plani adde quadratum semissis quadrati dati lateris, summa latus adde vel adime eidem semissi quadrati dati lateris, proueniet hinc quadratus quæsiti lateris, inde quadratus hypotenusæ.

PROBLEMA XIX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius ambitus sit quadratus, & idem ambitus siue adsumpta, siue detracta area quadratum faciat.

Primùm quærere oportet triangulum rectangulum, cuius ambitus sit quadratus numerus, & fiet triangulum, per decimam quintam, cuius ambitus æqualis erit cuilibet dato quadrato. Esto ergo tale triangulum 36. 48. 60. cuius ambitus est quadratus 144. & constituatur in quadratis, sintque quæsiti trianguli latera 36 Q. 48 Q. 60 Q. Superest vt ambitus siue adsumpta siue detracta area faciat quadratum. Quia ergo in quolibet triangulo rectangulo quadratus semissis hypotenusæ siue illi addatur, siue adimatur area facit quadratum, vt ex demonstratis ad vigesimam secundam tertij facilè infertur, sumatur quadratus semissis hypotenusæ, puta 900 Q Q. & is statuatur æqualis ambitui, puta 144 Q. fiet ergo 1 N. $\frac{4}{5}$. & erunt quæsiti latera trianguli $\frac{144}{5}$. $\frac{192}{5}$. $\frac{240}{5}$ & constat.

PROBLEMA XX.

Inuenire triangulum rectangulum, cuius area sit datus numerus. Oportet autem vt quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum.

Sit A datus areæ Numerus, cuius duplum B. cuius quadratus F. quo addito ad quadratoquadratum D. fiat quadratus E. Oportet inuenire triangulum cuius area sit A. sumatur K latus quadratoquadrati D. & sit ipsius K quadratus C. diuisoque A. per K producatur G. cuius duplum esto H. Quia ergo ducto K in G. producitur A. est A ad G sicut K ad vnitatem, sed sicut K ad vnitatem, ita est C ad K. Igitur vt est C ad K. sic A ad G & permutando vt C ad A. sic K ad G. sed vt A ad B. sic est G ad H cùm vtrobique sit ratio subdupla, ergo ex æquo vt C. ad B. sic est K ad H. sed C B sunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cùm eorum quadrati D F simul conficiant quadratum E. Igitur & K H sunt latera circa rectum trianguli rectanguli, cuius vtique area est A. cùm A producatur ex K in G. semissem ipsius H. Quamobrem constat propositum.

D 81. E 225. F 144.
C 9 A 6. B 12.
K 3. G 2. H 4.

1. 3. *perisf.*

Porro conditio adiecta non solùm sufficiens est, sed & necessaria, ita vt dari non possit triangulum rectangulum, quin quadratus areæ duplicatæ additus alicui quadratoquadrato, faciat quadratum. Quod eadem facilitate probatur. Sint enim K H. latera circa rectum trianguli dati, & ipsius H. dimidium sit G quo ducto in K fiat area A. cuius duplum B. cuius quadratus F. dico F. additum alicui quadratoquadrato facere quadratum, sit enim C quadratus ipsius K. & ipsius C. quadratus, hoc est quadratoquadratus ipsius K esto D. Ostendetur vt suprà esse C ad B vt K ad H. Quare cùm K H sint latera circa rectum trianguli rectanguli erunt & C B. latera circa rectum trianguli. Proinde quadrati ipsorum, puta D F. simul component quadratum. Quod erat propositum.

OBSERVATIO D. P. F.

AREa trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus, huius theorematis à nobis inuenti demonstrationem quam & ipsi tandem non sine operosâ &

PROBLEMA IV.

Dato ambitu inuenire maximum areæ terminum.

Datus ambitus esto 10.

Inueniatur per secundam harum maximus terminus summæ laterum circa rectum, puta 20 — ℞ 200. & huius quadratus esto 600 — ℞ 320000. cuius octaua pars sit 75. — ℞ 5000. dico hunc esse maximum areæ terminum; quia enim octaua pars alicuius quadrati æquatur semissi quadrati à latere subduplo lateris propositi quadrati, erit 75 — ℞ 500. semissis quadrati à semisse ipsius 20 — ℞ 200. puta semissis quadrati ipsius 10 — ℞ 50. Itaque quoniam quadratus semissis alicuius numeri maior est producto duarum quarumlibet inæqualium partium eiusdem numeri, erit quadratus ipsius 10 — ℞ 50. maior producto duarum quarumlibet inæqualium partium, in quas secari possit 10 — ℞ 200. quare cùm area trianguli sit semissis producti duorum laterum, quorum summa 20 — ℞ 200. non poterit area maior esse semisse quadrati ipsius 10 — ℞ 50. hoc est non poterit esse maior quàm 75 — ℞ 500. Hinc ergo fiet huiusmodi Canon. 2. 2. *perisc.*

A dodrante quadrati dati ambitus, aufer latus quadratum semissis quadrataquadrati eiusdem ambitus, residuum erit quæsitus terminus.

Proinde si libet in rationalibus quæsitum terminum præscribere, cùm ex dato Canone area respectu ambitus sit $\frac{1}{2}$ Q. — ℞ $\frac{1}{2}$ Q Q. sume proximum latus de $\frac{1}{2}$ Q Q. nempe $\frac{32}{1}$ Q. quem aufer à $\frac{1}{2}$ Q. superest $\frac{1}{32}$ Q. Hinc ergo formabitur Canon.

Ducito quadratum ambitus in 3. productum diuide per 70. orietur area terminus.

Sic in data hypothesi ducito quadratum ipsius 10. puta 100. in 3. fiet 300. quem diuide per 70. fiet 4 $\frac{2}{7}$. quæsitus areæ terminus.

Non præscribitur autem minimus terminus areæ, quia dari non potest. Etenim summa laterum circa rectum, semper diuidi poterit in duos numeros, quorum mutuo ductu fiat quantumlibet exiguus numerus, vt constat ex conditione apposita trigesimæ primi, quæ vt quæstio sit possibilis, requirit tantùm quadratum summæ maiorem esse quadruplo producti. Vnde euidens est, quò minor erit productus, eò magis solui posse quæstionem.

PROBLEMA V.

Data hypotenusa præscribere terminos summæ laterum circa rectum.

Esto hypotenusa 5.

Quoniam ex conditione appositæ trigesimæ primæ primi, oportet duplum quadrati hypotenusæ superare, vel saltem æquare quadratum summæ laterum circa rectum, cùm duplum quadrati 5. sit 50. non poterit summa laterum circa rectum excedere ℞ 50. sed eadem summa laterum circa rectum debet superare hypotenusam, vt duo trianguli latera simul sint maiora reliquo. Igitur quæsiti termini sunt 5. excluſiuè, & ℞ 50. incluſiuè. Hinc fiet Canon.

Ipsa hypotenusa est minimus terminus. At latus dupli quadrati hypotenusæ est maximus terminus.

Quia ergo respectu hypotenusæ maximus terminus summæ laterum circa rectum est ℞ 2 Q. & latus proximum de 2 Q. est $\frac{32}{1}$ N. hunc habeto Canonem.

Ducito hypotenusam in 99. productum diuide per 70. orietur quæsitus terminus.

Vt in data hypothesi ducito 5. in 99. fit 495. quem diuide per 70. fit terminus quæsitus 7 $\frac{1}{14}$.

PROBLEMA VI.

Data summa laterum circa rectum præscribere terminos hypotenusæ.

Sit summa laterum circa rectum 6.

Igitur ex dictis ad præcedentem quadratus ipsius 6. puta 36. non debet excedere duplum quadrati hypotenusæ. Quare hypotenusa non potest esse minor quàm ℞ 18. Debet autem eadem esse minor quàm summa laterum 6. Ergo quæsiti termini sunt 6. excluſiuè, & ℞ 18. incluſiuè. Vnde formatur Canon.

Ipsa summa laterum circa rectum est maximus terminus excluſiuè. At latus semissis quadrati eiusdem summæ laterum, est minimus terminus incluſiuè.

Quoniam igitur respectu summæ laterum circa rectum, fit hypotenusæ minimus terminus ℞ $\frac{1}{2}$ Q. cùm proximum latus de $\frac{1}{2}$ Q. sit $\frac{32}{99}$ N. hanc habe regulam.

Ducito summam laterum circa rectum in 70. productum diuide per 99. orietur minimus terminus hypotenusæ.

Vt in data hypothesi ducito 6. in 70. fit 420. quem diuide per 99. fit quæsitus terminus hypotenusæ 4 $\frac{8}{33}$.

PROBLEMA VII.

Data hypotenusa præscribere totius ambitus terminos.

Sit data hypotenusa 5.

Inueniantur per quintam termini laterum circa rectum, puta 3. & R 50. qui addantur sigillatim ipsi hypotenusæ 5. fient quæsiti termini 10. exclusiuè, & 5 + R 50. inclusiuè. Vnde Canon.

Duplum ipsius hypotenusæ est minimus terminus exclusiuè. At aggregatum ex hypotenusa & latere dupli quadrati eiusdem hypotenusæ, est maximus terminus inclusiuè.

Cùm ergo maximus ambitus terminus respectu hypotenusæ sit 1 N. + R 2 Q. & R 2 Q. per approximationem sit $\frac{17}{12}$ N. inuenietur quæsitus terminus in rationalibus hac arte.

Ducito hypotenusam in 169. productum diuide per 70. orietur maximus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypothesi ducito 5. in 169. fit 845. quem diuide per 70. fiet 12 $\frac{1}{14}$. quæsitus terminus.

PROBLEMA VIII.

Data summa laterum circa rectum, præscribere circumferentiæ terminos.

Sit data summa 6.

Inueniantur per sextam hypotenusæ termini, puta 6. & R 18. qui addantur sigillatim datæ summæ laterum 6. fient quæsiti circumferentiæ termini, puta 12. exclusiuè & 6 + R 18. inclusiuè. vnde Canon.

Duplum summæ laterum circa rectum, est maximus terminus exclusiuè. At aggregatum ex summa laterum, & ex latere semissis quadrati eiusdem summæ, est minimus terminus inclusiuè.

Cùm ergo minimus circumferentiæ terminus, respectu summæ laterum circa rectum, sit 1 N. + R $\frac{1}{2}$ Q. & R $\frac{1}{2}$ Q. per approximationem sit $\frac{17}{140}$. Inuenietur quæsitus terminus in rationalibus hoc pacto.

Ducito summam laterum in 239. productum diuide per 140. orietur minimus circumferentiæ terminus.

Sic in data hypothesi ducito 6. in 239. fit 1434. quem diuide per 140. fiet quæsitus terminus 10 $\frac{17}{70}$.

PROBLEMA IX.

Data summa laterum circa rectum, inuenire maximum areæ terminum.

Esto data summa 4.

Sume quadratum datæ summæ, puta 16. huius octaua pars nempe 2. est quæsitus areæ terminus, vt demonstratum est quarta harum.

PROBLEMA X.

Data hypotenusa inuenire maximum areæ terminum.

Data hypotenusa esto 6.

Sume quadratum datæ hypotenusæ, puta 36. huius quarta pars nempe 9. est quæsitus areæ terminus. Nam per quintam duplum quadrati hypotenusæ debet superare, vel saltem æquare quadratum summæ laterum circa rectum. Quare quadratus summæ laterum circa rectum, ad maximum est 72. cuius octaua pars per præcedentem est maximus areæ terminus. At octaua pars de 72. est quarta pars semissis ipsius 72. puta ipsius 46. Igitur patet propositum.

PROBLEMA XI.

Data area inuenire minimum terminum summæ laterum circa rectum.

Area esto 6.

Sume octuplum areæ, puta 48. huius latus nempe R 48. est minimus terminus summæ laterum circa rectum, vt constat ex quarta, & nona.

PROBLEMA XII.

Data area inuenire minimum terminum hypotenusæ. Area esto 6.

Sume quadruplum areæ, puta 24. huius latus nimirum R 24. est minimus hypotenusæ terminus, vt constat ex quinta, & decima.

ADDENDA COMMENTARIIS IN Definitionem septimam & octauam.

RETRACTANTI commentaria nostra occurrit mihi definitionem septimam ad mentem Diophanti accommodatius explicari posse, si accipiatur de fractionibus, in quibus superiores potestates per vnitates diuidi intelliguntur. Vt velit Diophantus, verbi gratia, ex $\frac{1}{N.}$ in $\frac{1}{N.}$ produci $\frac{1}{Q.}$ quemadmodum ex 2 N. in 3 N. producuntur 6 Q. & ex $\frac{1}{N.}$ in $\frac{1}{Q.}$ produci $\frac{1}{C.}$ eadem ratione, qua ex 3 N. in 4 Q. Producuntur 12 C. & sic de alijs. Sic enim vtraque definitio, septima scilicet & octaua de iisdem fractionibus accipientur, & tolletur ambiguitas illa, de qua ad definitionem octauam Diophantum criminabamur, semper enim apud Diophantum fractio numerica erit seu ἀριθμοστὸν, cùm vnitates per Numeros diuidentur, vt $\frac{1}{N.}$ & fractio Quadratica, seu δυναμοστὸν, cùm vnitates per quadratos diuidentur, vt $\frac{1}{Q.}$ & sic de alijs. Et sanè apparet ex reliquo opere ita sensisse Diophantum. Nam vbicumque ἀριθμοστὸν vel δυναμοστὸν vsurpat, huiusmodi fractiones intelligit. Verum erit nihilominus, quod ad definitionem septimam adnotauimus, nimirum eius demonstrationem, ab iis quæ demonstrauimus ad definitionem quartam, pendere omnino, vt per se manifestum est.

FINIS.

laborioſâ meditatione deteximus, ſubiungemus. Hoc nempè demonſtrandi genus miros in arithmeticis ſuppeditabit progreſſus, ſi area trianguli eſſet quadratus darentur duo quadratoquadrati quorum differentia eſſet quadratus: Vnde ſequitur dari duo quadrata quorum & ſumma, & differentia eſſet quadratus. Datur itaque numerus compoſitus ex quadrato & duplo quadrati æqualis quadrato, ea conditione vt quadrati cum componentes faciant quadratum. Sed ſi numerus quadratus componitur ex Quadrato & duplo alterius quadrati eius latus ſimiliter componitur ex quadrato & duplo quadrati vt facillime poſſumus demonſtrare.

Vnde concludetur latus illud eſſe ſummam laterum circa rectum trianguli rectanguli & vnum ex quadratis illud componentibus efficere baſem & duplum quadratum æquari perpendiculo.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur à duobus quadratis quorum ſumma & differentia] erunt quadrati. At iſti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primò ſuppoſitis quorum tam ſumma quam differentia faciunt quadratũ. Ergo ſi dentur duo quadrata quorum ſumma & differentia faciant quadratum, dabitur in integris ſumma duorum quadratorum eiuſdem naturæ priore minor. Eodem ratiocinio dabitur & minor iſtâ inuenta per viam prioris & ſemper in infinitum minores innenientur numeri in integris idem præſtantes: Quod impoſsibile eſt, quia dato numero quouis integro non poſſunt dari infiniti in integris illo minores. Demonſtrationem integram & fuſius explicatam inſerere margini vetat ipſius exignitas.

Hac ratione deprehendimus & demonſtratione confirmauimus nullum numerum triangulum præter vnitatem æquari quadratoquadrato.

SCHOLIVM.

Hinc patet, idem oſtendi poſſe de quadratoquadrato ipſius H quod oſtenſum eſt de quadratoquadrato ipſius K. Quare verum eſt in quolibet triangulo rectangulo quadratum areæ duplicatæ additum quadratoquadrato cuiuſlibet lateris circa rectum efficere quadratũ. Vt in data hypotheſi 144. cum quadratoquadratis ipſorum 3. & 4. puta cum 81. & 256. facit quadratos 225. & 400. ſed & conditionis adiecta neceſſitas per algebram ſic demonſtrabitur. Data area cuiuſlibet trianguli rectanguli puta 6. ponatur vnum laterum circa rectum 1. N. erit alterum $\frac{12}{1}$. Vt autem ſit triangulum rationale oportet, vt ſumma quadratorum, puta 1 Q. + $\frac{144}{1}$. æquetur quadrato, & omnia ducendo in 1 Q. fiet 1 QQ. + 144. æqualis quadrato. Vnde patet quadratoquadratum cuiuſlibet lateris circa rectum adſcito quadrato areæ duplicatæ, debere conficere quadratum.

Porrò hanc ipſam quæſtionem tractans Franciſcus Vieta Zetetico 16. libri quarti, duas alias ei præfigit conditiones. Prima eſt. Oportet vt area addendo aliquem quadratoquadratum, fiat quadratoquadratus, vel vt ducendo aream in aliquem quadratum, & productum addendo alicui quadratoquadrato, fiat quadratoquadratus. Et hæc conditio, ſufficiens quidem eſt, vt demonſtrat Vieta, ſed an ſit neceſſaria meritò quis ambigat. Sanè arbitror cùm eius neceſſitatem demonſtrare non poſſet ſummi vir ingenij, ſecundam excogitaſſe. Secunda conditio eſt. Oportet vt datus area numerus, ſit cubus ſuo multatus latere, vel vt idem per quadratum aliquem multiplicatus, ſit cubus ſuo multatus latere. Et hæc conditio non ſolùm ſufficiens eſt, vt oſtendit Vieta, ſed etiam neceſſaria vt demonſtrabimus, ne tanti viri commentum labare videatur. Quamuis tutius ſit hanc conditionem ita proponere. Oportet vt area numerus ſit cubus ſuo multatus latere, latuſve ſuo multatum cubo. Vel vt eo per aliquem quadratum multiplicato vel diuiſo, fiat cubus ſuo multatus latere, latuſue ſuo multatum cubo. Huius autem rei ratio eſt, quia quodlibet triangulum rectangulum, poteſt concipi ſimile alteri triangulo, quod formatum ſit ab vnitate, & ab alio quouis quadrato, cuius quadrati ſi ponas latus 1 N. fiet trianguli hypotenuſa 1 Q. + 1. alterum laterum circa rectum 2 N. alterum 1 Q − 1 vel 1 − Q. prout 1 N. ſupponitur maior vel minor vnitate. Quare ſit area 1 C. − 1 N. vel 1 N. − 1 C. ita ſi fingas triangulum ab 1. & 4. modo tradito tertia tertij poriſmatum. Fient latera 3. 4. 5. Area verò 6. cubus ſcilicet 8. ſuo multatus latere. At ſi formes triangulum ab 1. & $\frac{1}{4}$. fiet triangulum $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{5}{4}$. cuius area. $\frac{6}{16}$. eſt latus $\frac{8}{64}$ multatum ſuo cubo $\frac{512}{64}$.

Propoſito verò quolibet alio triangulo, cùm per quartam tertij poriſmatum, neceſſe ſit illud formari à duobus planis ſimilibus, hos planos ſumens, & vtrumque per minorem ipſorum ſigillatim diuidens, fient duo quotientes in eadem ratione, quorum minor erit vnitas, à quibus ſi formes triangulum, erit

[9. 3. poriſ. eius area, cubus ſuo multatus latere per ſuprà demonſtrata. ' Quia verò à proportionalibus numeris
2. 3. poriſ. formatà triangula ſimilia ſunt, erit inuentum triangulum primo propoſito ſimile. Quare cùm ſimilium triangulorum area ſint in ratione duplicata laterum, ſi aream inuenti trianguli ducas in quadratum denominatoris proportionis laterum, fiet area propoſiti trianguli, & è conuerſo diuidendo aream propoſiti trianguli per eundem quadratum, fiet area inuenti, ſiu cubus ſuo multatus latere. Sic propoſito triangulo 9. 12. 15. inuenies illud formari à planis ſimilibus 3. & 12. quos diuidendo ſigillatim per minorem ipſorum 3. fient in eadem ratione 1. & 4. quorum minor vnitas, à quibus ſi formes triangulum priori ſimile, puta 5. 4. 3. erit eius area 6. cubus ſuo multatus latere per ſupra demonſtrata. Cùm ergo prioris trianguli latera ſint tripla laterum poſteriorum, erit area area nonecupla. Quare diuidendo aream 54. per 9. fiet area 6. cubus ſuo multatus latere. Rurſus propoſito triangulo 39. 36. 15. cuius area 270. Inuenies formari triangulum à planis ſimilibus 12. & 27. quos ſi diuidas ſigillatim per minorem 12. fient 1. & $\frac{9}{4}$. à quibus finges triangulum priori ſimile $\frac{1}{4}$. $\frac{9}{16}$. $\frac{3}{4}$. cuius area $\frac{3}{16}$. eſt cubus $\frac{3}{64}$. ſuo multatus latere. Quia verò proportio laterum prioris trianguli ad latera poſterioris eſt duodecupla, ſi per quadratum ipſius 12 puta per 144. diuidas aream 270. fiet vtique $\frac{15}{8}$. cubus ſuo latere multatus. Quod ſi inuentis planis ſimilibus à quibus propoſitum triangulum formatum eſt, diuidas vtrumque per maiorem ipſorum, fient duo numeri in eadem ratione, quorum maior erit vnitas, à quibus ſi fingas aliud triangulum erit eius area latus ſuo multatum cubo, vt conſtat ex ſuprà demonſtratis.

Itaque quia diuiſio in multiplicationem verti poteſt, & è conuerſo. Nam verbi gratia diuidere 54. per 9. idem eſt atque multiplicare 54. per $\frac{1}{9}$. ferri poteſt Vieta limitatio. Et abſolutè verum eſt aream cuiuſlibet trianguli rectanguli eſſe cubum ſuo multatum latere, vel inueniri ſimile triangulum cuius area ſit cubus ſuo latere multatus.

PROBLEMA XXI.

Dato ambitu trianguli rectanguli, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam demiſſa, inuenire triangulum.

Sit datus ambitus 60. perpendicularis 12. Ponatur hypotenuſa 1 N. erit ſumma laterum circa re-
4. ſecundi. ctum 60 − 1 N. cuius quadratus 3600 − 120 N. + 1 Q.' æquatur quadratis ipſorum laterum, ſeu quadrato hypotenuſæ, & duplo plani ſub lateribus. Igitur 3600 − 120. N. eſt duplum plani ſub late-
19. ſeptimi. ribus, & 1800 − 60 N. eſt ipſe planus ſub lateribus. Quoniam verò, vt conſtat per octauam ſexti, vt ſe habet hypotenuſa ad vnum laterum, ſic etiam ſe habet alterum latus ad perpendicularem, ' erit planus ſub hypotenuſa, & ſub perpendiculari, æqualis plano ſub lateribus. At ex hypotenuſa in perpendicularem fiunt 12 N. ergo 12 N. æquantur 1800 − 60 N. & fit 1 N. 25. ipſa ſcilicet hypotenuſa. Quare facile eſt inuenire latera circa rectum, puta 20. & 15.

Hinc elicitur Canon.

Semiſſem quadrati dati ambitus diuide per aggregatum ex ambitu & ex perpendiculari, orietur hypotenuſa.

PROBLEMA XXII.

Data area trianguli rectanguli, & perpendiculari ſub angulo recto in hypotenuſam demiſſa, inuenire triangulum.

Eſto area 150. Perpendicularis 12. Ponatur vnum laterum circa rectum 1 N. erit ergo alterum $\frac{300}{1\text{ N.}}$.
8. ſexti. Quoniam verò ' vt eſt perpendicularis 12. ad vnum laterum circa rectum 1 N. ſic eſt alterum $\frac{300}{1\text{ N.}}$. ad hypotenuſam. Inuenietur per regulam proportionum hypotenuſa 25. & reliqua latera 20. & 15.

Hinc Canon.

Diuide duplum area per perpendicularem, orietur hypotenuſa.

BIBLIOTECA REAL DE LA VILLA LYON

DIOPHANTI ALEXANDRINI

DE MVLTANGVLIS NVMERIS.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON

PROPOSITIO PRIMA.

QVILIBET numerorum à ternario per vnitatis incrementum progredientium, multangulus est, primus ab vnitate, & habet tot angulos, quot ipse vnitatibus constat. Latus autem ipsorum est, proximus ab vnitate numerus, puta 2. est autem 3. triangulus. 4 quadratus. 5. quinquangulus, & sic deinceps. Cùm autem de quadratis euidens sit, ita eos constitui, quod nascantur numeri alicuius in seipsum multiplicatione, exploratum est quemlibet multangulum multiplicatum aliquo numero secundum proportionem multitudinis angulorum eius, & adsumentem quadratum aliquem secundum proportionem multitudinis angulorum eius, apparere quadratum. Atque hoc nos demonstrabimus, ostendentes quomodo dato latere inueniatur qui poscitur multangulus; & quomodo dato multangulo, latus accipitur. Prius autem ea demõstrabimus quæ ad hanc rem sumuntur.

Ἕκαστος τῶν ἀπὸ τ̃ τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάσι, πολύγωνός ἐστι πλευρὰν ἔχων τὸν ἀπὸ τ̃ μονάδος. καὶ ἴσας γωνίας τοσαύτας, ὅσαι ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων. πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ ἐξῆς τ̃ μονάδος ἀριθμός. ἔστω δὲ ὁ μὲν γ τρίγωνος, ὁ δὲ δ τετράγωνος, ὁ δὲ ε πεντάγωνος, καὶ τοῦτο ἑξῆς. Τῶν δὲ τετραγώνων φανερόν ἐστιν, ὅτι καλοῦνται τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἐφαρμόζει ἕκαστος τῶν πολυγώνων πολλαπλασιαζομένου τινὸς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ ἀπαλογίαν τὸ πλῆθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα καὶ τοῦ ἀπαλογίαν τὸ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ φανῆναι τετράγωνον. ὅ δὴ προθησόμεθα ὑποδείξαντες πῶς ἐκτεθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται καὶ πῶς δοθέντι πολυγώνῳ πλευρὰ λαμβάνεται. προεκθησόμεθα δὲ τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα.

In Librum Diophanti de numeris multangulis Commentarij.

LAboriosissimis in libros sex Arithmeticorum commentariis exantlatis, supereſt nobis de numeris multangulis liber enodandus. In quo restituendo quantum desudauerim coniicere poterunt quotquot in eo percipiendo, vt à Xilandro nobis traditus est, operam aliquam impenderint. Sanè, vt omittam cætera quæ huc contulimus, non paruam à tyronibus gratiam promeriti sumus ob diagrammata singulis ferè propositionibus adjecta, quæ passim imperitus librarius, tanquam ad rem minimè pertinentia, prætermiserat, cùm tamen illorum ope destitutus, vel accerrimo qui sit præditus ingenio, Diophanti demonstrationes vix percipere possit.

IN PROPOSITIONEM PRIMAM.

HÆc propositio definitionis vel petitionis cuiusdam locum obtinet. Per eam enim supponit Diophantus, quemlibet numerum incipiendo à ternario esse polygonum, tot angulos continentem quot vnitatibus constat ipse numerus, verbi gratia 3. esse triangulum, 4. quadratum 5. pentagonum, 6. hexagonum, & sic in infinitum. Cuius rei ratio est, quia vnitates cuiuslibet

numeri æqualibus interuallis ita disponi possunt, vt repræsentent figuram totidem angulorum, & laterum æqualium, vt in appositio diagrammate videre est. Vnde etiam apparet, quod subiicit Diophantus nimirum horum omnium polygonorum latus esse proximum ab vnitate numerum, puta 2. vides enim in quolibet latere cuiuslibet polygoni contineri vnitates 2.

Quoniam vero ipsa vnitas virtualiter est omnis polygonus; est enim & triangulus, & quadratus, & pentagonus, quia horum omnium polygonorum proprietates ipsi vnitati conueniunt, idcirco ait Diophantus quemlibet numerum à ternario, esse polygonum in sua specie primum post vnitatem, verbi gratia 3. est primus triangulus post vnitatem, 4. primus quadratus, 5. primus pentagonus post vnitatem, & sic de alijs.

PROPOSITIO SECVNDA.

ε.....α.....β..δ...γ

Ἐαν ὦσιν ἀριθμοὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνον γίνεται τετράγωνος, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ μεγίστου καὶ δυὸ τῶν μέσων. Τρεῖς γὰρ ἀριθμοὶ ὁ αβ. βγ. βδ. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν. διχοτόμον ὅτι τὸ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βγ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ βδ. τετράγωνόν ἐστιν ἴση τῷ ἑπτ. αβ. καὶ δυσὶ τοῖς βγ. γδ. διαιρεῖται ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τ αβ. βγ. εἰς τε τὸν ὀκτάκις ἀπὸ τ βγ. τετράγωνον καὶ εἰς τὸν ὀκτάκις ὑπὸ βγ. γδ. Καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τ εἰρημένων διχῶς, εἴς τε τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βγ. τετράγωνον καὶ τὸν τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. ὁ δὲ τετράκις ὑπὸ βγ. γδ. μετὰ τ ἀπὸ βδ. τετραγώνου, γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ αβ. ζητεῖται οὖν πῶς ὁ ἀπὸ τ αβ. τετράγωνος, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. καὶ ὁ τετράκις ἀπὸ τ βγ. τετράγωνος συντιθέντες ποιοῦσιν τετράγωνον. ἐπεὶ δὲ ϑῶμεν τῷ βγ. ἴσον τὸν αε. μεταβησόμεθα τὸν τετράκις ὑπὸ αβ. βγ. εἰς τὸν τετράκις ἀπὸ βα. αε. ὃς μιγεὶς τῷ τετράκις ἀπὸ γβ. τουτέστι τῷ ἀπὸ αε. ποιήσει ἴσον τῷ τετράκις ὑπὸ βε. εα. ὃς μιγεὶς τῷ ἀπὸ τῆς αβ. τετραγώνῳ, γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ βε. εα. ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ αἱ δὲ βε. εα. ἴσαι εἰσὶ τῷ τε αβ. καὶ δυσὶ τοῖς αε. τουτέστι δυσὶ τοῖς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε.....α.....β..δ...γ

E.....A.....B..D...G

SI fuerint tres numeri æqualibus interuallis se superantes, qui fit ex maximo in medium octies, adiumens minimi quadratum, facit quadratum, cuius latus æquale est composito ex maximo & medij duplo. sint enim tres numeri AB. BG. BD. æqualib. interuallis se superantes; Ostendendum est eum qui fit octies ex AB. in BG. vna cum quadrato ipsius BD. facere quadratum, cuius latus æquale est ipsi AB. & duobus BG. Quoniam ergo AB. æqualis est ipsis BG. GD. diuidetur qui fit octies ex AB. in BG. in eum qui fit octies ex BG. quadratum, & in eum qui fit octies ex BG. in GD. Et rursus diuiditur vnumquodque prædictorum bifariam, nimirum in eum qui fit quater ex AB. in BG. & in quadratum ex BG. quater, & in eum qui fit quater ex BG. in GE. At qui fit quater ex BG. in GD. vna cum quadrato ex DB. fit quadratus à latere AB. Quærendum igitur est, quomodo quadratus ex AB. & productus ex AB. in BG. quater, & quadratus ex BG. quater, compositi faciant quadratum. Itaque si ponamus ipsi BG. æqualem AE. traiiciemus eum qui fit quater ex AB. in BG. in eum qui fit quater ex BA. in AE. qui mixtus quadruplo quadrati ex GB. seu quadrati ex AE. facit æqualem quadruplo producti ex BE. in AE. qui mixtus quadrato ex AB. fit æqualis quadrato qui ex BE. EA. tanquam vna describitur. At ipsi BE. EA. æquales sunt ipsi AB. & duobus AE. seu duob. BG. quod erat ostendendū.

ε.....α.....β..δ...γ

E.....A.....B..D...G

IN SECVNDAM.

IN huius propositionis demonstratione, nulla insignis est difficultas. Tria tamen sunt quæ tyrones fortassis morari queant. Primum est quod ait Diophantus Quadratum ex AB. æquari qua-

E.....A.....B..D...G

druplo producti ex B G. in G D. vna cum quadrato ex B D. Quod ita probatur. Quoniam A B. ſupponitur æqualis ſummæ duorum B G. D G. quorum interuallum B D. ' patet quadruplum producti ex B G. in D G. vnà cum quadrato interualli B D. æquale eſſe quadrato ſummæ ipſorum B G. D G. hoc eſt quadrato ipſius A B. Quinta 2. poriſ.

Secundum eſt, quod ait Diophantus quadruplum producti B A. in A E. vnà cum quadruplo quadrati ex A E. æquari quadruplo producti ex toto B E. in A E. Quod euidens eſt, quia ' productus ex B E. in E A. æquatur producto ex B A. in A E. vnà cum quadrato ex A E. tertia 2.

Tertium eſt, quod ait Diophantus, quadruplum producti ex B E in A E, vna cum quadrato ex A B. æquari quadrato compoſiti ex B E. E A. Quod rurſus patet per 5. 2. poriſmatum cùm A B. ſit interuallum ipſorum B E. E A.

Poteſt autem hæc propoſitio & vniuerſalius concipi, & breuius atque etiam facilius demonſtrari, hoc pacto.

Si fuerint tres numeri in medietate arithmetica, octuplum producti ex medio in quemlibet extremorum, adſciſcens quadratum alterius extremi, æquatur quadrato compoſiti ex medij duplo, & ex illo extremo qui in medium octies ductus eſt.

D to.
A 2. B 5. C 8.

Sint tres numeri A B C. in medietate arithmetica, & ſit D. duplum medij, dico octuplum producti ex B. in vnum extremorum C. vnà cum quadrato alterius extremi A. æquari quadrato compoſiti ex ipſis D C. Quia enim ſunt in medietate arithmetica ipſi A B C. erit duplum medij, puta D. ' æquale ſummæ extremorum A C. Quare ipſorum D C. interuallum erit A. Quadratus autem compoſiti ex ipſis D C. ' æquatur quadratis ipſorum D C. & duplo producti ex D. in C. ſeu quadruplo producti ex B. in C. Quadrati autem ipſorum D C. ' æquantur rurſus duplo producti ex D. in C. ſeu quadruplo producti ex B in C. & quadrato interualli A. Igitur quadratus compoſiti ex ipſis D. C. æquatur octuplo producti ex B. in C. vnà cum quadrato ipſius A. Quod erat oſtendendum. Eodem prorſus argumento probabitur octuplum producti ex B in A. vnà cum quadrato ipſius C. æquari quadrato compoſiti ex ipſis A D. Igitur ex omni parte conſtat propoſitum. quinta 1. poriſ. quarta 2. quarta 2. poriſ.

Aliter etiam Franciſcus Vieta propoſitionem hanc demonſtrauit lib. 8. variorum de rebus mathematicis reſponſorum, per ipſam ſcilicet Algebræ operationem hac arte. Sit minimus trium numerorum arithmeticæ medietatis A. & ſit differentia B. erit ergo medius A + B. maximus vero A + B. bis & ſi ducatur medius A + B. in maximum A + B. bis fit A Quad. + A in B. ter + B Quad. bis. quod ſi ſumatur octies, & producto addatur A Quad. fit vtique A Quad. nouies + A in B quater & viceſies + B Quad. ſedecies. Hic autem numerus eſt quadratus à latere A. ter + B. quater vt euidens eſt. Et A ter + B quater æquatur compoſito ex maximo & medij duplo, cùm maximus ſit A + B bis, & duplum medij ſit A bis + B bis. Ergo conſtat propoſitum.

Eodem artificio demonſtrabitur altera noſtræ propoſitionis pars. Ducatur enim minimus A in medium A + B octies, & producto addatur quadratus maximi, fiet A Quad. nouies + A in B. duodecies + B Quad. quater qui numerus quadratus eſt à latere A ter + B bis quod æquatur minimo & medij duplo.

PROPOSITIO TERTIA.

B.A.. G..D.. E

Γ.α..γ..δ..ι

Si ſint quotcunque numeri æquali interuallo ſe ſuperantes, interuallum maximi & minimi, multiplex eſt interualli ipſorum, ſecundum numerum vnitate minorem eo qui multitudinem propoſitorum numerorum exprimit. Sint enim quotlibet numeri A B. B G. B D. B E. æquali ſe ſuperantes interuallo. Oſtendendum eſt, quod interuallum ipſorum A B. B E. multiplex eſt interualli ipſorum A B. B G. ſecundum numerum vnitate minorem multitudine ipſorum. AB. B G. B D. BE. Quoniam enim expoſiti ſunt AB. BG. BD. BE. æquali interuallo ſe ſuperantes, erunt ipſi

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἡ ὑπεροχὴ, τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ἑνὸς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἔσται καὶ τοῦ μετὰ ἓν ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν. ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ αβ. βγ. γδ. δι. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι ἡ τῶν αβ. δι. ὑπεροχὴ, ἑνὸς τῶν αβ. βγ. ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ καὶ τοῦ μετὰ ἓν ἐλάσσονα τῶν αβ. βγ. γδ. δι. ἐπεὶ γὰρ ὑπάκειται οἱ αβ. βγ. γδ. δι. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα αγ. γδ. δι. ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα ἐκ τοῦ αγ. πολλαπλάσιός ἐστι

κὴ τὸ πλῆθος τῶν αγ. γδ. δε. τὸ δὲ πλῆθος τ αζ. ζδ. δε. τὸ πλῆθος τ αδ. δγ. δδ. δε. μονάδι ἐλάσσων ἐστίν. ὥστε τὸ αε, τ αγ. πολλαπλάσιόν ἐστι κὴ τ μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τ αδ. δγ. δδ. δε. κὴ ἔστιν ὁ μὲν αε. ὑπεροχὴ τ μεγίστου κὴ τοῦ ἐλαχίστου , ὁ δὲ αγ. ἐστὶν αὐτῶν μία ὑπεροχή.

A G. G D. D E. æquales inter ſe. Quamobrem ipſe E A. ipſius A G. multiplex eſt, ſecundum multitudinem ipſorum A G. G D. D E. Atqui multitudo ipſorum A G. G D. D E. eſt vnitate minor multitudine ipſorum A B. B G. B D. B E. Igitur E A. ipſius A G, multiplex eſt ſecundum numerum vnitate minorem multitudine ipſorum A B. B G. B D. BE. eſt autem A E. interuallum maximi & minimi, At A G. eſt vnum interuallum ipſorum numerorum.

IN TERTIAM.

NIhil eſt hic difficultatis. Nam demonſtratio Diophanti breuis eſt, & dilucida.

PROPOSITIO QVARTA.

ΕΑν ὦσιν ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες καὶ πολλαπλασιασθέντες ὅλον τὸ πλῆθος αὐτῶν , ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τε συγκειμένου ἐκ τῶν ἐκκειθέντων. ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν οἱ α. β γ. δ. ε. ζ. ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ. δεικτέον ὅτι συναμφότεροι ὁ αζ. πολλαπλασιασθεὶς ὅλον τὸν πλῆθος τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ποιεῖ τινα ἀριθμὸν , ὃς ἔστι διπλάσιος τοῦ συγκειμένου ἐκ τ α. β. γ. δ. ε. ζ. τὸ γὰρ πλῆθος τ α. β. γ. δ. ε. ζ. ἤτοι κὴ ἄρτιόν ἐστιν ἢ περισσόν. ἔστω πρότερον ἄρτιον , καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκκείμενοι , τοσοῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῇ ηθ. ἀριθμῷ ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ηθ. τετμήσθω δίχα τῷ κ. καὶ διῃρήσθω ὁ κ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κὴ τὰ λ. μ. Καὶ ἐπεὶ ὡ ὑπερέχει ὁ ζ. τοῦ δ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ γ. τοῦ α. συναμφότερος ἄρα ὁ ζα. συναμφοτέρῳ τῷ γδ. ἴσος ἐστίν. ἀλλὰ συναμφότεροι ὁ ζα. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τῶν ηλ. ὥστε καὶ ὁ γδ. ἴσος ἔσται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ λμ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότεροι ὁ ιβ. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ μκ. ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ἴσος τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα καὶ τοῦ ηκ. τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηκ. διπλάσιόν ἐστιν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ζα. καὶ τοῦ ηθ. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τ α. β. γ. δ. ε. ζ. διπλάσιόν ἐστιν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τ ζα καὶ τ ηθ. τουτέστι τ πλήθους τῶν α. β. γ. δ. ε. ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

α. β. γ. δ. ε. ζ.
η. λ. μ. κ...θ

SI ſint quocunque numeri æquali interuallo progredientes , ſumma maximi & minimi ducta in numerum multitudinis ipſorum , numerum producit duplum ſummæ expoſitorum numerorum. Sunto numeri quotcunque A.B. CD. E F. æquali interuallo progredientes. Oſtendendum eſt ſummam duorum A F. ductam in numerum multitudinis ipſorum A. B. C.D. E.F. producere numerum qui duplus eſt ad ſummam ipſorum A. B. C. D. E. F. etenim numerus multitudinis ipſorum A. B.C.D. E.F. velpar eſt , vel impar. Sit primùm par, & quot ſunt expoſiti numeri, tot vnitates ſint in ipſo H G. erit ergo H G. par. Quare ſecetur bifariam in K, & diuidatur H K. in ſuas vnitates per L. & M. Tunc quia F. ſuperat D. eodem numero, quo C. ſuperat A. erit ſumma duorum F A. æqualis ſummæ duorum C D. Atqui ſumma duorum F A. æqualis eſt producto ex ipſamet in vnitatem H L. Igitur & ſumma duorum C D. æquabitur producto ex ſumma duorum F A. in vnitatem L M. Ob hæc eadem ſumma duorum E B. æqualis eſt producto ex ſumma duorum F A. in vnitatem M K. Quamobrem ſumma omnium A.B.C. D.E. F. æqualis eſt producto ex ſumma duorum F A. in H K. At producti ex ſumma duorum F A. in H K. duplum eſt productum ex ſumma duorum FA. in H G. Igitur & ſummæ omnium A. B. C. D. E. F. duplum eſt productum ex vtroque F A. in H G. hoc eſt in numerum multitudinis ipſorum A. B. C. D. E. F. Quod demonſtrandum erat.

A. B. C. D. E. F.
H. L. M. K...G

PROPOSITIO QVINTA.

A. B. C. D. E.
G. M. L. K. H

α. 6. γ. δ. ε.
ζ. θ. κ. η.

ILidem poſitis ſit multitudo ipſorum A. B. C. D. E. impar, & ſint in G H tot vnitates, quot ſunt ipſi A. B. C. D. E. Erit ergo impar ipſe G H. ſumatur in eo vnitas G M. & ſecetur M H. bifariam in K. & ſecetur M K. in ſuas vnitates per L. & quoniam E. ſuperat C. eodem numero quo C. ſuperat A. ſumma ipſorum E A. dupla eſt ipſius C. Hoc eſt producti ex C. in vnitatem K L. Ob hæc eadem ſumma duorum B D. dupla eſt producti ex C. in L M. quare ſumma ipſorum A E B D. dupla eſt producti ex C. in M K. Atqui ipſius M K. duplus eſt M H. Igitur ſumma ipſorum A E B D. æqualis eſt producto ex C. in M H. ſed & ipſe C. æqualis eſt producto ex C. in M G. Quamobrem ſumma omnium A B C D E. æqualis eſt producto ex C. in G H. At producti ex C. in G H. duplus eſt productus ex vtroque A E. in G H. quare ſummæ omnium A. B. C. D. E. duplus eſt productus ex vtroque A E. in G H. hoc eſt in numerum multitudinis expoſitorum numerorum. Quod oportebat oſtendere.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ὁ τῶν α. 6. γ. δ. ε. ἀριθμὸς. καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ζη. ζσαυτῇ μονάδι, ὅσοι εἰσὶν οἱ α. 6. γ. δ. ε. πλῆθος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ζη. κείσθω ἐν αὐτῷ μονὰς ζθ. καὶ τετμήσθω ὁ θκ. δίχα τῷ κ. καὶ τετμήσθω. ὁ θκ. εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κῆ τὸ λ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ ε. τῷ Γ. τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ. τῷ α. συναμφότερος ἄρα ὁ εα. διπλασίων ἐστὶ τῷ Γ. τουτέστι τῷ ὑπὸ Γ. ἑ κλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφοτερος ὁ 6δ. διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ λθ. ὥστε οἱ α. ε. 6. δ. διπλασίων εἰσὶ τοῦ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ θκ. διπλασίων ἐστὶν ὁ βη. ὥστε καὶ οἱ α. ε. 6. δ. ἴσοι εἰσὶ τῷ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ ϑη. ἐστὶ δὲ ἑ ὁ Γ. ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ Γ. καὶ τοῦ ϑζ. ὥστε ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν α. 6. γ. δ. ε. ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ. καὶ τοῦ ζη. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν Γ. καὶ ζη. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε καὶ τῆ ζη. ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν α. 6. Γ. δ. ε. διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αε. καὶ τοῦ ζη. τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν ἐπιταττόντων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IN QVARTAM ET QVINTAM.

HÆ quoque demonſtrationes faciles ſunt, & vnicam tantum propoſitionem conſtituunt, vt cuidens eſt, cuius demonſtratio pendet omnino à propoſitione ſexta libri primi poriſmatum, qua oſtendimus in medietate arithmetica ſummam extremorum æquari ſummæ duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, atque etiam duplo medij, ſi multitudo terminorum fuerit impar. Ex his porro collige ſummam quotlibet numerorum progreſſionis arithmeticæ, æqualem eſſe producto ex ſemiſſe numeri terminorum in ſummam extremorum, vel è conuerſo, producto ex ſemiſſe ſummæ extremorum, in numerum terminorum. Semper enim accidit alterutro horum modorum ſummam omnium numerorum haberi nullis intercedentibus fractionibus, ſi enim numerus terminorum ſit par, eius dimidium ſumi poteſt abſque fractione, ſi autem multitudo terminorum ſit impar, ſemiſſis ſummæ extremorum haberi poteſt abſque fractione, quia tunc ſumma extremorum eſt numerus par, quandoquidem eſt dupla medij termini.

PROPOSITIO SEXTA.

α. κ. ν. . . 6 γ. . . . . δ ε. λ. . . . . ζ
η. μ —— ξ —— ϑ
A. K. N. . . B G. . . . . D E. L. . . . . Z
H. M —— X —— T

SI ſint ab vnitate quotcunque numeri æquali interuallo progredientes, ſum-

Ἐὰν ὦσιν ὁπόσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁ σύμπας πολλαπλα-

σιαθεὶς ὅπὶ ἡ ὀκταπλασίονα τῆς ὑπεροχῆς αὐτῇ, ᾧ παρεσλαβὼν τὸ ἀπὸ τῆ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῆ τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, ὧ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσται τῆς ὑπεροχῆς αὐτῇ, κατά τινα ἀριθμὸν, ὃς παρεσλαβὼν μονάδα δι-πλασίων ὄζει τῆ πλήθους τῶν ἐκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι: ἴσωσαν ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ οἱ αβ. γδ. εζ. λέγω ὅτι γίνεται τὸ παρακείμενον. ὅσοι γὰρ εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦταί μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ ἣν ὑπερέχει ὁ εζ μονάδα, ἡ ὑπεροχῆς ἣν ὑπερέχει ὁ αβ. πολλαπλάσιός ὄζει κῦ ἡ μονάδι ἑλάσσονα τῆ ηθ. ἐπὶ ἄρα θῶμεν ἡγεῖσθαι μονάδα τὸν ακ. ελ. ημ. ἕξομεν τὸν λζ. τῆ κβ. πολλαπλάσιον κῦ τὸν μθ. ὥστε ὁ λζ. ἴσος ὄζει τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ἐπὶ θῶμεν δυάδα τὸν κη. ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπας πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ἅπαξ τοὺς κβ. ὃς ὄζει ὑπεροχὴ αὐτῇ, καὶ παρεσλαβὼν τὸ ἀπὸ τῆ ιβ. γβ. ὄντος δυάδι ἐλάσσονος ἡ ὑπεροχῆς αὐτῇ, γίνεται τετράγωνος, ὧ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα ποιεῖ πλ ἀριθμὸν ὃς ἡ ὑπεροχῆς αὐτῇ τῆ κβ. πολλαπλάσιός ὄζει κῦ συναμφότερον ἡ κθ. θμ. καὶ ἐπὶ ὁ σύμπας ἥμισύς ὄζει τῆ ὑπὸ συναμφοτέραν τῶν ζι. ελ. καὶ τῆ ϑη. ὁ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου ἡ ζι. ελ. καὶ τοῦ ϑη. διαιρεῖται εἰς τὸν ὑπὸ λζ. ηθ καὶ εἰς ἡ δὶς ὑπὸ ελ. ηθ. τουτέστι δύο τοὺς ηθ. πάλιν ἄρα ὁ σύμπας ἥμισύς ὄζει τῆ ὑπὸ συναμφοτέραν τῶν λζ. ηθ: καὶ δύο ἡ ηθ. ἀλλὰ ὁ λζ. ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κβ. μθ. καὶ ὁ σύμπας ἄρα ὄζει ἡμισυς τῆτε ὑπὸ κβ. μθ. ϑη. τριῶ καὶ δύο ἡ ηϑ. καὶ ἄρα τέμωμεν ἡ μθ. δίχα κῦ τὸ ξ. ἕξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ ἡ κβ. ηθ. θξ. τριῶ καὶ ἑνὶ τῷ ηϑ. ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ ἡ κβ. ηϑ. ϑξ. τριὰς μῦ ἑνὰς ηϑ. πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ἅπαξ τοὺς κβ. ᾧ παρεσλαβὼν τὸν ἀπὸ τῆ ιβ. τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος. ἀλλὰ ὁ ἐκ ἡ κβ. ηϑ. ϑξ τριὰς πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ἅπαξ τὸν κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηϑ. .ϑ ξ. ὅπὶ τὸν ἀπὸ τῆ κβ τετράγωνον ὥστε καὶ ὁ ἐκ ἡ κβ. ηϑ .ϑ ξ. τριὰς πολλαπλασιαθεὶς ὅπὶ ἅπαξ τοὺς κβ. ποιεῖ τὸν ὑπὸ ηϑ .θξ. ὅπὶ ἅπαξ τοὺς ἀπὸ κβ. τετραγώνους τουτέστι ἡ ὀκτάκις ὑπὸ ηθ. θξ. ὅπὶ ἡ ἀπὸ τῆ κβ. τετράγωνον τουτέστι ἡ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ὅπὶ ἡ ἀπὸ τῆ κβ. τετράγωνον δεικτέον ὡς ὅτι ὁ τε-

ma omnium ducta in octuplum interualli ipsorum, & adsumens quadratum numeri qui binario minor est eodem interuallo, quadratus existit, cuius latus binario multatum multiplex est ad interuallum secundum quendam numerum, qui auctus vnitate, duplus est numeri multitudinis expositorum numerorum, vnitate in iis annumerata. Sint enim ab vnitate numeri æquali interuallo progredientes. A B. G D. E Z. dico fieri quod est propositum. Quot enim sunt expositi numeri cum vnitate, tot vnitatibus constet numerus H T. Et quoniam interuallum quo E Z. superat vnitatem, interualli quo A B. vnitatem superat multiplex est secundum numerum vnitate minorem ipso H T. si ponamus vnitati æquales singulos A K. E L. H M. habebimus L Z. ipsius K B. multiplicem secundum M T. Quamobrem L Z. æqualis est producto ex K B. in M T. Et si sumamus K N. binarium, quæremus an omnium summa ducta in octuplum ipsius K B. (quod est ipsorum interuallum) & adsumens quadratum ipsius N B. (qui binario deficit ab interuallo) faciat quadratum, cuius latus binario multatum, faciat quendam numerum, qui interualli K B. multiplex sit, secundum compositum ex vtroque H T. T M. Et quia summa omnium est dimidium producti ex vtroque Z E. E L. in H T. At productus ex vtroque Z E. E L. in H T. diuiditur in productum ex L Z. in H T & in eum qui fit bis ex E L. in H T. hoc est in duos H T. Rursum omnium summa est dimidium eius qui fit ex L Z. in H T. & duorum H T. At L Z. est ostensus æqualis producto ex K B. in M T. Quare summa omnium est dimidium solidi sub K B. M T. T H. contenti, & duorum H T. si ergo secemus M T. bifariam in X. habebimus summam omnium æqualem solido sub K B. H T. T X. contento & vni H T. Quæramus igitur an solidus sub K B. H T. T X. contentus, cum vno H T. multiplicatus in octo K B. & adsumens quadratum ipsius N B. faciat quadratum. Atqui solidus sub K B. H T. T X. contentus ductus in vnum K B. æquatur ei qui fit à producto ex H T. in T X. in quadratum ipsius K B. Quare solidus sub K B. H T. T X. contentus,

ductus in octo K B. æquatur ei qui fit à producto ex H T. in T X. in octo quadratos K B. hoc est ei qui fit octies ex H T. in T X ducto in quadratum K B. hoc est ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. ostendendum ergo quod qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adsumens productum ex H T. in octo K B. & adhuc quadratum N B. fit quadratus. Diuiditur autem qui fit octies ex H T. in K B. in eum qui fit quater ex H M. in K B. & in eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. quærendum ergo an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adsciscens eum qui fit quater ex H M. in K B. & eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum N B. faciat quadratum. At qui fit quater ex H M. in K B. æqualis est ei qui fit bis ex N K. in K B. & mixtus quadrato N B. facit quadratos ipsorum K B. K N. Quæremus igitur an qui fit quater ex H T. in T M. ductus in quadratum K B. & adsumens eum qui fit quater ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratos B K. K N. fiat quadratus. Rursus autem quadratus B K. transit in eum qui fit ex quadrato H M. in quadratum K B. & mixtus hic ei qui fit quater ex H T. in T M. ducto in quadratum K B. facit numerum æqualem producto ex quadrato compositi ex vtroque H T. T M. in quadratum K B. Quærendum ergo an quadratus compositi ex vtroque H T. T M. ductus in quadratum K B. adsumens quadruplum producti ex vtroque H T. T M. in K B. & adhuc quadratum K N. fiat quadratus. Itaque si producto ex vtroque H T. T M. in K B. accipiamus æqualem numerum N R. erit productus ex quadrato vtriusque H T. T M. in quadratum K B. æqualis quadrato N R. vt deinde ostendetur. Videndum igitur an quadrati R N. N K. cum quadruplo producti ex vtroque H T. T M. in K B. faciant quadratum. Atqui quadruplum producti ex vtroque H T. T M. in K B. æquale est quadruplo ipsius N R. quandoquidem qui fit semel ex vtroque H T. T M. in K B. æqualis positus est N R. Atqui quatuor N R. æquales sunt duplo producti ex N R. in N K. (nam N K. positus est binarius) quærendum ergo an quadrati N R. N K. cum duplo producti ex N R. in N K. faciant quadratum; faciunt autem quadratum à latere R K. cuius latus R K. multa-

τράκις ἀπὸ ηθ. θμ. ὅτι τὸ ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κδ. τετράγωνον ποιεῖ τὸν ἀπὸ τῆ ιβ. τετράγωνον γίνεται τετράγωνος. διαιρεῖται δὲ ὁ ὀκτάκις ὑπὸ κθ. κδ. εἰς τε τὸ τετράκις ὑπὸ κμ. κδ. καὶ εἰς τὸν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. καὶ τῆ κδ. ζητητέον δή ἐι ὁ τετράκις ἀπὸ τ ηθ. θμ. ὅτι τὸν ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον, μετὰ τ τετράκις ὑπὸ κμ. κδ. καὶ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κδ. ἐστὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ιβ. τετράγωνον ποιεῖ τετράγωνον. ἀλλ' ὁ τετράκις ὑπὸ κμ. κβ. ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ ιχ. κδ. καὶ μιγεὶς τῷ ἀπὸ νβ. τετραγώνῳ ποιεῖ τοὺς ἀπὸ κδ. ιχ. τετραγώνους: ζητήσωμεν ἄρα εἰ καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ θη. θμ. ὅτι τ ἀπὸ ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κδ. μετὰ τ ξκ. κη. τετραγώνων γίνεται τετράγωνος. πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ξκ. τετράγωνος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ημ. τετράγωνον ὅτι τὸν ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον, καὶ μιγεὶς τῷ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. ὅτι τὸν ἀπὸ τοῦ κδ. τετράγωνον ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον ἐπὶ τ ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον: ζητητέον ἄρα εἰ καὶ ὁ συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. τετράγωνος ἐπὶ τ ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον, καὶ ὁ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. καὶ τῆ κδ. μετὰ τῆ ἀπὸ κη. τετραγώνου γίνεται τετράγωνος, ἐαν δὲ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κδ. ἴσον τὸν ρ. ἀριθμὸν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνος ὅτι τ ἀπὸ τῆ κδ. τετράγωνον ἴσος τῷ ἀπὸ τ ρ. τετραγώνῳ, ὅπερ ἐξῆς δειχθήσεται, σκεπτέον ἄρα εἰ οἱ ἀπὸ τῆ ρ. κ. τετράγωνοι μετὰ τῆ τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τ ηθ. θμ. καὶ τῆ κδ. γίνεται τετράγωνος ἀλλὰ ὁ τετράκις ὑπὸ ηθ. θμ. καὶ κδ. ἴσος ἐστὶ τῷ ρ. τετράκις, ὅπερ καὶ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆ ηθ. θμ. καὶ τοῦ κδ. ἴσος ἐτέθη ὁ ρ. Τέσσαρες δὲ οἱ ρ. ἴσοι εἰσὶ τῷ δὶς ὑπὸ ρ. κ. δυσὶ γὰρ ἐτέθη ὁ κ. ζητητέον ἄρα εἰ καὶ οἱ ἀπὸ τῆ ρ. κ. τετράγωνοι μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ρ. κ. ποιοῦσι τετράγωνον. ποιοῦσι δὲ τὸν ἀπὸ τῆ ρχ. ἢ ἡ πλευρὰ ἡ ρ. λιποῦσα δυάδα τῶν κ. ποιεῖ ἀριθμὸν τὸν ρ. ὃς τῆς ὑποχῆς αὐτῷ τοῦ

κδ. πολλαπλάσιον ἐστὶ κῳ ὁ συναμφότερος ὁ ηϝ. ϑμ. ὃς ἀφῃρέθη μονάδι τὸν ημ. πλάσιον ἐστὶ τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος.

α. κ. ν. ... ς
ν. μ ——— ξ ——— ϑ

tum binario N K. facit numerum quendam N R. qui interualli K B. multiplex est, secundum summam ipsorum H I. T M. quæ adscita vnitate H M. duplum facit numeri multitudinis expositorum numerorum.

A. K. N. ... B ——— R
H. M ——— X ——— T

IN SEXTAM.

HIC nonnulla sunt dilucidanda, quæ Diophantæa breuitas obscuriora reddit.

A. K. N. ... B G. ..... D E. L. ..... Z
H. M ——— X ——— T

Primò quod ait summam omnium esse dimidium producti ex summa ipsorum E Z. E L. in H T patet per 4. & 5. huius: Cùm enim E L. sit vnitas, vtique E Z. E L. simul conficiunt summam extremorum, qua ducta in H T: numerum terminorum, fit duplum summæ omnium. Quia vero ducere E Z. in H T, [prima 2.] idem est ac ducere sigillatim E L. L Z. in eundem H T. rectè concludit summam omnium esse dimidium producti ex L Z. in H T. semel, & producti ex E L. in H T. bis, & cum E L. sit vnitas, quæ non immutat numerum quem multiplicat, benè infert summam omnium esse dimidium producti ex L Z. in H T. adscisscentis duplum ipsius H T.

Secundò, diuidentes M T. bifariam in X. rem per lineas expressimus, quia ex hypothesi Diophantæa sequitur M T. esse ternarium, qui bifariam per integros secari non potest, hoc autem nil facit ad demonstrationem.

Tertiò, quod ait solidum sub K B. H T. T X. contentum ductum in K B. æquari ei qui fit à producto ex H T. in T X. in quadratum ipsius K B. patet ex eo quod quatuor numeri quoquo modo & ordine inter se multiplicentur, [tertia 1. porism.] eundem semper numerum procreant.

Quartò, quod ait numerum qui fit bis ex K N. in K B. adsumpto quadrato ipsius N B. æquari quadratis ipsorum K B. K N. sic probatur. Qui fit ex K B. in K N. bis. [tertia 2.] æquatur producto ex K N. in N B. bis & duplo quadrati ipsius K N. Igitur si addatur vtrimque quadratus ex N B. erit productus ex K B. in K N. bis, cum quadrato ex N B. æqualis producto ex K N. in N B. bis, & quadrato ex K N. bis, & quadrato ex N B. semel. At quadrati ipsorum K N. N B. cum duplo producti ex K N. in N B. [quarta 2.] æquantur quadrato totius K B. Igitur productus ex K N. in K B. bis cum quadrato ipsius N B. æquatur quadratis ipsorum K B. K N. Quod erat demonstrandum.

Quintò, quod ait productum ex quadrato ipsius K B. in quadruplum producti ex H T. in M T. vnâ cum producto ex eodem quadrato K B. in quadratum H M. æquari producto ex quadrato K B. in quadratum compositi ex ipsis H T. M T. id sic infertur. Quoniam datis duobus numeris H T. M T. quorum interuallum H M. quod fit quater ex H T. in M T. addito quadrato ipsius H M. [quinta 2. porism.] æquatur quadrato compositi ex ipsis H T. M T. patet ducere quadratum K B. in quadruplum producti ex H T. in M T. & in quadratum H M. idem esse atque ducere eundem quadratum K B. in quadratum compositi ex ipsis H T. M T.

Quoniam vero demonstratio Diophanti ob illius prolixitatem, tyronibus fortasse videbitur obscurior, operæ pretium duxi, propositionem istam aliter demonstrare. In quo præter quàm quod facilius & magis dilucidè rem expediemus, id etiam nobis nobis lucri accedet, quod in vniuersum de omni progressione Arithmetica ostendemus, quod demonstrauit Diophantus de sola progressione cuius minimus terminus est vnitas. Itaque more nostro, quinque vel sex Theorematis propositum concludemus.

THEOREMA PRIMVM.

Datis duobus numeris, quadratus primi cum quadrato semissis secundi, æquatur producto ex mutua datorum multiplicatione, vnâ cum quadrato interualli inter primum & semissem secundi.

Sint dati A. B. & ipsius B. semissis esto C. Ipsorum autem A C. interuallum esto D
D 8. C 2. dico quadratos ipsorum A. C. simul æquari producto ex A. in B. vna cum quadrato ipA 10. B 4. sius D. Etenim quadrati ipsorum A C. [4. 2. porism.] æquantur duplo producti ex A. in C. & quadrato ipsius D. sed duplo producti ex A. in C. æquatur producto ex A. in B. quia B. duplus est ad C. igitur quadrati ipsorum A C. æquantur producto ex A. in B. & quadrato ipsius D. quod demonstrandum erat.

Non

Non curamus vtrum A. ſit maior vel minor quam B. vel quam C. ſed & eodem prorſus argumento ſi B. ponatur primus, A. ſecundus, oſtendemus productum ex A. in B. cum quadrato interualli inter B. & ſemiſſem ipſius A. æquari quadratis tum ex B. tum ſemiſſe ipſius A. ortis.

THEOREMA SECVNDVM.

In progreſſione arithmetica, productus ex differentia progreſſionis in maximum, vna cum quadrato interualli inter minimum & ſemiſſem differentiæ, æquatur quadrato minimi, & quadrato ſemiſſis differentiæ & quadrato differentiæ toties ſumpto, quot ſunt termini progreſſionis vno dempto.

H 4. H 1. E 2.
A 5. B 7. C 9. D 11.

Sint A B C D. in arithmetica medietate, & ſit E. differentia progreſſionis cuius ſemiſſis G. & interuallum inter G. & A. eſto H. dico productum ex E. in D. cum quadrato ipſius H. æquari quadratis ipſorum A G. & adhuc quadrato ipſius E. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. nam interuallum quo D. ſuperat A. continet E. toties quot ſunt ipſi A B C. per tertiam huius. Igitur ducere E. in D. idem eſt ac ducere E. in A. & E. in ſeipſum toties, quot ſunt ipſi A B C. at productus ex E. in A. cum quadrato ipſius H. æquatur quadratis ipſorum A G. per primum theorema. Ergo productus ex E. in D. cum quadrato ipſius H. æquatur quadratis ipſorum A G. & præterea quadrato ipſius E. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. Quod erat oſtendendum.

THEOREMA TERTIVM.

In progreſſione arithmetica, quadratus maximi æquatur producto ex differentia in omnes antecedentes bis, & quadrato minimi ſemel, & quadrato differentiæ toties ſumpto, quot ſunt ipſi antecedentes.

G 2. G 2. G 2.
A 5. B 7. C 9. D. 11.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit G. differentia progreſſionis. dico quadratum maximi D. æquari producto bis ex G. in omnes antecedentes A B C. & quadrato ipſius A ſemel, & quadrato ipſius G. toties ſumpto, quot ſunt ipſi A B C. quia enim G C. ſimul componunt D. ' erit quadratus ipſius D. æqualis quadratis ipſorum G C. & duplo plani ſub G C. eadem de cauſa quadratus ipſius C. æquatur quadratis ipſorum G B. & duplo plani ſub G B. & rurſus quadratus ipſius B. æquatur quadratis ipſorum G A. & duplo plani ſub G A. igitur quadratus ipſius D. æquatur quadrato A. ſemel, & quadrato G. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. & præterea duplo producti ex G. in ipſos A B C. quod erat oſtendendum. 4. ſecundi.

THEOREMA QVARTVM.

In progreſſione arithmetica, quadratus maximi aucti dimidio differentiæ, æquatur duplo plani ſub ſumma omnium, & ſub differentia contenti, vnà cum quadrato interualli inter minimum & ſemiſſem differentiæ.

H. 4. E. 2. G 1.
A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.
K. 12.

Sint A B C D. in arithmetica progreſſione cuius differentia E. cuius ſemiſſis G. & interuallum inter A. & G. eſto H. Ipſorum autem D G. ſumma eſto K. dico quadratum ipſius K. æquari numero qui fit bis ex E. in ſummam omnium, vnà cum quadrato ipſius H. Etenim quadratus ipſius K. ' æquatur quadratis

H 4. E 2. G 1. K 12.
A 5. B 7. C 9. D 11.

ipſorum D G. & duplo producti ex G. in D. ſeu producto ex E. in D. (quandoquidem E. duplus eſt ad G) At quadratus ipſius D. per præcedentem æquatur duplo producti ex E. in ipſos A B C. vnà cum quadrato ipſius A. ſemel, & quadrato ipſius E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. igitur quadratus ex K. æquatur numero qui fit bis ex E. in A B C. & ſemel in D. cum quadratis ex A. & G. ſemel ſumptis, & quadrato ex E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. At per ſecundum theor. quadrati ex A. & G. vnà cum quadrato ex E. toties ſumpto quot ſunt ipſi A B C. æquantur producto ex E. in D. vna cum quadrato ex H. igitur quadratus ex K. æquatur duplo producti ex E. in omnes A B C D. vna cum quadrato ex H. quod demonſtrandum erat. quarta 2.

THEOREMA QVINTVM.

In omni progreſſione arithmetica, numerus qui fit octies ex differentia in ſummam omnium, vna cum quadrato interualli inter duplum minimi & differentiæ, æquatur quadrato, cuius latus componitur ex duplo maximi, & ex differentia.

H. 4. E. 2. G. 1.
A. 5. B 7. C. 9. D. 11.
L. 8. K. 12.

Sint A B C D. in progressione arithmetica, cuius differentia E. cuius semissis G. & interuallum inter A. & G. esto H. interuallum autem inter duplum ipsius A. & E. esto L. dico quod fit octies ex E. in summam omnium A B C D. cum quadrato ipsius L. æquari quadrato compositi ex duplo ipsius D. & ex E. sit enim K. summa ipsorum D G. quia igitur octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. est quadruplum producti qui fit bis ex E. in eosdem A B C D. & quadrati ex H. At productus ex E. in A B C D. bis, quadratus ex H. æquatur quadrato ex K. per præcedens theor. patet octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. æquari quadruplo quadrati ex K. at quadruplum quadrati ex K. est quadratus, cuius latus duplus est ad K. & cum K. componatur ex D. & ex G. duplum illius componitur ex duplo ipsius D. & ex duplo ipsius G. seu ex E. igitur octuplum producti ex E. in A B C D. cum quadruplo quadrati ex H. quadratus est, cuius latus componitur ex duplo ipsius D & ex E. Quia vero interuallum ipsorum A G. est H. vtique duplorum interuallum, puta L. duplum est ad H. ac proinde quadratus ex L. quadruplus est quadrati ex H. quamobrem octuplum producti ex E. in omnes A B C D. cum quadrato ex L. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipsius D. quod erat demonstrandum.

Sane hoc theoremate in vniuersum de omni progressione arithmetica demonstrauimus, quod Diophantus restringit ad solam progressionem quæ incipit ab vnitate. Nam illius propositionem ab hoc theoremate minime differre cuilibet rem attentius consideranti, statim innotescet, si hoc applicetur arithmeticæ progressioni ab vnitate incipienti. Quod tamen vt fiat commodissime, tale adhuc demonstrandum theorema.

THEOREMA SEXTVM.

In progressione arithmetica quæ incipit ab vnitate, productus ex duplo numeri terminorum vnitate multato in differentia progressionis, adsumpto binario, æquatur composito ex differentia, & ex duplo maximi termini.

E. 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H. 4. K 8.
L. 3. F. 6.
G. 7.

Sint A B C D. in arithmetica progressione, cuius differentia E. & sit A. vnitas, numerus terminorum H. cuius duplum K. & sit L. vnitate minor ipso H. cuius duplum F. cui addita vnitate fiat G. eritque G. vnitate minor quam K. cum enim H L. vnitate differant, erit duplorum K F. interuallum binarius, quare G. excedens F. vnitate, deficiet vnitate ab ipso K. dico itaque productum ex G. in E. adsumpto binario, æquari composito ex duplo ipsius D. & ex E. Nam productus ex L. in E. æquatur interuallo extremorum D A. per tertiam huius.

E 6.
A. 1. B. 7. C. 13. D. 19.
H 4. K 8.
L 3 F 6.
G 7.

Quare si producto ex L. in E. addatur vnitas A. fiet numerus D. ac proinde si producto ex F. in E. addatur binarius, fiet duplum ipsius D. quamobrem si G. vnitate maior quàm F. ducatur in eundem E. & producto addatur binarius fiet vtique numerus continens bis ipsum D. & semel ipsum E. quod erat demonstrandum.

Hinc porrò manifeste infertur propositio Diophanti. sint enim A B C D. in arithmetica medietate, & sit A. vnitas, differentia progressionis E. quæ binario multata relinquat G. & duplum numeri terminorum esto K. vnde ablata vnitate, superstit L. dico si E. ducatur octies in summam omnium A B C D. & producto addatur quadratus ipsius G. fieri quadratum, cuius latus binario multatum, continet E toties, quot sunt vnitates in L. quia enim à differentia E. auferendo duplum minimi termini A. puta binarium, relinquitur G. vtique per 5. theorema numerus qui fit octies ex E. in summam omnium A B C D. cum quadrato ex G. æquatur quadrato cuius latus componitur ex E. & ex duplo ipsius D. At per sextum theor. ipsi E. & duplo ipsius D. æquatur productus ex L. in E. auctus binario. Igitur qui fit octies ex E. in summam omnium A B C D. adsumens quadratum ex G. æquatur quadrato, cuius latus æquale est producto ex L. in E. adsumenti binarium. Patet ergo si à latere huius quadrati auferatur binarius, relinqui productum ex L. in E. seu numerum qui toties continet E. quot sunt in L. vnitates, quod demonstrandum erat.

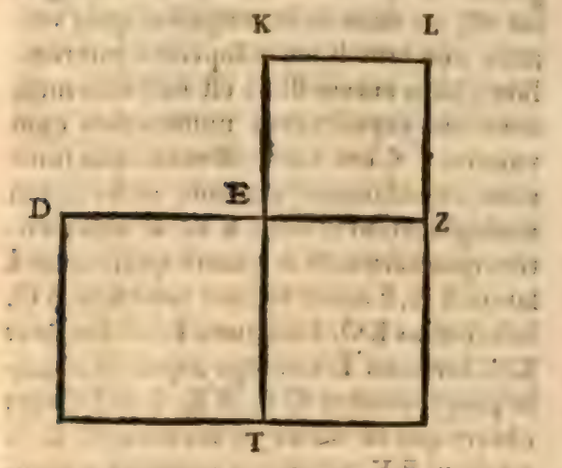
G 4. E 6.
A. 1. B 7. C. 13. D 19.
K 8. L 7.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Ἐστω συναμφοτέρῳ τῇ πθ. θμ. ἴσος ὁ α. ᾧ δὲ ἡ κϛ. ἴσος ὁ β. τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆ πθ. θμ. καὶ τῆ κϛ. ἴσος ὁ γ. λέγω ὅτι καὶ ὁ ὑπὸ συναμφοτέρα τῆ πθ. θμ. τουτέστι ὁ ὑπὸ τῆ α. ὅτι δὲ ὑπὸ τῆ κϛ. τουτέστι ὅτι

SIT vtrique HT. TM. æqualis A. ipsi autem K B. æqualis B. At producto ex vtroque HT. TM. in K B. æqualis sit G. dico quod quadratus compositi ex vtroque H T. T M. hoc est ipsius A.

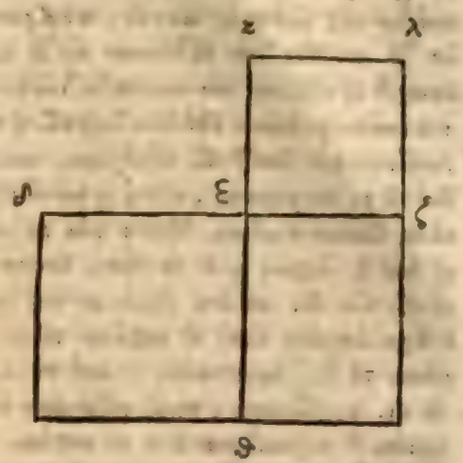
ductus in quadratum K B. hoc eſt in quadratum B. producit quadratum ipſius G. Ponantur ipſis A & B. æquales in rectalinea D E, E Z. & deſcribantur ab ipſis quadrati A. B. G.



DT. EL. & perficiatur complementum TZ. Itaque erit vt DE. ad EZ. Ita quadratus DT. ad complementum TZ. vt autem TE. ad EK. ſic complementum TZ. ad quadratum EL. quare complementum TZ. eſt medium proportionale inter quadratos DT. ZK. Productus igitur ex quadrato ex DT. in quadratum ZK. æqualis eſt quadrato ex TZ. & eſt DT. æqualis quadrato compoſiti ex vtroque HT. TM. At ZK. eſt æqualis quadrato KB. & complementum TZ. æquale eſt NR. Quamobrem quod fit ex quadrato vtriuſque HT. TM. in quadratum KB. æquale eſt quadrato N. R.
A. B. G.

ἢ ἀπὸ τῆ̃ ϛ. ἴσος ὄ̃ζι τῷ̃ ἀπὸ τῆ̃ γ. καίδω τοίς α. ϐ. ἰσοι ἐπ' εὐθείας αἱ δε. εζ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῶ̃ τετράγωνοι

α. β. γ.



αἱ δϑ. ελ. καὶ συνπεπληρώθω. ὁ̃ ϑζ. παραπλήρωμα ὡς ἄρα ἡ δε. ὄ̃ζι εζ, οὕτως τὸ δϑ. ὄ̃ζι ϑζ. παραπλήρωμα ὡσὰ ἡ ϑε. ὄ̃ζι εκ. οὕτως τὸ θζ. παραπλήρωμα ἐστὶ ελ: τὸ ἄρα θζ. παραπλήρωμα μέσον ἀνάλογον ὄ̃ζι τ̃ε δθ. θζ. τετραγώνων. ὁ̃ ἄρα ὑπὸ τῶ̃ δθ. ζκ. τετραγώνων ἴσον ὄ̃ζι τῷ̃ ἀπὸ τ̃ῆ θζ. παραπληρώματος ᾗ ὄ̃ζι τὸ μὲν δθ. ἴσον τῷ̃ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θκ τετραγώνῳ, ὁ̃ δὲ ζκ. τετράγωνον ἴσον τῷ̃ ἀπὸ τ̃ῆ κϐ. ὁ̃ δὲ θζ. παραπλήρωμα ἴσον τῷ̃ ιρ. καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ηθ. θμ. τετράγωνον, ὄ̃ζι ὁ̃ ὑπὸ τοῦ̃ κϐ. τετράγωνον, ἴσον ὄ̃ζι τῷ̃ ἀπὸ τῶ̃ ιρ. τετραγώνῳ.

α. β. γ.

IN SEPTIMAM.

Quod demonſtrat hic Diophantus per lineas, longe breuius & facilius per numeros oſtendemus, & ipſam propoſitionem ſic concipiemus.

Productus ex mutua duorum quadratorum multiplicatione, æquatur quadrato producti ex mutuo, laterum ductu.

A. 25. B. 35. C. 49. D. 5. E. 7.

Sint quadrati A. C. quorum latera D. E. & ex D. in E. fiat B. dico productum ex quadrato A. in quadratum C. æquari quadrato ipſius B. etenim vt conſtat ex demonſtratione vndecima 8. Euclidis B. eſt medius proportionalis inter A. & C. quare productus ex A. in C. æquatur quadrato ipſius B. Quod erat demonſtrandum. 10. ſeptil.

ο.α.χ..ν...ϐ——ρ γ——δ ε.λ——ζ
ν.μ——ξ——ϑ
O.A.K..N...B——R G——D E. L——Z
H. M——X——T

PROPOSITIO OCTAVA.

Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολύγωνός ἐστι, καὶ γὰρ ἔχει γωνίας ποσαύτας, ὅσός ἐστιν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρὰν δὲ ἔχει τὸν μετὰ τὸν τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων γινόμενον ὅταν τοὺς κϐ. καὶ προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τῆς νϐ. τρίγωνον, ποιεῖν τὸν ἀπὸ τῆς ρκ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλων μονάδα θῶμεν τελευταῖον ἕξομεν τὸν κο δυάδα. καὶ ἔστι ἡ ὁμοίως καὶ ὁ κτ δυάς. ἔσονται ἄρα αἱ οϐ. ϛκ. ϛτ. τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες, ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ τὸν μιγίστου τῶν οϐ. καὶ τὸν μέσου τῶν ϛκ. προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τῶν ϛτ. τετράγωνον, ποιεῖ τρίγωνον πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ μιγίστου τῶν οϐ. καὶ δύο τῶν μέσων τῶν ϛκ. καὶ ὁ οϐ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ὅτε ὄντες τοὺς κϐ. καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τῆς νϐ. τετράγωνον, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε οϐ. καὶ δύο τῶν κϐ. καὶ ἡ τούτου πλευρὰ λιποῦσα δυάδα τὸν οκ. καταλείψει ξεῖς κϐ. ὅτι εἰσὶ τῶν κϐ. πολλαπλάσιοι καὶ ξιάδα, ἡ δὲ τελευταῖος προσλαβοῦσα τὸν μονάδα, διπλασίων ἐστὶ τῆς δυάδος. ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ προβέβληκε ποιεῖ τὸν οϐ. ὁ δὲ οϐ ὢν τυχὼν, καὶ πολύγωνός ἐστι προσῶπος ἀπὸ τῆς μονάδος, ἐπείτερ μονάς ἐστιν ὁ αο. ὁ δὲ δεύτερος ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ αϐ. καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα. ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολύγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ οϐ. ἔχων γωνίας ἴσους τούτους, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι τῇ οκ. μείζων ἐστὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τῷ κϐ. καὶ πλευρὰν ἔχει τὸν ηθ. ὃς ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. Καὶ ἀποδείχθη τὸ προβλῆμα Διοφάντου ἐν ὅρῳ λεγόμενον, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὁποσοιῶν, μονάδος μειούσης τὴν ὑπεροχὴν, ὁ σύμπας ἐστὶ τρίγωνος, δυάδος δὲ τετράγωνος, τριάδος δὲ πενταγωνος. λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν καὶ ἡ δυάδι μείζονα τῇ ὑπεροχῇ, πλευρὰ δὲ αὐτῷ τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. ὅθεν ἐπεὶ οἱ

6. huius.

2. huius.

1. huius.

CVm sint quæ propositimus, pronunciamus. Si sint quotcumque numeri ab vnitate, æquali interuallo progredientes, omnium summa multangulus est, tot enim habet angulos, quot vnitates numerus binario superans interuallum; latus autem illius est numerus multitudinis expositorum numerorum cum vnitate. Cùm enim ostenderimus summam expositorum omnium numerorum multiplicatam in octo K B. & adsumentem quadratum N B. facere quadratum à latere R K. si aliam vnitatē sumamus A O. habebimus K O. binarium. Et est similiter K N. binarius Erunt ergo æquali interuallo progredientes O B. B K. B N. Quam obrem qui fit octies ex maximo O B. in medium B K. adsumens quadratum minimi B N. facit quadratum habentem latus summam conflatam ex maximo O B. & duplo medij B K. Igitur O B. ductus in octo K B. & adsumens quadratum N B. æqualis est quadrato compositi ex O B. & duobus K B. & huius latus multatum binario O K. relinquit tres K B. qui sunt ipsius K B. multiplices secundum ternarium, at ternarius adsumens vnitatem, duplum efficit binarii. Quoniam igitur summa omnium progressionis terminorum cum vnitate idem præstat quod O B. & O B. vtcunque oblatus est, & multangulus primus ab vnitate (quandoquidem A O. est vnitas, secundus autem post eam numerus est A B) & eius latus est binarius, sequitur & summam omnium progressionis terminorum esse multangulum æquiangulum ipsi O B. & habentem tot angulos, quot vnitates habet numerus superans binario O K. interuallum K B. & est eius latus H T. numerus multitudinis expositorum numerorum cum vnitate. Et demonstratum est quod ab Hypsicle in definitione dicitur. Quod si fuerint quotlibet numeri ab vnitate æquali interuallo progredientes, si interuallum sit vnitas, summa omnium est triangulus; si binarius, quadratus; si ternarius, quinquangulus. Exprimitur autem multitudo angulorum per numerum binario maiorem differentia; latera vero per numerum multitudinis terminorum cum vnitate. Itaque quoniam trianguli fiunt, cum interuallum est vnitas, latera ipsorum erunt maximi ter-

minorum, & productus ex maximo terminorum in vnitate maiorem ipſo, duplus eſt ipſius trianguli. Et quia O B. multangulus eſt, & illius tot ſunt anguli, quot in ipſo vnitates, & ductus octies in numerum binario minorem ipſo, hoc eſt in K B. & adſumens quadratum numeri qui ab ipſomet, quaternario deficit hoc eſt quadratum N B. facit quadratum, talis erit multangulorum definitio. Omnis multangulus multiplicatus octies in numerum binario minorem eo qui exprimit multitudinem angulorum, & adſumens quadratum numeri quaternario minoris multitudine angulorum, facit quadratum. Simul ergo demonſtrata Hypſiclis definitione, & horum multangulorum, reliquum eſt vt oſtendamus, quomodo dato latere is qui requiritur multangulus inueniatur. Nam alicuius multanguli latus habentes H T. & habentes multitudinem angulorum eius, habebimus & datum K B. Quare & habebimus productum ex vtroque H T. T M. in K B. qui æqualis eſt ipſi N R. Quare & datum habebimus ipſum K R. quoniam binarius eſt N K. Quamobrem & datum habebimus ipſius K R. quadratum. A quo auferendo quadratum ipſius N B. qui & ipſe datus eſt, habebimus reliquum datum, qui quæſiti multanguli multiplex eſt ſecundum, octuplum ipſius K B. Ergo inuentus eſt quæſitus multangulus. Similiter & dato multangulo, inueniemus latus eius H T. Quod demonſtrandum erat.

τρίγωνοι μονάδος ὕσης ἡ ὑπεροχῆς γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσιν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τὸ μεγίστου τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ τῆ μονάδι μείζονος αὐτῆς, δ'πλασίων ἐστὶν τοῦ συμβαινομένου τετραγώνου. Καὶ ἐπεὶ ὁ οβ. πολύγωνος ὢν, καὶ ἔ ἴσαυται γωνίαι ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιαζεὶς ὀκτάκις ἔστὶ τ δυάδι αὐτῆ ἰλάσσονα, τουτέστι ἔστὶ τ κβ. ἐ προσλαβὼν τὸν ὑπὸ τῆ τετράδι αὐτῆ ἰλάσσονος, τουτέστι τ ὑπὸ τῆ νβ. ποιεῖ τετράγωνον ἴσον ἔσται ὅρος τ πολυγώνων. ὅτι πᾶς πολύγωνος πολλαπλασιαζεὶς ὀκτάκις ἔστὶ τ δυάδι ἰλάσσονα τοῦ πλήθους τ γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τ ὑπὸ τ τετράδι ἰλάσσονος τ πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον. συναποδεικνύντος ἅμα ἐ τῆ Τ'ψηλέους ὅρου, καὶ τάξιν τῶν πολυγώνων, ἔξεστὶ δ'εικνῦναι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιζητηθεὶς πολύγωνος εὑρίσκεται. ἔχοντες γὰρ πλευρὰν δεδομένας τινὸς πολυγώνου τὸν ηθ. ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτῆ γωνιῶν, ἔχομεν καὶ τὸν κβ. δοθέντα. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τ ηθ. θμ. ἐ τῆ κβ. ἔχομεν δοθέντα. ὃς ἔστιν ἴσος τῷ κρ. ὥστε ἔχομεν καὶ τὸν κρ. δοθέντα, ἐπεὶπερ δυὰς ἔστὶ ὁ τα. ὥστε ἐ τὸν ὑπὸ τῆ κρ. ἔχομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ὑπὸ τῆ νβ. τετράγωνον ὄντα δοθέντα, ἔχομεν καὶ τ λοιπὸν δοθέντα, ὃς ἐστι τῆ ζητουμένῃ πολυγώνῳ πολλαπλασίων καὶ τὸν ὀκταπλάσιον τῆ κβ. ὥστε διπλοῦς ἐστὶ ὁ ζητούμενος πολύγωνος. ὁμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὑρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτῆ τὸν ηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

o.a.x..ν...β——ρ γ——δ ε.λ——ζ .
ϰ.μ——ξ——θ

O.A.K..N...B——R G——D E.L——Z
H. M——X——T

IN OCTAVAM.

HÆc propoſitio, vt à nobis reſtituta eſt, parum habet difficultatis, pendet eius demonſtratio à ſuperioribus, præſertim à ſexta, ſecunda, & prima, huius, quas idcirco ſuis locis in margine citauimus.

Quod ait Diophantus de numeris triangulis, nimirum, ſi latus cuiuſlibet trianguli ducatur in numerum vnitate maiorem ſeipſo, fit duplum ipſius trianguli, id ſic infertur. Quoniam omnis triangulus ex definitione, eſt ſumma progreſſionis arithmeticæ quæ incipit ab vnitate, & cuius differentia eſt vnitas, patet numerum terminorum, ſeu ipſum latus trianguli æquari maximo termino, proinde ſi lateri addatur vnitas, ſeu minimus terminus, fiet ſumma extremorum. Quamobrem cùm latus trianguli ſeu numerus terminorum, ducetur in numerum vnitate maiorem ſeipſo, hoc eſt in ſummam extremorum, fiet duplum ſummæ omnium terminorum per 4. huius, hoc eſt duplum ipſius trianguli.

Hinc autem innotescit defectus sextæ propositionis vt concipitur à Diophanto, eam restringendo ad solam progressionem arithmeticam quæ incipit ab vnitate, sic enim per eam vix applicari potest hæc octaua propositio numeris triangulis. Etenim requirit hæc propositio vt à numero multitudinis angulorum auferatur quaternarius, vt residui quadratus additus octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, fiat quadratus. At numerus angulorum trianguli est ternarius, à quo sane auferri non potest quaternarius. Euanescit autem hæc difficultas si vniuersalius enuncietur propositio sexta, vt à nobis præstitum est theoremate quinto. Nam per illud theorema octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum, addendus est quadratus interualli inter eundem numerum angulorum binario multatum, & duplum minimi termini, hoc est binarium, quare non refert vtrum numerus angulorum binario multatus sit maior binario, (vt accidit in omnibus polygonis supra quadratum) vel æqualis binario (vt accidit in quadrato) vel minor binario (vt accidit in triangulo) Nam in primo casu à numero angulorum binario multato, auferetur rursus binarius, seu vt vult Diophantus à numero angulorum auferetur quaternarius, & residui quadratus addetur octuplo producti ex polygono in numerum angulorum binario multatum: in secundo casu etiam à numero angulorum binario multato auferetur rursus binarius, & quia nil supererit, nil addetur ad octuplum supradictum, sed huiusmodi octuplum erit numerus quadratus, etenim à numero angulorum quadrati auferendo 2. supereſt 2. cuius octuplum est 16. quo ducto in quemlibet quadratum, patet fieri quadratum.

In tertio denique casu numerus angulorum binario multatus auferetur à binario, & residui quadratus addetur octuplo producti ex triangulo in numerum angulorum binario multatum. Vnde quia numerus angulorum trianguli binario multatus est vnitas, quam auferendo à binario supereſt rursus vnitas, hinc demonstratur quod ait Diophantus propr. 44. lib. 4. omnis triangulus per octo multiplicatus, & adsumens vnitatem, facit quadratum.

Cæterum animaduersione dignum est hanc propositionem non conuerti nisi in triangulis & in quadratis. Quemadmodum enim ex hac propositione sequitur omnem quadratum ductum in 16. efficere quadratum, vt suprà docuimus, sic è conuerso omnis numerus qui ductus in 16. facit quadratum, quadratus est, vt manifestum est, & rursus quemadmodum hac propositione demonstratur, omnem triangulum per octo multiplicatum, & adsumentem 1. efficere quadratum; sic è conuerso omnis numerus cuius octuplum adscita vnitate facit quadratum, triangulus est, vt in promptu est demonstrare.

A. 10. B. 80. C. 81.
F 4. E. 8. D. 9.
G. 10.

Sit numerus A. cuius octuplum B. cui addita vnitate fiat C. quadratus cuius latus D. dico A. esse triangulum. Etenim quia B. par est cùm sit octonarij multiplex, erit C. impar, ac proinde & latus eius D. impar est, quare si sumatur E. vnitate minor quàm D. erit E. par sit ergo illius semissis F. & à latere F. fiat triangulus G. constat igitur octuplum ipsius G. adsumpta vnitate facere quadratum, cuius latus superat vnitate duplum ipsius F. tam ex demonstratis ad 44. 4. quàm ex hac propositione triangulis applicata. Quare cum D. superet vnitate duplum ipsius F. & ipsius D. quadratus sit C. vnde ablata vnitate supereſt B. patet B. esse octuplum trianguli G. sed idem B. ex hypothesi est octuplum numeri A. ergo A. est æqualis triangulo G. Quod erat propositum.

In aliis autem polygonis non conuertitur hæc propositio, quod vno aut altero exemplo probasse sufficiet. Quamuis enim vi huius propositionis omnis pentagonus ductus in 24. & adsumens vnitatem, faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 24. & adsumens 1. faciat quadratum est pentagonus, etenim 2. ductus in 24. & adsumens 1. facit quadratum 49. & tamen 2. non est pentagonus. Rursus quamuis omnis heptagonus, vi huius propositionis ductus in 40. & adsumens 9. faciat quadratum, tamen non omnis numerus qui ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum, statim est heptagonus. Etenim 4. ductus in 40. & adsumens 9. facit quadratum 169. cum tamen 4. non sit heptagonus, & sic de alijs.

PROPOSITIO NONA.

Διδασκαλικώτερον ἢ ὑποδείξομεν τοῖς βουλομένοις ἐυχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων. λαβόντες γὰρ τῶν πλευρὰν ἢ πολυγώνου ἢ ἀεὶ ὑπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸ λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ὑπὸ τὴν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, τῷ γενομένῳ προσθήσομεν ἀεὶ δυάδα, καὶ λαβόντες τὴν ἀπὸ τοῦ γενομένου τετράγωνον, ἀφελοῦμεν

AD docendum autem accommodatius, ostendemus hoc iis qui prompte volunt audire ea quæ quæruntur per methodos. sumpto enim latere multanguli, illud geminabimus, hinc auferemus vnitatem, & reliquum ducemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, producto addemus binarium, quadratumque eius qui sic fit sumentes,

auferemus ab eo quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, reliquumque diuidentes in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, inueniemus quæsitum multangulum. Rursus ipso multangulo dato, inueniemus latus hac arte. Multiplicabimus eum per octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto addemus quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, & inueniemus quadratum, si tamen datus est multangulus. De huius autem quadrati latere, semper auferemus binarium, residuum diuidemus in numerum multitudinis angulorum binario multatum, quotienti addemus vnitatem, & summæ semissem capientes, habebimus quæsiti multanguli latus.

ἀπ' αὐτοῦ ἢ ἀπὸ τῆ τετράδι ἐλάσσονες τοῦ πλήθους τ γωνιῶν. καὶ ἡ λοιπὴ μερίσωμεν εἰς τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τ γωνιῶν. διρήσομεν τὸν ζητούμενον πολύγωνον πάλιν δ' αὖτε πολυγώνου δοθέντος, διρήσομεν αὐτοῦ τὴν πλευράν. πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ὅπερ τὸν ὀκταπλάσιον τῆ δυάδι ἐλάσσονος τῆ πλήθους τ γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες ἢ ἀπὸ τῆ τετράδι ἐλάσσονος τῆ πλήθους τῆ γωνιῶν τετράγωνον, διρήσομεν τετράγωνον, ἀφ' ἧπερ ἡ ὁ ὀκταπλάσιος πολύγωνος. τούτου δὴ τ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφιλόντες ἀεὶ δυάδα, τὸν λοιπὸν μεριοῦμεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τῆ πλήθους τ γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τῆ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ, ἕξομεν τὴν τῆ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

IN NONAM.

NVlla omnino hîc est difficultas, solum moneo has duas regulas paulò aliter tradi in excerptis nondum editis Apofroditi, & Betrubi Rubi architectonis, itemque in Hygini gromatico, nimirum sic.

DATO LATERE INVENIRE POLYGONVM.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, residui semissis erit quæsitus polygonus.

Verbi gratia dato latere 10. si velis hexagonum; quadra 10. fit 100. quem ducito in 4. binario minorem multitudine angulorum, fit 400. hinc aufer 20. qui fit ex latere dato 10. in 2. numerum multitudinis angulorum quaternario multatum, relinquitur 380. cuius semissis 190. est hexagonus à latere 10.

DATO POLYGONO INVENIRE LATVS.

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summæ cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam diuide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæsitum latus.

Vt sit datus hexagonus 190. hunc ducito in 32. octuplum ipsius 4. binario minoris multitudine angulorum, fit 6080. adde 4. quadratum numeri angulorum quaternario multati, fit 6084. cuius latus 78. cui adde 2. numerum scilicet angulorum quaternario multatum, fit 80. quem diuide per duplum ipsius 4. numeri angulorum binario multati, puta per 8. fit quotiens 10. quæsitum latus.

Nos etiam alias multas: & faciles regulas ad inueniendum polygonum dato latere trademus in Appendicis libro 1.

Cæterum quamuis vt monuimus ad præcedentem, neque regulæ Diophanti, neque hæ Apofroditi possint proprie applicari triangulis, quandoquidem in his omnibus regulis oportet à numero angulorum auferre quaternarium, quod in triangulis proprie fieri nequit. Attamen impropriè & per numeros fictos quos vocant, etiam in triangulis hæ omnes regulæ locum habent, quod exemplis fiet manifestum.

Dato enim latere 6. quæratur triangulus per regulam Apofroditi, sumo quadratum ipsius 6. puta 36. quem duco in numerum angulorum binario multatum, puta in 1. fit 36. Tum sumo numerum angulorum multatum quaternario, puta −1. quem duco in datum latus, fit −6. quem aufero à 36. fit 42. cuius semissis 21. est triangulus à latere 6.

Rursus dato triangulo 21. quæro eius latus per regulam Apofroditi. Duco 21. in octuplum

numeri angulorum binario multati, puta in 8. fit 168. & quia numerus angulorum multatus quaternario, eſt — 1. cuius quadratus eſt + 1. addo 1. ad 168. fit quadratus 169. cuius latus 13. cui addo numerum angulorum quaternario multatum, puta — 1. fit 12. quem diuido per duplum numeri angulorum binario multati puta per 2. fit quæſitum latus 6. eademque ratio eſt de regulis à Diophanto traditis.

OBSERVATIO D. P. F.

Propoſitionem pulcherrimam & mirabilem quam nos inuenimus hoc in loco ſine demonſtratione apponemus. In progreſſione naturali quæ ab vnitate ſumit exordium, quilibet numerus in proximè maiorem facit duplum ſui trianguli, in triangulum proximè maioris facit triplum ſuæ pyramidis, in pyramidem proximè maioris facit quadruplum ſui triangulotrianguli, & ſic vniformi & generali in infinitum methodo. Nec exiſtimo pulchrius aut generalius in numeris poſſe dari theorema cuius demonſtrationem margini inſerere nec vacat, nec licet.

PROPOSITIO DECIMA.

Δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρεῖν ποσαχῶς δύναται εἶναι πολύγωνος. ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ αβ. πλῆθος δὲ γωνιῶν ὁ βγ. καὶ κείσθω ἐν τῇ βδ. δυὰς μοὶ ὁ βε. τετρὰς δὲ ὁ γε. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ. ὢν πολύγωνος ἔχει γωνίας ὁσαυτὰς ὅσαί εἰσιν ἐν τῇ βγ. ὁ ἄρα ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. μετὰ τοῦ ἀπὸ βε. τετράγωνον ποιεῖ τετράγωνον. ἔστω αὐτῷ πλευρὰ ὁ ζη. ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς ζη τετράγωνος ἴσος τοῖς ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βε. τετραγώνῳ. κείσθω ἐν τῇ αβ. μονὰς ὁ αθ. καὶ διῃρήσθω ὁ ὀκτάκις ὑπὸ αβ. βδ. εἴση ἡ τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. καὶ εἰς τὴν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρα τὴν αβ. θβ. καὶ τὴν βδ. καὶ κείσθω συναμφοτέρα αβ. θβ. ἴσος ὁ δκ. καὶ μεταβησόμεθα ἐπὶ μὲν τετράκις ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ αβ. θβ. καὶ τοῦ βδ. εἰς τὴν ὑπὸ κδβ. τὴν δὲ τετράκις ὑπὸ αθ. βδ. εἰς τὴν ὑπὸ βδ. δι᾽ ἃς γὰρ ὅσῳ ὁ αβ. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη. ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ ὑπὸ κδβ. καὶ τῇ δὶς ὑπὸ βδ. δι᾽. καὶ τῷ ἀπὸ εἰ τετραγώνῳ ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ βδῖ καὶ τῷ ἀπὸ εἰ τετραγώνῳ ἴσοι εἰσὶ οἱ ἀπὸ τῶν βδ. δι. τριγώνοις. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷτι ὑπὸ κδβ. καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βδ. δε. τετραγώνοις. τῷ δὴ ὑπὸ κδβ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. ἴσον τὸ ὑπὸ κβδ. καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζη. ἄρα ἴσος τῷτι ὑπὸ κβδ. τῷ ἀπὸ δῖ. τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ δκ. ἴσος ὢν τετράκις συναμφοτέρῳ τῷ αβ. βθ. μείζων ἐστὶ τετράκις τῆς αθ. τουτέστι τετράδος, ὧν ὁ βγ. ἐστὶ δυάς. λειπὸς ἄρα ὁ γκ. μείζων δυάδος τῆς γδ. ἡ ἄρα διχοτομία τῆς δκ. πεσεῖται μεταξὺ

α.θ——ζ——ι..δ..γ——ε

ζ——η

β. huius.

DAto numero inuenire quot modis multangulus eſſe poſſit. Eſto datus numerus AB. & multitudo angulorum eius BG. & ſumatur in ipſo BG. binarius GD. & quaternarius GE. & quoniam AB. multangulus exiſtens, tot habet angulos quot ſunt in BG. vnitates, qui fit octies ex AB. in BD. adſcito quadrato ex BE. quadratum facit. Eſto eius latus ZH. igitur quadratus ex ZH. æqualis eſt numero qui fit octies ex AB. in BD. & quadrato ipſius BE. ſumatur in AB. vnitas AT. Itaque qui fit octies ex AB. in BD. diuiditur in eum qui fit quater ex AT. in BD. & in eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in BD. ſumatur ergo DK. æqualis quadruplo vtriuſque AB. TB. & transferamus eum qui fit quater ex vtroque AB. TB. in BD. in eum qui fit ex KD. in BD. loco autem illius qui fit quater ex AT. in BD. ſumamus eum qui fit bis ex BD. in DE. (etenim DE. eſt binarius) igitur quadratus ipſius ZH. æqualis erit producto ex KD. in DB. & ei qui fit bis ex BD. in DE vna cum quadrato ex BE. atqui duplo producti ex BD. in DE. vna cum quadrato ex BE. æquales ſunt quadrati ex BD. DE. ergo & quadratus ex ZH. æqualis erit producto ex KD. in DB. & quadratis ipſorum BD. DE. at producto ex KD in DB. vna cum quadrato ex DB. æqualis eſt qui fit ex KB. in BD. igitur & quadratus ex ZH. æqualis

A.T——B——E..D..G——K

Z——H

igitur

A. T—B—E. D. G—L—K
Z—H—N—M.

erit producto ex K B. in B D. & quadrato ex DE. & quoniam D K. æqualis existens quadruplo vtriusque A B. B T. maior est quadruplo ipsius A T. hoc est quaternario ; & quaternarij semissis est binarius D G. reliquus vtique G K. maior erit binario G D. igitur si diuidatur D K. bifariam in L. cadet L. inter G. & K. itaque loco quadrati ex L B. sumamus quadratum ex L D. cum producto ex K B. in B D. quandoquidem D K. secatur bifariam in L. & additur ei D B. ideoque producto ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquatur quadratus ex L B. igitur quadratus ex L B. superat quadratum ex L D. producto ex K B. in B D. quocirca quadratus ex Z H. æqualis est interuallo quadratorum B L. L D. & quadrato D E. addatur vtrimque quadratus D L. igitur quadrati Z H. D L. æquales sunt quadratis B L. D E. cùm autem duo numeri simul ; duobus simul æquales sunt, sunt & permutando æqualia eorum interualla. igitur interuallum quadratorum L D. D E. æquale est interuallo quadratorum L B. Z H. & quoniam E D. æqualis est D G. & additur illis G L. productus vtique ex E L. in L G. cum quadrato G D. æquatur quadrato D L. quamobrem interuallum quadratorum L D. D G. seu quadratorum L D. D E. quod est productus ex E L. in L G. æquale est interuallo quadratorum L B. Z H. ponatur ipsi B L. æqualis Z M. nam B L. maior est quam Z H. quoniam quadrati Z H. D L. ostensi sunt æquales quadratis B L. E D. cæterum quadratus D L. maior est quadrato D E. (quandoquidem maior est quadrato D G.) idcirco & quadratus B L. maior est quadrato Z H. ponatur ergo ipsi B L. æqualis Z M. erit igitur interuallum quadratorum Z M. Z H. æquale producto ex E L. in L G. & quoniam D K. quadruplus est vtriusque A B. B T. at D K. bifariam secatur in L. erit vtique D L. duplus vtriusque A B. B T. atqui D G. duplus est vnitatis A T. ergo reliquus G L. duplus est duorum B T. igitur G L. quadruplus est ipsius B T. & B T. est quarta pars ipsius G L. sed & A T. vnitas est quarta pars quaternarii E G. ergo totus A B. totius E L. quarta pars est, sed & T B. ostensus est esse quarta pars ipsius L G. igitur productus ex A B. in B T. est sextadecima pars producti ex E L. in L G. productus ergo ex E L. in

α. θ—ς—ι. δ. ιγ—λ—κ
ζ—η—ν—μ

τὴν ΖΚ ἴσην τὸ λ. καὶ μεταβησόμεθα ἀπὸ ϛλ. εἴτε ἀπὸ λδ. καὶ τὸν ὑπὸ κϛδ ἐπείπερ ἡ δΚ τέτμηται δίχα κ τὸ λ. πρόσκειται δὲ ἡ δϚ. καὶ ἔστι τὸ τέτραπλευρον ὑπὸ κϛδ. καὶ τὸ ἀπὸ λδ. ἴσον ϛ ἀπὸ λϛ. καὶ τὸ ἀπὸ λκ ἄρα τὸ ἀπὸ λδ. ὑπερέχει τῷ ὑπὸ κϛδ. καὶ ὁ ἀπὸ τὴν ζῆ ἄρα τετράγωνος ἴσος τῷ τε ἀπὸ ϛλ. λδ. ὑπερεχῇ καὶ τῷ ἀπὸ δΖ τετραγώνῳ. κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ δλ. καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ζῆ. δλ. ἄρα ἴσοι τετράγωνοί εἰσι ϛῖς ἀπὸ τε βλ. λῖ τετραγώνοις. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ, δυσὶν ἀνθμοῖς ἴσοι ὦσι, καὶ ἑναλλὰξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν μένουσι, καὶ ἄρα τε ἀπὸ τῆ λδ. δῖ ὑπερεχὴ ἴση τῇ ΖΘ. λβ. ζῆ. ὑπερεχῇ. καὶ ἐπεὶ ὁ ιδ. τῷ δγ. ἴσος, πρόσκειται ϗ ὁ γλ. τὸ ἄρα ὑπὸ ιλγ. μϛ τε ἀπὸ γδ. ἴσον τῷ ἀπὸ δλ. ἡ ἄρα ΖΘ ἀπὸ τῆ λδ. δΓ. ὑπερέχῃ, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τῆ λδ. δῖ. ἥτις ὑπερέχει ὁ ὑπὸ ιλγ ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ λβ. ζῆ. κείσθω τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. μείζων γὰρ ὑπερέχει ὁ ϛλ τε ζῆ. ἐπείπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ζῆ. δλ τετράγωνα ἴσα ϛῖς ἀπὸ ϛλ. εδ τετραγώνοις. λοιπὸν τὸ ἀπὸ δλ. μεῖζον ὑπερέχει τε ἀπὸ δε, ἐπείπερ κ τῇ ἀπὸ δγ. μείζονι ὑπερέχει, ὥστε κ τὸ ἀπὸ ϛλ. τε ἀπὸ ζῆ. μεῖζον ὑπερέχει. κείσθω ὃν τῷ βλ. ἴσος ὁ ζμ. ἔσται δὴ κ ἡ τῶν ἀπὸ ζμ. ζῆ. ὑπερεχὴ ἴση τῷ ὑπὸ ιλ. λΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ δΚ. τετραπλασίων ὑπερέχει συναμφοτέρου τοῦ αβ. βθ. ὁ δὲ δΚ. δίχα τέτμηται κ τὸ λ. καὶ ὁ δλ. ἄρα δίπλασίων ὑπερέχει τε αβ. βθ. ὧν ὁ δγ. δίπλασίων ὑπερέχει τῆ αβ. λοιπὸς ἄρα ὁ γλ. δίπλασίων ἐστὶ δύο τῶν βθ. τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ γλ. τοῦ θβ. ὥστε τέταρτον μέρος ὑπερέχει ὁ θβ. τῆ λγ. ἀλλὰ κ ἡ αθ. μόνας τέταρτόν ὑπερέχει τῆς ιγ. τετράδος. ὅλος ἄρα ὁ αϚ τέταρτόν ὑπερέχει μέρος τῆ ιλ. ἐδείχθη δὲ κ ὁ θβ τῆ λγ. μέρος τέταρτον. τὸ ἄρα ὑπὸ αϚ. θβ. ἑκκαιδεκάκις ὑπερέχει τῆ ὑπὸ ιλ. λγ. τὸ ἄρα ὑπὸ ιλ. λγ. ἴσον ϗ ἑκκαιδεκάκις ὑπὸ αϚ. θβ. ἐδείχθη δὲ κ τὸ ὑπὸ ιλ. λγ. ἴσον τῇ τε ἀπὸ μζ. ζῆ. ὑπερεχῇ. κ τὸ ἑκκαιδεκάκις ἄρα ὑπὸ αϚ. θβ. ἴσον τῇ τε ἀπὸ μζ. ζῆ. ὑπερεχῇ, τουτέστι τῷ ἀπὸ μῆ. κ

πρὸ δὲς ὑπὸ ζη. μῦ. ὧν ὁ ἐκκαιδεκάκις ὑπὸ αϛ. ϟϑ. ἴσος τῷδε ὑπὸ μῦ. καὶ τῷ δὲς ὑπὸ ζη. μῦ. ὧν ἄρτιός ἐστι ὁ μῦ. τέτμηται δίχα κϛ τὸ ν.

L G. æquale est producto ex A B. in B T. sedecies, sed iam ostensum est productum ex E L. in L G. æquari interuallo quadratorum M Z. Z H. ergo qui fit sedecies ex A B. in B T. æquatur interuallo quadratorum M Z. Z H. hoc est quadrato M H. & duplo producti ex Z H. in H M. quare qui fit sedecies ex A B. in B T. æqualis est quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. quamobrem H M. par est. Secetur bifariam in N.

IN DECIMAM.

Quamuis propositionis huius demonstratio tam in codice regio, quam in vaticano atque etiam in eo quem præ manibus habuit Xilander, sit imperfecta, & multa desint, quæ diuinare meum non est, cum præterea neque ipse Diophanti scopus mihi satis perspectus sit, tamen quæcunque reperi, à mendis repurgata perfectæ restitui sanitati, vt ex apta syllogismorum, atque adeo verborum omnium connexione æstimabit prudens lector. si quæ sunt autem quæ prima fronte obscuriora videantur, ea sequenti adnotatione fient perspicua.

Primo quod ait Diophantus duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquari quadratis ex B D. D E. sic probatur. Duplum producti ex B D. in D E. æquatur duplo producti ex B E. in E D. & duplo quadrati E D. quare addendo vtrimque quadratum ex B E. erit duplum producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquale duplo producti ex B E. in E D. quadrato ex B E. semel, & quadrato ex E D. bis, sed quadratis ipsorum B E. E D. cum duplo producti ex B E. in E D. æquatur quadratus totius B D. igitur duplo producti ex B D. in D E. cum quadrato ex B E. æquantur quadrati ex B D. D E. quod erat demonstrandum.

3 secundi.

4. secundi.

A. T——B——E. D. G——L——K
Z——H——N——M

Secundo quod ait productum ex K D. in D B. cum quadrato ex D B. æquari producto ex K B. in B D. patet per tertiam 2. Euclidis.

Tertio, quod ait secto D K. bifariam in L. & addendo ei B D. productum ex K B. in B D. cum quadrato ex L D. æquari quadrato totius L B. patet per 6. 2. Euclidis.

Quartò, quod ait ex eo quod quadrati Z H. D L. æquales sunt quadratis B L. D E. sequi quadratorum D L. D E. idem esse interuallum, quod & quadratorum B L. Z H. id sic infertur, quia quadrati D L. Z H. æquales sunt quadratis B L. D E. sunt in arithmetica proportionalitate quadrati D L. B L. D E. Z H. quare & permutando sunt arithmeticè proportionales quadrati D L. D E. B L. Z H. quod est propositum.

4. primi porism.

7. primi porism.

Quintò, quod ait secto E G. bifariam in D. & addendo illi G L. productum ex E L. in G L. cum quadrato G D. æquari quadrato D L. nil aliud est quàm 6. 2. Euclidis.

Sextò, quod ait B L. maiorem esse quàm Z H. ita probatur, quoniam quadrati D L. Z H. ostensi sunt æquales quadratis B L. D E. est in arithmetica proportionalitate quadratus D L. ad quadratum D E. sicut quadratus B L. ad quadratum Z H. sed quadratus D L. maior est quadrato D E. quia D L. maior est quam D E. cum contineat D G. æqualem ipsi E D. & præterea G L. igitur & quadratus B L. maior est quadrato Z H. ac proinde B L. maior est quàm Z H. quod erat demonstrandum.

4. primi porism.

Denique quod ait, ex eo quod productus sedecies ex A B. in B T. æquatur quadrato H M. & duplo producti ex Z H. in H M. hinc sequi ipsum H M. esse numerum parem, sic probatur. Productum sedecies ex A B. in B T. binarius metitur, quandoquidem binarius metitur numerum 16. qui metitur eundem productum, sed & idem binarius metitur duplum producti ex Z H. in H M. vt euidens est. ergo idem binarius metitur reliquum quadratum H M. ac proinde quadratus H M. par est, ac per consequens & ipse H M. par est. quod erat intentum.

Hæc ad librum Diophanti de numeris polygonis adnotasse sufficiat. Quoniam vero hic liber mutilus est, & alia multa scitu digna tum theoremata, tum problemata excogitari possunt de numeris polygonis, præsertim de eorum progressione, visum est ea duobus sequentibus libris persequi, quos ideireo titulo Appendicis ad librum de numeris polygonis insignire voluimus. Sed & præterea, ad calcem libri primi, pulcherrimi corollarij loco, Problematis huius Diophantæi enodationem feliciter, vt spero, apponemus.

ΤΕΛΟΣ.

CLAVDII GASPARIS BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.

LIBER PRIMVS.

PROPOSITIO PRIMA.

IN progreſſione arithmetica, quilibet terminorum poſt minimum, continet minimum ſemel, & differentiam toties, quotus quiſque eſt a minimo; nimirum primus à minimo ſemel; ſecundus bis; tertius ter & ita deinceps.

E. 2. F. 4. G. 6.
A. 3. B. 5. C. 7. D 9.

Sint in progreſſione arithmetica A B C D. & ſit differentia E. cuius duplum F. & triplum G. & ſic deinceps, dico B. continere A. & F. atque etiam D. continere A. & G. & euidens eſt ex ſola definitione progreſſionis arithmeticæ. Aliter per 3. Diophanti D. continet A. ſemel, & differentiam E. ſecundum numerum terminorum vnitate multatum id eſt ter, & eadem de cauſa C. continet A. ſemel, & E. bis, & rurſus B. continet A. & E. ſemel eademque ratio ſi plures exponantur numeri. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In progreſſione arithmetica, ſi differentia ducatur in triangulum numeri terminorum, vnitate multati, & producto addatur quod fit ex numero terminorum in minus extremum, fiet ſumma terminorum omnium.

E. 2.
A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Sint A B C D. in progreſſione arithmetica, cuius differentia E. dico ſi triangulum lateris vnitate minoris numero terminorum ducatur in E. & producto addatur quod fit ex ipſo numero terminorum in A. fieri ſummam omnium A B C D. nam per præced. A. continetur ſemel in quolibet ipſorum A B C D. & præterea B. continet E. ſemel; C. bis continet eundem E. & D. continet ter eundem E & ſic deinceps. Quare patet E. contineri in ipſis B C D. ſecundum vnitates trianguli cuius latus eſt numerus ipſorum B C D. minor ſcilicet vnitate quàm numerus omnium A B C D. quare patet propoſitum.

PROPOSITIO TERTIA.

Dato latere polygoni, ſi numerus angulorum binario multatus ducatur in datum latus vnitate multatum, & qui producitur, binario auctus ducatur in datum latus, fiet duplum polygoni.

H. 3. G. 4. F. 5.
A. 1. B. 4. C. 7 D. 10. E 13.
K. 12. L. 14. M. 70.

Sit F. datum latus polygoni, vnde ablata vnitate ſuperſit G. & ſit H. numerus angulorum binario multatus, quo ducto in G. fiat K. qui auctus binario faciat L. quo ducto in F. fiat M. dico M. eſſe duplum polygoni à latere F. exponantur termini A B C D E. in progreſſione arithmetica conſtitutiua polygoni à latere F. erit ergo ſumma omnium A B C D E. æqualis polygono illi, & erit A. vnitas, H. differentia, numerus terminorum ipſe F. vt conſtat ex demonſtratis à Diophanto. Quoniam igitur interuallum extremorum A E. per tertiam Diophanti æquatur producto ex H. in G. nempe ipſi K. & addendo interuallum numerorum duorum, duplo minoris, fit ſumma ipſorum; patet addito binario qui duplus eſt ipſius A. ad K. aggregatum L. æquari ſummæ ipſorum A E. Quamobrem qui fiet ex numero terminorum F. in ſummam extremorum L. nimirum M. æquatur duplo ſummæ omnium per quartam Diophanti, ſeu duplo polygoni à latere F. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVARTA.

Si latus polygoni ducatur in ſeipſum vnitate multatum & productum ducatur in numerum angulorum binario multatum, fiet numerus qui adſcito duplo lateris, æquabitur duplo polygoni.

A. 5. B. 4. C. 3.
D. 70. E. 60. F. 20.
G. 70. H. 14. K. 12.

Sit A. latus polygoni & B. vnitate minor, & C. numerus angulorum binario multatus ductoque A. in B. fiat F. quo ducto in C. fiat E. & ad ipſum E. addendo duplum lateris A. fiat D. dico D. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in C. fiat K. cui addito binario fiat H. quo ducto in A. fiat G. eritque G. per præced. duplum polygoni à latere A. quare probandum ipſos D G. eſſe æquales. Quoniam igitur idem B. ductus in A. & in C. producit F. & K. erit vt A. ad C. ſic F. ad K. quare ex A. in K. fiet idem E. qui fit ex C. in F. cum itaque H. contineat K. & binarium, productus ex A. in H. nempe G. æquatur productis ex A. in K. nempe ipſi E. & ex A. in binarium, nempe duplo ipſius A. At eidem E. & duplo A. æquatur D. ex hypotheſi. ergo D G. ſunt æquales, & ideo D. eſt duplus polygoni à latere A. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO QVINTA.

Si quadratus dati lateris ducatur in numerum angulorum binario multatum, & à producto auferatur quod fit ex dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, reſiduum eſt duplum polygoni à dato latere.

K. 42. L. 210. M. 14. N. 224.
A. 7. B. 6. C. 5. D. 3.
E. 49. F. 245. G. 21. H. 224.

Sit A. datum latus, & B. vnitate minor, & ſit C. numerus angulorum binario multatus, & D. idem numerus angulorum multatus quaternario, ſeu numerus binario minor ipſo C. & ſit E. quadratus ipſius A. quo ducto in C. fiat F. vnde auferendo G. qui fit ex D. in A. ſuperſit H. dico H. eſſe duplum polygoni à latere A. etenim ducto B. in A. fiat K. quo ducto in C. fiat L. cui addendo M. duplum ipſius A. fiat N. conſtat ex præced. ipſum N. eſſe duplum polygoni à latere A. Probandum ergo N. H. æquales eſſe. Quoniam itaque A. excedit B. vnitate qui fit ex A. in A. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex A. in B. nempe ipſi K. & ex A. in vnitatem, nempe ipſi A. cum ergo K A. æquentur E. qui fit ex C. in E. nempe F. æquatur iis qui fiunt ex C. in K. nempe L. & ex C. in A, ſed quoniam C. ſuperat D. binario, productus ex C. in A. æquatur G. producto ex D. in A. & duplo ipſius A. nempe ipſi M. igitur F. æquatur tribus numeris L. M. G. Quamobrem auferendo vtrimque eundem G. remanent æquales hinc quidem H. inde vero L M. ſeu illis æqualis N. Quare cum N. oſtenſus ſit duplus polygoni à latere A. erit & H. eiuſdem polygoni duplus. Quod demonſtrandum erat

SCHOLIVM.

Hæc eſt demonſtratio regulæ quam tradunt Hyginus & Apofroditus, ad inueniendum polygonum dato latere, de qua ſupra ad nonam Diophanti.

PROPOSITIO SEXTA.

Dato latere polygoni, ſi triangulus à dato latere vnitate multato ducatur in numerum angulorum binario multatum, fit numerus qui adſcito dato latere æquatur ipſi polygono.

G. 42. H. 210.
A. 7. B. 6. C. 5.
D. 21. E. 105. F. 112.

Sit datum latus A. & numerus vnitate minor B. & ſit C. numerus angulorum binario multatus, triangulus autem à latere B. eſto D. quo ducto in C. fiat E. cui addendo datum latus A. fiat F. dico F. eſſe polygonum à latere A. etenim ducatur B. in A. & fiat G. quo ducto in C. fiat H. Tunc patet per octauam Diophanti ipſum G. eſſe duplum trianguli à latere B. nempe ipſius D. quare cùm ex eodem C. in ipſos G D. fiant H E. erit & H. duplus ipſius E. Itaque cùm ad H. addetur duplum ipſius A. & ad E. addetur A. vnde fit F. erit H. cum duplo A. duplus ipſius F. Atqui H. cum duplo A. eſt duplus polygoni à latere A. per quartam huius. Ergo F. eſt huiuſmodi polygonus. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Si quilibet polygonus adſciſcat ſuum latus ſecundum numerum angulorum binario multatum, & præterea vnitatem, fiet polygonus ſimilis proximè maior.

F. 51. E. 16. D. 35.
B. 6. A. 5. C. 3.
G. 1. H. 4. K. 7. L. 10. M. 13. N. 16.

Esto polygonus D. cuius latus A. cui addita vnitate fiat B. & sit numerus angulorum binario multatus C. Et productus ex A. in C. vnitate auctus esto E. additisque simul E D. fiat F. dico F. esse polygonum proximè maiorem ipso D. seu à latere B. Etenim exponatur progressio arithmetica constitutiua huiusmodi polygonorum, & sumantur in ea tot termini G. H. K. L. M. N. quot sunt in B. vnitates. Igitur per octauam Diophanti differentia progressionis est C. & summa omnium est polygonus à latere B. At summa ipsorum G. H. K. L. M. est polygonus D. Polygonus ergo à latere B. excedit ipsum D. numero N. Atqui per tertiam Diophãti N. continet vnitatem G. & productum ex differentia C. in A. vnitate minorem numero terminorum, & productus ex C. in A. vnitate auctus est E. Igitur E. æquatur ipsi N. cum ergo vt ostensum est compositus ex N D. æquetur polygono à latere B. vtique compositus ex E D. nempe F. erit huiusmodi polygonus quod erat propositum.

PROPOSITIO OCTAVA.

Si triangulus collateralis polygono ducatur in numerum angulorum binario multatum, & a producto auferatur, quod fit ex latere polygoni in numerum angulorum ternario multatum, residuum æquabitur ipsi polygono.

Esto polygonus K. cuius latus A. & numerus angulorum binario multatus B. vnde ablata vnitate superst C. ternario minor numero angulorum, sitque D. triangulus à latere A. quo ducto in B. fiat E. ductoque C. in A. fiat F. dico si F. auferatur ex E. relinqui polygonum K. etenim sumatur G. triangulus à latere vnitate minore ipso A. ductoque B. in G. fiat H. vnde per sextam huius additis simul A. & H. fiet K. Quia igitur per præced. si ad G. addatur vnitas, & suum latus fiet D. vnitas autem & latus ipsius G. æquantur A. erit D. æqualis duobus A G. simul. quamobrem qui fit ex B. in D. nempe E. æquatur iis qui fiunt ex B. in A. & ex B. in G. qui est H. Productus autem ex B. in A. (quandoquidem B. superat vnitate ipsum C.) æquatur producto ex C. in A. nempe F. & præterea ipsi A. Igitur E. æquatur tribus numeris H. A. F. vnde auferendo vtrimque eundem F. remanet summa duorum A. H. nempe polygonus K. æqualis ei qui restat si ex E. auferatur F. quod demonstrandum erat.

D. 15. E. 45. F. 10.
A. 5. B. 3. C. 2.
G. 10. H. 30. K. 35.

SCHOLIVM.

Ex multis harum propositionum, ad inueniendum polygonum dato latere collige canones eleganter, & quidem faciliores & compendiosiores eo quem tradit Diophantus propositione nona.

I. CANON.

Ducito datum latus vnitate multatum in numerum angulorum binario multatum; & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. constat per tertiam huius.

Vt dato latere 7. si quaratur eius pentagonus: latus vnitate multatum est 6. numerus angulorum binario multatus 3. quo ducto in 6. fit 18. qui binario auctus fit 20. quo ducto in 7. fit 140. cuius semissis 70. est quæsitus pentagonus.

II. CANON.

Ducito datum latus in numerum vnitate minorem, productum ducito in numerum angulorum binario multatum producto adde duplum lateris, fiet duplum polygoni per quartam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 7. in 6. fit 42. quo ducto in 3. fit 126. cui si addas duplum 7. nimirum 14. fit vt prius 140. cuius semissis 70. est quæsitus pentagonus.

III. CANON.

Ducito quadratum dati lateris in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit à dato latere in numerum angulorum quaternario multatum, residuum erit duplum polygoni per quintam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ducito 49. in 3. fit 147. hinc aufer productum ex 7. in 1. nempe 7. residuum est vt prius 140. cuius semissis 70. est quæsitus pentagonus.

IV. CANON.

Sume triangulum à latere dato vnitate multato, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde datum latus, fiet quæſitus polygonus per ſextam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum à latere 6. nempe 21. quo ducto in 3. fit 63. cui ſi addas datum latus 7. fit pentagonus quæſitus 70.

V. CANON

Sume triangulum à dato latere, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer quod fit ex latere dato in numerum angulorum multatum ternario, reſiduum erit quæſitus polygonus per octauam huius.

Vt dato eodem pentagoni latere 7. ſume triangulum illius nempe 28. quo ducto in 3. fit 84. vnde aufer quod fit ex 7. in 2. nempe 14. reſiduum 70. eſt quæſitus pentagonus, vide rurſus omnium expeditiſſimum Canonem in ſcholio vndecimæ.

PROPOSITIO NONA.

Si numerus ſecetur in duas partes, triangulus totius æqualis eſt triangulis partium & plano ſub partibus comprehenſo.

D.....E...F. G
A.....B...C
K 72.

Numerus A C. ſecetur in A B. B C. dico triangulum totius A C. æquari triangulis partium A B. B C. & plano ſub A B. B C. ſumatur D E. æqualis ipſi A B. & ei apponatur E F. æqualis B C. & adiiciatur ei vnitas F G. conſtat ergo D G. ſuperare A C. vnitate, ſicut & E G ſuperat B C. vnitate. Ducto inſuper A C. in D G. fiat K. patet ergo per octauam Diophanti vel tertiam huius, ipſum K. eſſe duplum trianguli à latere A C. quia vero ducere A C. in D G. idem eſt atque ducere ſigillatim A B. in D E. E F. F G. & B C. in D E. E G. erit K. æqualis productis illis omnibus. At ducere A B. in D E. ſibi æqualem & in vnitatem F G. idem eſt atque ducere A B. in numerum vnitate maiorem ſeipſo, vnde fit duplum trianguli ipſius A B. ducere autem A B. in E F. idem eſt atque ducere A B. in B C. igitur patet ex ductu A B. in totum D G. fieri duplum trianguli A B. & planum ſub A B. B C. ſimiliter productus ex B C. in D E. æquatur plano ſub A B. B C & productus ex B C. in E G. qui vnitate maior eſt, æquatur duplo trianguli ipſius B C. igitur productus ex B C. in totum D G. æquatur duplo trianguli ipſius B C. & plano ſub A B. B C. quamobrem compoſitum ex productis ex A B. in D G. & ex B C. in D G. nempe productus ex A C. in D G. nimirum ipſe K. æqualis eſt duplo triangulorum A B. B C. & duplo plani ſub A B. B C. igitur dimidium ipſius K. nempe triangulus A C. æquatur triangulis A B. B C. & plano ſub A B. B C. quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur duplum cuiuſlibet trianguli adſumpto collaterali quadrato, facere triangulum à latere duplicato; quod cuidens eſt ſi A B. B C. ponantur æquales.

PROPOSITIO DECIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & plano ſub partibus comprehenſo, ſumpto ſecundum numerum angulorum binario multatum.

D 3. E 2.
A.....B....C.
F. 15. G. 10. H. 20.
K. 45. L. 30. M. 60.
N. 10. P. 8. Q. 57.
R. 35. S. 22. T. 117.

Sit numerus A C. ſectus in A B. B C. & ſit D. numerus angulorum binario multatus, & E. vnitate minor. dico polygonum totius A C. æquari polygonis ſimilibus partium A B. B C. & producto ex D. in planum ſub A B. B C. comprehenſum. Etenim ſumantur F. & G. trianguli ipſorum A B. B C. & ſit H. planus ſub A B. B C. Tum ducto D. in ipſos F. G. H. ſigillatim, fiant K. L. M. & ducto E. qui eſt numerus angulorum ternario multatus in A B. B C. fiant N. P. quibus detractis ab ipſis K L. relinquantur R. S. quorum ſumma Q. qua addita ad M. fiat T. Patet itaque ex ſola conſtructione & per octauam huius numeros R. S. eſſe polygonos ipſorum A B. B C. quorum ſumma Q. addita ad M. (qui fit ex D. in H. planum ſub partibus) fiet vtique T. continens polygonos partium, & planum ſub partibus ſumptum ſecundum

numerum angulorum binario multatum. Reſtat ergo probandum ipſum T. eſſe polygonum ſimilem totius A C. Quoniam ergo F G. ſunt trianguli partium A B. B C. & H. planus ſub partibus erit aggregatum ipſorum F. G. H. æquale triangulo totius A C. per præced. Quare cùm ex D. in ipſos F. G. H. fiant K. L. M. erit aggregatum ipſorum K. L. M æquale producto ex D. in triangulum ipſius A C. Quare cum etiam N. P. æquentur producto ex E. in A C. & ut ſublatis de aggregato ipſorum K. L. M. ſuperſint R. S. M. ſeu T. patet T. eſſe id quod reſtat ſi productus ex E. in A C. auferatur à producto ex D. in triangulum eiuſdem A C. ergo T. eſt polygonus ipſius A C. per octauam huius. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Quod peculiariter de triangulis oſtenſum eſt in precedenti, & ab Euclide de quadratis quarta ſecundi. Hîc vniuerſaliter oſtenditur de omnibus polygonis, vt merito inter pulcherrimas propoſitiones hac cenſeri debeat quam primus omnium (quod ſciam) ego demonſtrauit.

Et quemadmodum quartam ſecundi extendimus ad ſectionem numeri in quotlibet partes. Sic & iſtam vniuerſalius proponemus, hoc ſcilicet modo.

Si numerus ſecetur in quotlibet partes, polygonus totius æqualis eſt ſimilibus polygonis partium, & productis ex qualibet parte in quamlibet aliam toties ſumptis quot ſunt vnitates in numero angulorum binario multato.

K. 3.
A...B...C...D

Eſto enim A D. ſectus in quotlibet partes A B. B C. C D. & ſit K. numerus angulorum binario multatus. Dico polygonum totius A D. æquari polygonis ſingulorum A B. B C. C D. & productis ex qualibet parte in quamlibet ſumptis ſecundum K. conſideretur prius A D. vt ſectus in duas partes A C. C D. Tunc per hanc propoſitionem decimam polygonus totius æquatur polygonis ipſorum A C. C D. & producto ex A C. in C D. ducto in K. ſimiliter polygonus A C. æquatur polygonis ipſorum A B. B C. & producto ex A B. in B C. ducto in K. Quare cum & productus ex A C. in C D. ductus in K. æquetur productis ex A B. & B C. in C D. ductis in K. patet polygonum totius æquari polygonis partium A B. B C. C D. & productis ex qualibet in quamlibet ductis in K. quod ſi ponatur numerus diuiſus in quatuor partes, ſimile concludetur per id quod de diuiſione in tres oſtenſum eſt, & ſic in infinitum. Ergo patet propoſitum.

PROPOSITIO VNDECIMA.

Quilibet polygonus componitur ex tot triangulis, quot vnitates continet numerus angulorum binario multatus. Ex his autem vnus eſt collateralis ipſi polygono, reliqui vero à latere proximè minori.

A. 51.
D. 3. B. 6. C 5.

Eſto quilibet polygonus A. cuius latus B. quod vnitate multatum ſit C. & numerus angulorum binario multatus eſto D. dico polygonum A. componi ex tot triangulis quot ſunt in D. vnitates, quorum vnus eſt ab ipſo latere B. reliqui à latere C. Etenim per ſextam huius polygonus A. æquatur producto ex D. in triangulum abs C. adſcito latere B. ſed ſi vni triangulorum abs C. concipiatur addi B. fiet triangulum ab ipſo B. per ſeptimam huius (quia B. continet C. & præterea vnitatem) Patet ergo polygonum A. componi ex tot triangulis quot ſunt in D. vnitates quorum vnus eſt à latere B. reliqui à latere C. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc etiam elicietur Canon ad inueniendum polygonum dato latere. Nam ſi quæratur pentagonum à latere 6. quia numerus angulorum binario multatus eſt 3. conſtat quæſitum pentagonum componi ex tribus triangulis quorum vnus eſt à latere 6. reliqui duo à latere 5. ſi ergo ſumas huiuſmodi triangulos 21. 15. 15. horum ſumma erit 51. quæſitus pentagonus. Quia vero ſi datum latus ducatur in ſeipſum vnitate auctum ſit duplum trianguli à dato latere, & ſi idem latus ducatur in ſeipſum vnitate multatum, ſit duplum trianguli proximè minoris, formari poterit Canon omnium elegantiſſimus & expeditiſſimus.

CANON.

Dato lateri vnitate aucto adde ipſummet latus vnitate multatum toties, quot ſunt vnitates in numero angulorum multato ternario, ſummam ductio in datum latus, fiet duplum quæſiti polygoni.

Vt ſi quæratur pentagonum à latere 6. adde ad 7. duplum ipſius 5. nempe 10. fiet 17. quo ducto in datum latus 6. fit 102. cuius ſemiſſis 51. eſt quæſitus pentagonus.

ALITER.

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, reſiduum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

Vt in dato exemplo ducito 6. in 3. fit 18. hinc aufer 1. reſtant 17. quæ ducta in 6. faciunt 102. vt prius, cuius ſemiſſis 51. Quoniam vero conuerſum huius propoſitionis vtile eſt ad perficiendum vltimum problema Diophanti vt ſuo loco patebit, operæpretium eſt illud demonſtrare, nimirum.

Si quilibet numerus ducatur in quemlibet triangulum, & producto addatur triangulum proxime maius, totum erit numerus polygonus, collateralis quidem maiori triangulo, ſed tot angulorum duobus amplius, quot ipſe triangulis conſtat.

G. 144. H. 189. K. 189.
A. 36. B. 45. C. 9.
D. 4. E. 5. F. 7.

Eſto A. quilibet triangulus, & proxime maior B. cuius latus C. Tum ſumatur quilibet numerus D. qui vnitate auctus fiat E. & huic addendo binarium fiat F. & ducto D. in A. fiat G. cui addendo B. fiat H. Patet ergo H. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. etenim H. conſtat ex triangulo B. & numero G. qui continet toties triangulum A. quot ſunt vnitates in D. quare cum E. ſuperet D. vnitate, patet H. tot triangulis conſtare quot ſunt vnitates in E. cum igitur F. ſit binario amplior quàm E. dico H. eſſe polygonum à latere quidem C. ſed tot angulorum quot ſunt vnitates in F. etenim ſi non ſit, ſumatur talis polygonus K. facile eſt oſtendere K. æquari ipſi H. Quia enim K. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. ſequitur per hanc vndecimam propoſitionem ipſum K. tot conſtare triangulis quot ſunt vnitates in E. quorum vnum collaterale eſt ipſi K. hoc eſt æquale ipſi B. reliqua æqualia ſunt ipſi A. ſed & H. iiſdem prorſus triangulis conſtat ex conſtructione. Igitur K. eſt æqualis ipſi H. ac proinde H. eſt polygonus à latere C. tot angulorum, quot ſunt vnitates in F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DVODECIMA.

Si quotlibet polygoni collaterales ordinate diſponantur, ij cum ſuo communi latere conſtituent progreſſionem arithmeticam, cuius differentia erit triangulus ab eodem latere vnitate multato.

H. 1. K. 2. L. 3. M. 4.
A. 7. B. 28. C. 49. D. 70. E. 91.
F. 6. G. 21.

Sit A. datum latus cuius triangulus B. quadratus C. pentagonus D. hexagonus E. & ſic deinceps. ſitque F. minor vnitate quam A. cuius triangulus G. dico ipſos A B C D E. conſtituere progreſſionem arithmeticam cuius differentia eſt G. etenim cum numeri angulorum ipſorum B C D E. ſint numeri 3. 4. 5. 6. & ſic deinceps per additionem vnitatis creſcentes, ſi ſumantur H K L M. numeri angulorum binario multati erunt hi 1. 2. 3. 4. qui etiam per additionem vnitatis creſcent. Itaque quoniam per 7. huius, G. adſciſcens A. maiorem vnitate quam ſuum latus F. facit triangulum B. patet G. eſſe differentiam duorum A B. Rurſus quia per præced. ſinguli C D E. continent tot triangulos quot ſunt vnitates ſingulis K. M. quorum vnus eſt B. reliqui omnes æquales ipſi G. patet C. continere B. & ipſum G. ſemel, at D. continere B. & inſuper G. bis, atque etiam E. continere B. & ipſum præterea G. ter, & ſic in infinitum quilibet altior polygonus continet B. & adhuc ipſum G. ſemel amplius quam antecedens polygonus. Conſtat igitur per primam huius G. eſſe differentiam per quam progrediuntur ipſi A B C D E. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Hinc elicitur Canon ad inueniendam ſummam quotlibet polygonorum collateralium ordinate diſpoſitorum dato latere, vt ſi quæratur ſumma quadrati, pentagoni, hexagoni, heptagoni & octogoni à latere 4.

CANON.

Ducito triangulum lateris vnitate multati in numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum, producto adde duplum minimi polygoni, ſummam ducito in numerum multitudinis polygonorum, fiet duplum quæſita ſumma.

Vt in exemplo propoſito triangulum lateris vnitate multati eſt 6. quo ducto in 4. numerum multitudinis polygonorum vnitate multatum fit 24. duplum autem minimi polygoni, nempe quadrati à latere 4. eſt 32. qui cum 24. facit 56. quo ducto in 5. numerum multitudinis polygonorum fit 280. cuius ſemiſſis 140. eſt ſumma quæſita.

PROPOSITIO

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In progressione numerorum secundum seriem naturalem dispositorum ab vnitate, polygonus maximi, æquatur maximo terminorum, & summæ reliquorum sumptæ secundum numerum angulorum binario multatum.

H 3. G 51.
A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 6.

Hæc facile per 6. concluditur, cum qua idem ferè est mutatis verbis. Sint A B C D E F. quotlibet numeri secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate dispositi, & maximi F. polygonus esto G. & numerus angulorum binario multatus sit H. dico G. æquari ipsi F. & summæ reliquorum A B C. D. E. sumptæ secundum H. Quia enim summa ipsorum A B C D E. est triangulus à latere E. vnitate minore ipso F. patet per 6. productum ex H. in illum triangulum adscito F. æquari ipsi G. vnde patet propositum.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In progressione numerorum secundum seriem naturalem dispositorum, aggregatum similium polygonorum a singulis, æquatur productis ex sic dispositis numeris in totidem numeros progressionis huiusmodi polygonorum constitutiuæ, si videlicet maximus vnius ordinis ducatur in minimum alterius ordinis. Tum primus à maximo ducatur in primum à minimo, & secundus à maximo in secundum à minimo, & ita deinceps.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

Sint A B C D. secundum seriem naturalem dispositi & summa polygonorum à singulis esto V. tum sumantur totidem termini in progressione huiusmodi polygonorum constitutiua, ordine inuerso dispositi E F G H. ductisque A in H. B in G. C in F. D in E. sit productorum summa X. dico VX. esse æquales, sit enim L. differentia progressionis constitutiuæ, seu numerus angulorum binario multatus: patet per primam huius F. continere vnitatem E. & L. semel; G. continere vnitatem semel, & L. bis; H. continere vnitatem semel, & L. ter. Diuidantur ergo numeri H. G. F. in partes ex quibus componuntur, nimirum F. in vnitatem K. & in L. Ipse autem G. in vnitatem M. & in N. P. æquales ipsi L. Denique ipse H. resoluatur in vnitatem Q. & in R. S. T. æquales ipsi L. Patet numeros qui fiunt ex A. in H. ex B. in G. ex C. in F. ex D. in E. simul iunctos: nempe X. æquari omnibus qui fiunt ex A in Q R S T. ex B. in M N P. & ex C. in K L. & ex D. in E. Quia igitur ex E in D. fit ipse D. (quia E est vnitas) At ducere L. in C. P. in B. & T. in A. idem est ac ducere L. in summam omnium A B C. productus autem ex L. in summam omnium A B C. adscito D. facit polygonum ipsius D. per præcedentem. Patet productos ex E. in D. ex L. in C. ex P. in B. & ex T. in A. æquari polygono ipsius D. simili prorsus argumento ostendemus productos ex K. in C. ex N. in B. & ex S. in A. æquari polygono ipsius C. & rursus productos ex M. in B. & ex R. in A. æquari polygono ipsius B. & denique constat ex Q vnitate in A. vnitatem fieri polygonum ipsius A. Igitur euidens est omnia illa producta seu numerum X. æquari polygonis à singulis A B C D. seu numero V. quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

Si sint quotlibet numeri ab vnitate secundum seriem naturalem dispositi, aggregatum productorum ex numero angulorum binario multato in primum à maximo semel; in secundum bis; in tertium ter, & sic deinceps adscita summa numerorum, æquatur aggregato polygonorum à singulis.

Repetatur enim præcedens figura. Dico aggregatum productorum ex L. in C. semel, in B. bis in A ter & sic deinceps, adscita summa ipsorum A B C D. æquari V. aggregato polygonorum à singulis. Nam ex præcedenti constat V. æquari productis ex E. in D. ex K L. in C. ex M N P. in B. & ex Q R S T. in A. Quia vero singuli E. K. M. Q. æquantur vnitati producta ex E. in D. ex K. in C. ex M. in B. & ex Q. in A. simul æquantur summæ ipsorum A B C D. Rursus quia singuli L. N. P. R. S. T. sunt æquales inter se, ducere L. in C. & N P. in B. & R S T. in A. idem est atque ducere L. in C. semel, & in B. bis & in A. ter. Igitur productis ex L. in C. semel in B. bis in A. ter, & sic deinceps, si addatur summa omnium A B C D. fit V. aggregatum polygonorum à singulis. Quod demonstrandum erat.

X 40 V 40
A 1. B 2. C 3. D 4.
Q 1. R 3. S 3. T 3. M 1. N 3. P 3. K 1. L 3.
H 10. G 7. F 4. E 1.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

Si ſint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, & numerus angulorum binario multatus ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis relicto maximo, & producto addatur triangulus maximi, fiet aggregatum polygonorum à ſingulis.

V 40.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
L. 3.

Sint iidem qui ſupra A B C D. dico ſi L. ducatur in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. & producto addatur triangulus ipſius D. fieri V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Nam triangulus C. æquatur ſummæ ipſorum A B C. triangulus B. æquatur ſummæ ipſorum A B. & triangulus A. æquatur ipſi A. ſumere autem A B C. tum A B. tum A. idem eſt atque ſumere C. ſemel, B. bis, A. ter, & ſic deinceps, ergo aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. æquatur ipſi C. ſemel, & B. bis, & A. ter. Quare ducere L. in aggregatum illud triangulorum, idem eſt ac ducere L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter. At productis ex L. in C. ſemel, in B. bis, in A. ter, ſi addatur ſumma omnium A B C D. ſeu triangulus D. fit V. per præced. Igitur ſi & producto ex L. in aggregatum triangulorum à ſingulis A B C. addatur triangulus D. fiet idem V. aggregatum polygonorum à ſingulis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, adſcita ſumma numerorum, vel adſcito triangulo maximi, æquatur triplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

M. 5. L. 4. K. 3. H. 2. G. 1.
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E 5. F. 6.
N. 3.

Sint A B C D E F. numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti, dico ſi polygonus maximi F. ducatur in numerum terminorum vnitate auctum & producto addatur ſumma ipſorum A B C D E F. ſeu quod idem eſt triangulus ipſius F. ſummam æquari triplo polygonorum ſimilium à ſingulis. Sit enim N. numerus angulorum binario multatus, & ſuper ipſos A B C D E. diſponantur totidem illis æquales ordine inuerſo G. H. K. L. M. ita vt G. ſit vnitas. H. binarius K. ternarius & ſic deinceps. Tunc patet ambos G E. æquari ipſi F. & ſimiliter ambos A M. ſed & ob medietatem arithmeticam ſumma duorum A E. æqualis eſt ſummæ duorum B D. atque etiam duplo ipſius C. Igitur cùm ambo A E. æquentur ipſi F. & ſumma duorum B D. ſit eadem quæ duorum B L. & eadem quæ duorum D H. & K. ſit æqualis ipſi C. patet ſingulas ſummas binorum M A. L B. K C. H D. G E. æquari ipſi F. Quare ſi harum ſummarum polygoni ſumantur, & præterea polygonus ipſius F. bis, æquabuntur hi omnes polygoni ſimul producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Itaque cum polygonus ſummæ M A. per decimam huius ſit æqualis polygonis ipſorum M. & A. & plano ſub M A. ducto in N. Item polygonus ſummæ L B. ſit æqualis polygonis K. & L. & B. & plano ſub L B. ducto in N. Item polygonus ſummæ K C. ſit æqualis polygonis K. & C. & plano ſub K C. ducto in N. Itemque polygoni ſummarum H D. G E. ſint æquales polygonis ipſorum H. D. G. E. & planis ſub H D. G E. ductis in N. polygoni autem ipſorum G. H. K. L. M. ſint æquales polygonis ipſorum A B C D E. ſi his addatur duplum polygoni F. ſequitur duplum polygonorum à ſingulis A B C D E F. vna cum planis M A. ſub L B. ſub K C. ſub A D. ſub G E. ductis in N. æquari producto ex polygono ipſius F. in numerum terminorum vnitate auctum. Quare ſi adiiciatur vtrimque ſumma omnium A B C D E F. erunt ſummæ vtrimque æquales. Quia vero G. eſt vnitas H. binarius. K. ternarius & ſic deinceps patet productum ex G in E æquari ipſi E. & productum ex H. in D. æquari duplo D. & productum ex K in C. æquari C. ter, & productum ex L. in B. æquari B. quater & productum ex M. in A. æquari A. quinquies & ſic deinceps. Igitur ducere N. in omnia illa producta, idem eſt atque ducere N. in E. ſemel, in D. bis, in C. ter, in B. quater, in A quinquies & ſic deinceps. Quare per 16. huius qui fit ex N. in omnia illa producta, adſcita ſumma ipſorum A B C D E F. æquatur polygonis à ſingulis. Quamobrem qui fit ex polygono F. in numerum terminorum vnitate auctum adſcita ſumma omnium, æquatur triplo polygonorum à ſingulis. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

Si fuerint quotlibet numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem numerorum diſpoſiti, in idem latus vnitate auctum, æquatur ſextuplo ſimilium polygonorum à ſingulis.

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 35. G 70. H 75. K 6. M 210. L 450.

Sint A B C D E. ab vnitate secundum seriem naturalem dispositi, & maximi E. polygonus esto F. cuius duplum G. quo addito ad ipsum E. fiat H. quo ducto in K. vnitate maiorem ipso E. fiat L. dico L. esse sextuplum similium polygonorum à singulis A B C D E. Etenim ex K. in F. fiat M. Patet ergo per preced. si adi M. addatur summa omnium A B C D E. fient triplum polygonorum à singulis. Quia vero productus ex K. in H. nempe L. æquatur productis ex K. in G. & in E. ex quibus H. componitur. Productus autem ex K. in G. est duplus ad M. (quia G. duplus est ipsius F.) & productus ex K. in E. est duplus summæ omnium A B C D E. per 4. Diophanti. sequitur L. continere duplum ipsius M. & summæ omnium A B C D E. id est duplum tripli polygonorum à singulis. Igitur L. est sextuplum huiusmodi polygonorum. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Ex his duab. propositionib. elicies canones ad inueniendum summam quotlibet polygonorum similium ab vnitate ordinatè dispositorum.

CANON. I.

Cape maximum polygonorum quem ducito in suum latus vnitate auctum, producto adde triangulum ipsius lateris, summa triens erit aggregatum polygonorum per 17.

Vt si quaratur summa 5. pentagonorum ab vnitate cape pentagonum ipsius 5. nempe 35. quem ducito in 6. fit 210. cui adde triangulum ipsius 5. nempe 15. fiet 225. cuius trien 75. est quæsita summa.

CANON II.

Duplo maximi polygoni adde latus illius, summam ducito in idem latus vnitate auctum, producti sextans erit aggregatum polygonorum per 18.

Vt in dato exemplo duplo 35. nempe 70. adde 5. fit 75. quo ducto in 6. fit 450. cuius sextans 75. est quæsita summa.

Hac eadem regula habetur in excerptis nondum editis ex libro Apofroditi & Betrubi Rufi Architectonis, quam tamen à nemine hactenus demonstratam vidi.

Quoniam vero regulæ generales de polygonis ad triangulos vt pote simpliciores applicatæ, sunt simpliciores & faciliores, fiet forte Canon facilior applicando 17. huius ad triangulos & implorando auxilium 16. hac arte.

CANON III.

Cape triangulum maximi lateris vnitate multati, quem ducito in idem latus vnitate auctum, producti cape trientem, quem ducito in numerum angulorum binario multatum, producto adde triangulum maximi lateris, fiet aggregatum polygonorum.

Vt si quæratur aggregatum 7. pentagonorum ab vnitate cape 21. triangulum ipsius 6. quem ducito in 3. fit 168. cuius trien 56. quo ducto in 3. fit 168. cui si addas 28. fit 196. aggregatum quæsitum.

Quoniam vero in hunc locum reiecimus explicationem vltimæ propositionis Diophanti, cuius tractatio mutila est apud ipsum, eius promissi fide nos exolnamus, non quidem insistentes vestigijs Diophanti, sed aliam prorsus amplectentes viam.

PROPOSITIO 19. PROBLEMA 1.

Proposito quolibet numero, inuestigare quot modis polygonus dici possit.

Sit propositus numerus 120. Primo quidem constat ex definitione Diophanti, eum esse polygonum à latere 2. totque angulorum, quot ipse continet vnitates, & sic dicetur hecaconticosigonalis. Deinde inuenietur triangulus esse à latere 15. quia eius octuplum vnitate auctum, quadratum 961. efficit, cuius latus 31. vnde ablata vnitate supereſt 30. cuius semissis 15. est latus trigoni 120. vt constat ex Diophanto.

Denique vt sciamus an alijs modis idem 120. possit esse polygonus. Exponantur ab vnitate omnes in infinitum ordinatim numeri, puta 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. & illis subiiciantur ab vnitate triangulares omnes ordinate dispositi, puta 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. vt factum vides in apposita tabella, quæ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	620

poteſt in infinitum extendi. Tum propoſitus numerus 120. diuidatur ſigillatim per numeros triangulos, & obſeruetur, quoties reſiduum ex diuiſione æquale erit lateri proxime maioris trianguli, toties enim numerus 120. polygonus erit, cuius latus erit ipſum reſiduum diuiſionis. At quotiens oſtendet differentiam progreſſionis huiuſmodi polygonorum conſtitutiuæ, ſeu quod idem eſt, idem quotiens binario auctus, numerum angulorum indicabit. Hac arte ſi diuidas 120. per triangulum 3. ita vt reſiduum ſit 3. fiet quotiens 39. indicans 120. eſſe polygonum angulorum 41. ſeu teſſaracontahenagonalem, & reſiduum 3. latus illius denotat, ita ſi inſtituas progreſſionem trium terminorum quorum differentia ſit 39. fient hi 1. 40. 79. & ex his polygoni angulorum 41. formabuntur 1. 41. 120. Rurſus ſi diuidas 120. per triangulum 28. ita vt reſiduum ſit 8. fiet quotiens 4. indicans 120. eſſe hexagonum, at reſiduum 8. radicem illius deſignat. Ita ſi inſtituas progreſſionem octo terminorum quorum differentia ſit 4. erunt hi 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. quorum ſumma vtique eſt 120. Quia vero 120. per nullum alium triangulum diuidi poteſt, ita vt reſiduum ſit æquale lateri proxime maioris trianguli, ideo pronunciamus propoſitum eundem numerum, pluribus alijs modis eſſe non poſſe polygonum quàm quatuor; cùm ſit vt oſtenſum eſt triangulus, hexagonus, teſſaracontahenagonus, & hecatontaicoſigonus. Huius rei demonſtratio facilis eſt, quod vno exemplo fiet manifeſtum. Quia 28. diuidens 120. dat quotientem 4. & reſiduum 8. patet 120. æquari quadruplo ipſius 28. & numero 8. atqui per ſeptimam huius triangulus 28. cum 8 (qui vnitate maior eſt quam latus ipſius) facit triangulum 36. proximè maiorem, igitur iungendo 28. ſemel cum reſiduo 8. ſemel, erit 120. æqualis triangulo 28. ter, & triangulo ſequenti 36. ſemel, quamobrem per demonſtrata in ſcholio 11. huius 120. eſt polygonus collateralis ipſi 36. hoc eſt à latere 8. & habens tot angulos, quot triangulis ipſe conſtat plus duobus hoc eſt 6. quod erat demonſtrandum. Et euidens eſt ſi diuiſio tentata ſit per omnes triangulos, donec deuentum ſit ad æqualem vel maiorem ipſo 120. eundem 120. non poſſe eſſe polygonum aliter quam modis ſic inuentis, etenim quomodocunque dicatur eſſe polygonus, oportebit per 11. huius vt componatur ex tot triangulis quot ipſe angulos habet, minus duobus, quorum vnus erit illi collateralis, alij à latere vnitate minore, quare ſi collateralis triangulus reſoluatur in ſuum latus, & in proxime minorem triangulum, quibus æquatur, iam propoſitus numerus continebit aliquoties minorem triangulum, & præterea latus maioris trianguli ſemel, & ideo propoſitus numerus ex demonſtratis oſtendetur eſſe polygonus vno inuentorum modorum, vel inferetur omnes diuiſiones non eſſe tentatas, Quorum primum negabatur, alterum aſſerebatur, vnde manifeſta ſequitur contradictio, igitur ex omni parte propoſito eſt ſatisfactum.

Aduerte autem compendij gratia, non omnino tentandam eſſe diuiſionem donec peruenias ad triangulum æqualem vel maiorem propoſito numero; ſufficit enim ſi deuenias ad triangulum qui ſemel tantum in propoſito numero contineatur; cùm enim ex huiuſmodi diuiſione quotiens non poſſit eſſe niſi 1. qui auctus binario efficit 3. numerum angulorum trianguli, patet per hanc diuiſionem propoſitum numerum non poſſe eſſe niſi triangulum, ſi forte triangulus per quem fit diuiſio, cum latere ſequentis iunctus, efficiat ipſum ſequentem triangulum. Quare cùm per regulam Diophanti iam expertus ſis an propoſitus numerus ſit triangulus, ſuperfluum erit id amplius inquirere, ſic in data hypotheſi numeri 120. cum peruenieris ad triangulum 66. qui ſemel tantum continetur in 120. iam deſiſtere poteris ab examine, cum per id nil amplius tibi poſſit innoteſcere niſi 120. eſſe triangulum, cùm diuides ſcilicet eum per triangulum 105. ſed id iam tibi conſtat.

Rurſus ſi propoſitus numerus ſi par, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem cum latus ſequentis eſt impar, quia enim cuiuſlibet trianguli paris multiplex quilibet eſt par, eo detracto à propoſito numero pari, impoſſibile eſt relinqui imparem vt conſtat ex Euclide. Hac de cauſa propoſito numero 120. fruſtra tentabitur diuiſio per triangulos 10. & 36. quia latera ſequentium, ſunt 5. & 9. impares numeri.

Eadem de cauſa ſi propoſitus numerus ſit impar, fruſtra tentabitur diuiſio per triangulum parem quando ſequentis latus eſt etiam par. etenim trianguli paris multiplex quilibet, par eſt, quo detracto à numere propoſito impari, impoſſibile eſt reſiduum eſſe par. Itaque in hoc caſu non tentabitur diuiſio per triangulos 6. 28. 66. qui latera ſequentium ſunt 4. 8. 12. numeri pares, & ſic de alijs.

Denique poſſunt & alia compendia obſeruari, quibus iam prouecta diuiſione, antequam penitus abſoluatur, dignoſci poſſit an vtilis ſit futura necne, quæ ſtudioſo lectori indaganda relinquo.

CLAVDII GASPARIS

BACHETI SEBVSIANI APPENDICIS AD LIBRVM DE NVMERIS POLYGONIS.

LIBER SECVNDVS.

ACTVM est superiore libro de progressione polygonorum, quorum latera secundum seriem naturalem numerorum ab vnitate disposita sunt. Hoc vero agemus de illorum progressione quorum latera reperiuntur in qualibet medietate arithmetica continua, cuius differentia æquatur minimo termino. Et primum quidem insignes aliquot huius medietatis proprietates persequemur. Deinde peculiares de quadratorum progressione trademus regulas, tum generales de omnibus polygonis, demum singularia quædam de cubis deque eorum progressione proferemus.

PROPOSITIO PRIMA.

In medietate arithmetica, in qua differentia minimo termino est æqualis, productus ex numero terminorum in minimum, æquatur maximo.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 2. F 4.

Sint in medietate arithmetica A B C D. & differentia progressionis sit E. æqualis ipsi A. & sit F. numerus terminorum, dico productum ex A. in F. æquari maximo D. etenim [1] B. continet A semel & differentiam E. semel, at C. continet A. semel & differentiam E bis, ac denique D. continet A semel & differentiam E. ter, & sic deinceps. Quare cùm E. sit æqualis ipsi A. patet B. continere A. bis, C. ter, D. quater, & sic deinceps quilibet sequentium continet minimum toties quot sunt à minimo vsque ad ipsum inclusiuè numeri terminorum, quamobrem D. continet A. secundum vnitates ipsius F. ac proinde ducto A. in F. producitur D. quod demonstrandum erat.

[1] 1. 1. appen.

COROLLARIVM.

Hinc patet secundum à minimo continere minimum bis, tertium ter, quartum quater, & sic deinceps quotus quisque est in serie progressionis, toties continet minimum.

PROPOSITIO SECVNDA.

In hac progressione, productus ex numero terminorum vnitate multato in maximum, duplus est summæ reliquorum.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10. G 5. H 4.

Sint in hac progressione A B C D E. sitque G. numerus terminorum & H. vnitate minor, dico productum ex H. in E. duplum esse summæ reliquorum A B C D. quia enim H. est numerus terminorum A B C D. productus ex H. in summam extremorum A D. æquatur duplo summæ ipsorum A B C D. per quartam Diophanti, at summa extremorum A D. æquatur ipsi E. quandoquidem A. æqualis est differentiæ. Igitur ex H. in E. fit duplum summæ antecedentium A B C D. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO TERTIA.

In hac progressione. Quadratus maximi æquatur producto ex numero terminorum in planum sub extremis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. K. 20. G. 5.

Sint numeri qui suprà, & planus sub extremis esto K. dico quadratum maximi E. æquari producto ex G. in K. [2] Etenim ex A. in G. fit ipse E. [3] Quare sumendo tres numeros A. G. E. idem producetur numerus ducendo A. in E. & productum K. in G. qui fiet ducendo A. in G. & productum E. in E. hoc est quadratus ipsius E. Quare patet propositum.

[2] 1. huius. [3] 3. 1. porism.

COROLLARIVM.

Quadratus maximi æquatur producto ex quolibet extremo, in planum ſub numero terminorum, & altero extremo.

Eadem enim ratione oſtendetur quadratum ex E. æquari producto ex A. in planum ſub G. & E. vel producto ex E. in planum ſub G. & A.

PROPOSITIO QVARTA.

In hac progreſſione, quadratus maximi æquatur producto ex minimo in compoſitum ex maximo & ſumma reliquorum dupla.

L. 50. M. 40.
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E 10.
G. 5. H. 4.

Sint numeri qui ſuprà, & duplum ſummæ ipſorum A B C D. eſto M. dico quadratum ipſius E. æquari producto ex A. in aggregatum ipſorum M E. ſit enim H. vnitate deficiens à G. & ducto G. in E. fiat L. Quia igitur [2. huius,] ex H. in E. fit M. & ex G. in eundem E. fit L. cùm G. H. differant, vnitate patet L. æquari vtrique M. E. ſimul. At ex A. in L. fit quadratus ipſius E. per corollarium præcedentis. Igitur ex A. in vtrumque M E. ſimul, fit idem quadratus. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

In progreſſione quæ ab vnitate incipit, quadratus maximi æquatur duplo ſummæ antecedentium adſumente ipſum maximum.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. E. 5.

Etenim ſi ponatur A. vnitas, & differentia etiam progreſſionis vnitas, erit per hanc quartam propoſitionem quadratus E. æqualis producto ex A. in E. & in duplum ipſorum A B C D. Quia ergo A. eſt vnitas quæ non mutat numeros quos multiplicat, patet quadratum E. æquari ipſi E. & duplo ſummæ ipſorum A B C D. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO QVINTA.

In hac progreſſione aggregatum quadratorum à ſingulis, æquatur productis ex minimo in maximum ſemel, & in ſecundum ab illo ter, & in tertium quinquies, & in quartum ſepties, & ſic continue per numeros impares aſcendendo.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint in hac progreſſione numeri A B C D E. dico aggregatum quadratorum à ſingulis æquari productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies, & ſic deinceps per numeros impares aſcendendo. Etenim per præcedentem quadratus ex E. æquatur producto ex A. in E. ſemel, & in reliquos bis. Rurſus quadratus ex D. æquatur producto ex A. in D. ſemel, & in antecedentes bis. Quare quadrati ex E. & D. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, & in reliquos quater. At rurſus quadratus ex C. æquatur producto ex A. in C. ſemel, & in antecedentes bis. Igitur quadrati ex E D C. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, & in reliquos ſexies. Rurſus denique quadratus ex B. æquatur producto ex A. in B. ſemel, & in A. bis. Igitur quadrati ex E D C B. æquantur productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, & in A. octies, quare addito quadrato ex A. fiunt quadrati omnium A B C D E. æquales productis ex A. in E. ſemel, in D. ter, in C. quinquies, in B. ſepties, in A. nouies. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO SEXTA.

In hac progreſſione, qui fit ex numero terminorum in ſummam extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto in maximum.

K 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint numeri qui prius, & ſit numerus terminorum G. cui addendo vnitatem, fiat H. & ſit ſumma extremorum K. dico ex K. in G. eundem produci numerum qui ex E. in H. etenim [2. huius,] E. continet A. ſecundum vnitates numeri G. quare cùm addito A. ad E. fiat K. ac proinde K. contineat A. ſemel amplius quàm E. patet K. continere A. ſecundum numerum H. qui vnitate ſuperat G. quamobrem cùm ex eodem A. in H. & in G. fiant K. & E. [17. 7.] erit K. ad E. ſicut H. ad G. ac proinde [19. 7.] ex K. in G. producetur numerus æqualis producto ex E. in H. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

In hac progressione, productus ex numero terminorum vnitate aucto in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in summam omnium, æquatur triplo aggregati quadratorum à singulis.

P Q R T X M
. . . . . .
. . . . . .
. . . . K .
. . . . . .
. . . G . .
. . . . . .
. . E . . .
. . . . . .
. C . . . .
. . . . . .
A . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
B D F H L N

Hæc est decima propositio Archimedis de lineis spiralibus, quæ sic ostenditur. Sint in hac progressione AB. CD. EF. GH. KL. MN. dico quadratum ex MN. sumptum secundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti, vna cum producto ex AB. in summam omnium æquari triplo summæ quadratorum à singulis. Etenim adiiciatur ipsi KL. numerus XK. æqualis ipsi AB. ipsi quoque GH. addatur TG. æqualis ipsi CD. & ipsi EF. addatur RE. eidem EF. æqualis. At ipsi CD. addatur QC. æqualis ipsi GH. & demum ipsi AB. addatur PA. æqualis ipsi KL. Tunc patet totos PB. QD. TH. XL. æquales esse ipsi MN. Quia enim AB. est æqualis differentiæ, eo addito ad KL. & ad PA. fiunt XL. PB. qui singuli æquantur ipsi MN. ' sed ob medietatem arithmeticam summæ duorum AB. KL. æqualis est summa duorum CD. GH. itemque duplum ipsius EF. igitur constat & totos QD. RF. TH. æquales esse singulos singulis PB. XL. seu ipsi MN. quamobrem si sumantur quadrati ipsorum PB. QD. RF. TH. XL. MN. & adhuc semel quadratus ipsius MN. sumetur vtique quadratus MN. secundum vnitates numeri terminorum vnitate aucti. Ostendendum ergo hos quadratos, vna cum producto ex AB. in summã omnium AB. CD. EF. GH. KL. MN. efficere triplum quadratorum à singulis. Itaque ' quadratus ex PB. æquatur quadratis ex PA. & AB. & plano bis sub PA. AB. contento. Item quadratus ex QD. æquatur quadratis ex QC. CD. & plano bis sub QC. CD. contento. Et similiter quadrati reliquorum æquantur quadratis partium, & plano bis sub partibus contento. at quadrati ex AB. CD. EF. GH. KL. æquales sunt quadratis ex XK. TG. RE. QC. PA. quare si his addas duplum quadrati MN. patet iam haberi duplum quadratorum à singulis. Restat ergo probandum dupla planorum sub partibus contentorum, vna cum producto ex AB. in AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquari adhuc summæ quadratorum à singulis. Quoniam itaque quod fit bis ex XK. in KL. æquatur ei quod fit bis ex AB. in KL. at quod fit bis ex TG. in GH. æquatur ei quod fit quater ex AB. in GH. ' quia TG. duplus est ipsius AB. similiter quod fit bis ex RE. in EF. æquatur ei quod fit sexies ex AB. in EF. quia RE. triplus est ipsius AB. & eadem de causa quæ bis sub alijs partibus continentur, æquantur producto ex AB. in alios numeros, secundum numeros pares continenter ascendendo multiplicatos, omnia vtique plana illa simul sumpta cum producto ex AB. in omnes AB. CD. EF. GH. KL. MN. æquabuntur productis ex AB. in MN. semel, in KL. ter, in GH. quinquies, in EF. septies, & sic per numeros impares ascendendo. His autem productis æquantur quadrati à singulis per quintam huius, ergo constat propositum.

6. primi poris.

4. secundi.

coroll. 1. huius.

PROPOSITIO OCTAVA.

In hac progressione productus ex maximo in summam extremorum, æquatur producto ex minimo in duplum summæ omnium.

F 12.
A 2. B 4. C. 6. D 8. E 10.
G 5. H 6.

Sint in hac progressione A B C D E. & sit summa extremorum F. Dico productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum summæ omnium, etenim cùm F. componatur ex duobus A. & E. productus ex E. in F. æquatur quadrato ipsius E. & producto ex A. in E. at ' quadratus ex E. æquatur producto ex A in E. semel, & in antecedentes bis, igitur addito producto ex A. in E. patet productum ex E. in F. æquari producto ex A. in duplum summæ omnium, quod demonstrandum, erat.

4. huius

COROLLARIVM.

Hinc sequitur euidenter productum ex minimo in summam omnium æquari producto ex maximo in semissem summæ extremorum, vel producto ex summa extremorum in semissem maximi.

PROPOSITIO NONA.

In hac progressione productus ex numero terminorum in quadratum summæ extre-

morum, æquatur producto ex eodem numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi, vna cum producto ex minimo in duplum ſummæ omnium.

Sint numeri qui ſupra, & ſit G. numerus terminorum, & vnitate maior ſit H. dico productum ex G. in quadratum ipſius F. æquari productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim ' quadratus F. æquatur quadratis partium A E. & duplo plani ſub A. & E. quare productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in quadratos A E. & in duplum plani ſub A E. & loco producti ex G. in planum ſub A E. ſemel, ſumendo ' illi æqualem quadratum ipſius E. erit productus ex G. in quadratum F. æqualis productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratos A E. & ipſi quadrato E. quia vero H. ſuperat G. vnitate, productus ex H. in quadratum E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipſi quadrato E. Igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. & ex H. in quadratum E. atqui cum F. æquetur ipſis A E. ' planus ſub A E. cum quadrato A æquatur producto ex F. in A. ac proinde producti ex G. in planum ſub A E. & in quadratum A. æquantur producto ex G. in planum ſub F A. igitur productus ex G. in quadratum F. æquatur productis ex G. in planum ſub F A. & ex H. in quadratum E. quia vero ſumptis tribus numeris F. A. G. ' ſit idem numerus ſi F. ducatur in A. & productus in G. qui fit ſi G. ducatur in F. & productus, ' nempe duplum ſummæ omnium, ducatur in A. patet productum ex G. in quadratum F. æquari productis ex H. in quadratum F. & ex A. in duplum ſummæ omnium. Quod erat demonſtrandum.

quarta 2.
3. huius.
tertia 2.
tertia 1. poriſ
4. Diophanti.

COROLLARIVM.

Ex hac & ex præcedente collige tres numeros æquales eſſe, nimirum.
Productum ex numero terminorum, in planum ſub minimo, & ſub ſumma extremorum.
Productum ex minimo in duplum ſummæ omnium.
Productum ex maximo in ſummam extremorum.

PROPOSITIO DECIMA.

In hac progreſſione productus ex minimo in duplum ſummæ omnium, æquatur quadrato maximi, & plano ſub extremis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.

Sint numeri qui ſupra, dico quadratum maximi E. cum plano ſub A E. æquari producto ex A. in duplum ſummæ omnium, etenim quadratus E. ' æquatur producto ex A. in ipſos A B C D. bis & in E. ſemel, quare ſi eidem quadrato addatur rurſus productus ex A. in E. ſemel, erit vtique quadratus E. cum plano ſub A E. æqualis producto ex A. in omnes A B C D E. bis. quod erat oſtendendum.

3. huius.

COROLLARIVM.

Hinc rurſus collige quadratum maximi cum plano ſub extremis, æquari cuilibet trium illorum productorum, de quibus in corollario præcedentis.

PROPOSITIO VNDECIMA.

In hac progreſſione productus ex duplo numeri terminorum ternario aucto in quadratum maximi, vna cum plano ſub extremis, æquatur ſextuplo aggregati quadratorum à ſingulis.

A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
K 13. H 6. G 5.

Sint numeri qui prius, & ſit G. numerus terminorum, & H. vnitate maior, & K. duplum ipſius G. ternario auctum, dico productum ex K. in quadratum ipſius E. cum plano ſub A E. æquari ſextuplo quadratorum à ſingulis: etenim quia H. ſuperat G. vnitate, duplum ipſius H. ſuperat binario duplum ipſius G ac proinde cum K. ſuperet ternario duplum ipſius G. idem K. ſuperat vnitate duplum ipſius H. Itaque quia triplum quadratorum à ſingulis, ' æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in ſummam omnium, vtique ſextuplum quadratorum à ſingulis æquatur productis ex duplo H. in quadratum E. & ex A. in duplum ſummæ omnium; at productus ex A. in duplum ſummæ omnium, ' æquatur quadrato E. & plano ſub A E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex duplo H. in quadratum E. ipſi quadrato E. & plano ſub A E. quia vero K. ſuperat vnitate duplum H. vt oſtenſum eſt, patet productum ex K. in quadratum E. æquari producto ex duplo H. in quadratum E. & ipſi quadrato E. igitur ſextuplum quadratorum à ſingulis, æquatur producto ex K. in quadratum E. & plano ſub A E. quod erat demonſtrandum.

7. huius.
10. huius.

COROLLARIVM

COROLLARIVM.

Quia E. multiplex est ad A. secundum ipsum G. per primam huius, patet ducto A. in E. produci partem quadrati ipsius E. denominatam à G. quare si ipsi K. addatur pars vnitatis ab ipso G. denominata, & summa ducatur in quadratum E. fiet sextuplum aggregati quadratorum à singulis, vt euidens est.

PROPOSITIO DVODECIMA.

In hac progressione productus ex numero terminorum in planum sub maximo, & sub summa extremorum, æquatur producto ex numero terminorum vnitate aucto, in quadratum maximi.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui supra, & summa extremorum esto F. dico productum ex G. in planum sub F E. æquari producto ex H. in quadratum ipsius E. etenim quia F. ex ipsis A E. componitur planus sub F E ' æquatur quadrato ipsius E. & plano sub A E. Quare productus ex G. in planum sub F E. æquatur productis ex G. in quadratum E. & in planum sub A E. sed productus ex G. in planum sub A E. ' æquatur quadrato ipsius E. Igitur productus ex G. in planum sub F E. æquatur producto ex G. in quadratum E. & ipsi quadrato E. hoc est producto ex H. in quadratum E. quod erat demonstrandum. ' terti. 2. ' 3. huius.

PROPOSITIO DECIMATERTIA.

In hac progressione producti ex numero terminorum in quadratum summæ extremorum, & in planum sub summa extremorum, & sub maximo comprehensum, æquatur sextuplo quadratorum à singulis.

F 12.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 6. G 5.

Sint numeri qui prius. Dico productos ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. contentum, æquari sextuplo quadratorum à singulis. Nam productus ex G. in quadratum F. ' æquatur productis ex H. in quadratum E. & ex A. in duplum summæ omnium. At productus ex G. in planum sub F E. ' æquatur producto ex H. in quadratum E. Igitur producti ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. æquantur productis ex H. in quadratum E. bis, & ex A. in summam omnium bis. Verum producti ex H. in quadratum E. & ex A. in summam omnium, ' æquantur triplo quadratorum à singulis. Igitur iidem producti bis, seu illis æquales producti ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. æquantur sextuplo quadratorum à singulis. Quod demonstrandum fuit. 9. huius. ' 11. huius. ' 9. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita quadratus summæ extremorum, cum plano sub eadem summa & sub maximo comprehenso, ad sextuplum aggregati quadratorum à singulis.

Sint numeri qui supra, dico esse A. ad E. sicut quadratum F. cum plano sub F E. ad sextuplum quadratorum à singulis. Nam ' cùm ex A. in G. fiat E. est A. ad E. vt vnitas ad G. sed etiam ' quia ex G. in quadratum F. & in planum sub F E. fit sextuplum quadratorum à singulis, est vnitas ad G. sicut quadratus F. cum plano sub F E. ad sextuplum quadratorum à singulis. Ergo est A. ad E. sicut quadratus F. cum plano sub F E. ad sextuplum quadratorum à singulis. Quod demonstrandum erat. ' 1. huius. ' 13. huius.

PROPOSITIO DECIMAQVINTA.

In hac progressione, productus ex maximo in dimidium numeri terminorum vnitate aucti, vel ex numero terminorum vnitate aucto in dimidium maximi, æquatur summæ omnium.

Sint numeri qui prius. Dico productum ex E. in semissem ipsius H. vel ex H. in dimidium E. æquari summæ omnium. Etenim productus ex G. in F. æquatur duplo summæ omnium. per 4. Diophanti at producto ex G. in F. ' æquatur productus ex H. in E. Igitur cùm ex H. in E. fiat duplum summæ omnium, sane ex E. in dimidium H. vel ex H. in dimidium E. fiet ipsa summa omnium Quod erat ostendendum. ' 2. huius.

SCHOLIVM.

Semper autem continget vel E. vel H. parem eſſe, & alterutrius dimidium poſſe ſumi ſine fractione;
1. huius. *nam vel G. par eſt, vel impar; ſi G. ſit par cum eo ducto in A. fiat E. erit & E, pariſi autem G. ſit impar, ſane qui eum ſuperat vnitate, puta H. par erit.*

Caterum ex multis harum propoſitionum eliciuntur regulæ ad inueniendam ſummam quadratorum à quotlibet numeris in hac progreſſione diſpoſitis.

PRIMA.

Ducito numerum terminorum vnitate auctum in quadratum maximi, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per ſeptimam huius, ſic ducendo 6. in 100. fit 600. cui addendo productum ex 2. in 30. nempe 60. fit 660. cuius triens 220. eſt ſumma quadratorum.

SECVNDA.

Ducito numerum terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, & producto adde quod fit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorum.

Conſtat per duodecimam adiuuante ſeptima, ſic ducendo 5. in 120. (qui fit ex 10. in 12.) fit 600. cui reddendo 60. vt prius, fit 660. cuius triens eſt 220. vt ſupra.

TERTIA.

Ducito numerum terminorum in quadratum ſummæ extremorum, à producto aufer quod fit ex minimo in ſummam omnium, reſidui triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per nonam adiuuante ſeptima, ſic ducto 5. in 144. quadratum ipſius 12. fit 720. vnde ſi auferas 60. reſtat 660. cuius triens eſt 220. vt prius.

Porro ſicut tribus modis, huius regulæ prima pars variata eſt in tribus hiſce præceptis, ita & totidem modis variari poteſt ſecunda. Nam loco producti ex minimo in ſummam omnium ſumi poteſt productus ex minimo in planum ſub maximo, & ſub dimidio numeri terminorum vnitate aucti per decimam quintam, vel productus ex maximo in dimidium ſummæ extremorum per corollarium octauæ.

QVARTA.

Ducito duplum numeri terminorum ternario auctum in quadratum maximi, producto adde planum ſub extremis, compoſiti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per vndecimam: ſic ducendo 13. in 100. fit 1300. cui addendo 20. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

QVINTA.

Ducito quadratum maximi in duplum numeri terminorum auctum ternario, & parte vnitatis à numero terminorum denominata, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per corollarium vndecimæ ſic ducendo 100. in 13⅓ fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ſupra.

SEXTA.

Ducito numerum terminorum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano ſub maximo & ſub ſumma extremorum contento, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimam tertiam, ſic ducendo 5. in aggregatum ex 144. & ex 120. nempe in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

SEPTIMA.

Ducito maximum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano

ſub maximo & ſub ſumma extremorum, productum diuide per minimum, quotientis ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimamquartam indagando quartum proportionalem, tribus cognitis. Sic ducendo 10. in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ante.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

In hac progreſſione. Octuplum plani ſub minimo, & ſub ſumma omnium adſcito minimi quadrato æquatur quadrato compoſiti ex minimo, & duplo maximi.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium F. Dico octuplum plani ex A. in F. adſumpto quadrato ipſius A. æquari quadrato compoſiti ex A. & duplo ipſius E. Etenim ' productus bis ex A. in F. æqua- 10. huius.
tur quadrato E. cùm plano ſub A E. Quare octuplum producti ex A. in F. æquatur quadruplo quadrati E. & quadruplo plani ſub A E. Proinde ſi addatur vtrimque quadratus A. vtique octuplum plani ſub A F. cum quadrato A. æquabitur quadrato E. quater, plano ſub A E. quater, & quadrato A. ſemel. Atqui quadruplum quadrati E. æquatur quadrato dupli ipſius E. & quadruplum plani ſub A E. æquatur duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. Rurſus autem ' quadrati ex A. & ex duplo 4. ſecundi.
ipſius E. cum duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. æquantur quadrato compoſiti ex A. & ex duplo E. Igitur hic quadratus æquatur octuplo plani ſub A F. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Hinc rurſus demonſtratur quod ait Diophantus quæſt. 44. lib. 4. Itemque Plutarchus quæſtione Platonica quarta nimirum Πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος καὶ ὁπτάδα περιλαβὼν γίνεται τετράγωνος. *vt euidens eſt ſi A. ponatur vnitas, & differentia progreſſionis vnitas. Tunc enim F. erit triangulus ex definitione. Etenim cum vnitas non mutet numerum quem multiplicat, & quadratus vnitatis ſit ipſa vnitas patet octuplum producti ex A. in F. fore octuplum ipſius*

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 15.

F. cui addendo quadratum ipſius A. puta vnitatem fiet quadratus, cuius latus æquabitur duplo ipſius E. & vnitati. Itaque hanc eandem propoſitionem iam tripliciter demonſtrauimus. Primo ad quadrageſimam quartam 4. peculiari demonſtratione. Secundo hic vniuerſalius, prout hæc proprietas conuenit omni progreſſioni arithmetica, cuius minimus terminus æqualis eſt differentiæ. Tertio vniuerſaliſſimè, ad octauam Diophanti de numeris multangulis, proprietatem hanc omni in vniuerſum progreſſioni arithmeticæ applicantes vi theorematis 5. eorum quæ ad ſextam demonſtrauimus.

Hæc ergo dixiſſe ſufficiat de progreſſione quadratorum, quorum latera in hac progreſſione ſunt ordinata. Agamus iam de omnium polygonorum in vniuerſum progreſſione.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque, & ſic deinceps, & quælibet pars vnius ſectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiuſdem ſectionis, continget hanc comparationem in prima ſectione fieri ſemel, in ſecunda ter, in tertia ſexies, in quarta decies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

A.....C.....B
D....E....F....G
H... K... L... M... N

Secetur A B. in duas partes A C. C B. & ſecetur D G. in tres D E. E F. F G. & ſecetur H N. in quatuor H K. K L. L M. M N. & ſic deinceps, & comparetur quælibet pars vnius ſectionis cuilibet ex alijs eiuſdem ſectionis, dico in ſectione numeri A B. hanc comparationem fieri ſemel, in ſectione D G. fieri ter, in ſectione H N. fieri ſexies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

Primo enim in ſectione A B. patet A C. tantum comparari poſſe ipſi C B. vnde conſtat propoſitum.

Secundo in ſectione D G. quia D E. comparari poteſt ſingulis E F. F G. & ipſæ E F. F G. rurſus inter ſe ſemel comparantur, patet tres hic fieri comparationes. Quod erat intentum.

Tertio in ſectione H N. quia H K. comparari poteſt ſigillatim, tribus reliquis, vnde tres oriuntur comparationes, & rurſus tres reliquæ per proxime demonſtrata, ter inter ſe comparantur. Patet hic in vniuerſum ſex fieri comparationes, quod erat propoſitum.

Denique ſi numerus ſecetur in quinque partes, cùm prima pars comparari poſſit quatuor reliquis, & quatuor reliquæ per iam demonſtrata, ſexies inter ſe comparentur, fient omnino decem compa-

tionum æquabitur triangulo præcedentium comparationum adſciſcenti ſuum latus vnitate auctum, vnde fiet triangulus proximè maior ex definitione triangulorum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

In hac progreſſione ſi polygonus quilibet minimi ducatur in triangulum numeri terminorum, & producto addatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub numero angulorum, binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi numeri vno minus, fiet ſumma ſimilium polygonorum a ſingulis.

L 2.
G 2. M 2.
E 2. H 2. N 2.
F 2. K 2. O 2.
A 2. B 4. C 6. D 8.
coroll. 1. huius. P 7. Q 10. R 4. T 5. V 10.
X 70. Y 200.

Sint in hac progreſſione A B C D. & ſit P. quilibet polygonus minimi, puta heptagonus, ſitque Q. triangulus numeri terminorum, quo ducto in P. fiat X. ſitque R. quadratus ipſius A. & T. numerus angulorum binario multatus, & V. ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi B C D. & ſolidus ſub ipſis R T V. eſto Y. dico aggregatum duorum X Y. æquari ſummæ ſimilium polygonorum, puta heptagonorum à ſingulis A B C D. Quia enim A. continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, reſoluantur B C D. in numeros æquales ipſi A. puta B. in E F. At C in G H K. ac demum D. in L M N O. Itaque per ſcholium 10. primi polygonus B. æquatur polygonis ipſorum E F. & producto ex E, in F, ſeu quadrato R. ducto in T. ſimiliter polygonus C. æquatur polygonis G H K. & productis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ſeu totidem quadratis R. ductis in T. denique polygonus D. æquatur polygonis ipſorum L M N O. & productis ex quolibet in quemlibet ex alijs, ſeu totidem R. ductis in T. quamobrem ſi his omnibus polygonis & productis addatur polygonus ipſius A. patet polygonos à ſingulis A B C D. continere polygonum ipſius A. ſeu ipſum P. ſemel, bis, ter, quater, & ſic deinceps, id eſt ſecundum vnitates trianguli Q. & præterea ipſum R. ductum in T. ſemel, ter, ſexies & ſic deinceps ſecundum triangulos ab vnitate, id eſt ſecundum vnitates ipſius V. per præcedentem. Quamobrem polygoni à ſingulis A B C D. æquantur producto ex Q. in P. ſeu ipſi X. adſciſcenti ſolidum ſub R. T. V. nempe ipſum Y. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMANONA.

In hac progreſſione aggregatum productorum ex minimo in maximum ſemel, in ſecundum ab illo bis, in tertium ter, in quartum quater, & ſic deinceps, æquatur producto ex quadrato minimi in ſummam totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
N. 4. M. 3. L. 2. K. 1.
E. 1. F. 2. G. 3. H. 4.
O. 4. P. 6. Q. 6. R. 4.

Sint in hac progreſſione A B C D. Dico ſi A. ducatur in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, & ſic deinceps, aggregatum productorum, æquari producto ex A. in ſummam totidem triangulorum ab vnitate. Etenim ſumantur totidem numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti E. F. G. H. quibus ſuperponantur totidem illis æquales ordine inuerſo, puta K L M N. & ex K. in H. fiat R. ex L. in G. fiat Q. ex M. in F. fiat P. ex N. in E fiat O.

Coroll. 2. huius. Patet A. contineri in A. ſecundum E. in B. ſecundum F. in C. ſecundum Q. in D. ſecundum H. Quare cùm K. ſit vnitas, ſi A. ducatur ſemel in D. productus continebit quadratum ipſius A. toties, quoties productus ex K. in H. puta R. continet vnitatem. Similiter quia L. eſt binarius, ſi A. ducatur bis in C. productus continebit quadratum A. toties quoties productus ex L. in G. puta Q. continet vnitatem. Eodem argumento probabitur productum ex A. in B. ter toties continere quadratum A. quoties P. continet vnitatem, & rurſus productum ex A. in A. quater toties continere quadratum A. quoties O. continet vnitatem. Quamobrem producti omnes ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, toties continent quadratum A. quot ſunt

14. 2. appen. vnitates in ſumma ipſorum O P Q R. ſed ſumma ipſorum O P Q R. æquatur ſummæ triangulorum ab ipſis E. F. G. H. Igitur producti omnes ex A. in D. ſemel in C. bis, in B. ter, in A. quater toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma totidem triangulorum ab vnitate. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMA.

In hac progreſſione, ſi numerus terminorum vnitate auctus, ducatur in polygonum maximi, & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub

numero angulorum binario multato, & sub summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi numeri vno minus, residuum æquatur duplo polygonorum à singulis.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 3.

Sint in hac progressione A B C D E. & numerus angulorum binario multatus esto L. Dico si numerus terminorum vnitate auctus ducatur in polygonum ipsius E. & à producto auferatur solidus contentus sub quadrato A. numero L. & summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi A B C D. residuum æquari duplo polygonorum à singulis A B C D E. Etenim superponantur ipsis totidem illis æquales ordine inuerso F G H K. Tunc ex demonstratione septimæ huius patet binos A K. B H. C G. D F. æquari sigillatim ipsi E. quare si sumantur polygoni harum summarum, & præterea polygonus ipsius E. bis, horum aggregatum æquabitur producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum ipsius E. Atqui polygoni summæ binorum A K. B H. C G. D F. æquantur polygonis omnium A K. B H. C G. D F. seu duplo polygonorum à singulis A B C D. & præterea productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis A B C D E. & productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. sed hi producti (quandoquidem A. continetur in F. semel, in G bis, in H ter, in K quater) æquantur productis ex A. in D. semel, in C. bis, in B. ter in A. quater, ac proinde per præcedentem iidem producti æquantur producto ex quadrato A, in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis, & producto ex quadrato A, in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. ducto in L. quare si solidus sub quadrato A, numero L, & summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. auferatur à producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E, residuum erit duplum polygonorum à singulis A B C D E. quod demonstrare oportuit.

10. 1. hpg.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 3.

coroll. 2. huius.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

In hac progressione, qui fit ex polygono minimi in triangulum numeri terminorum, adscito producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, æquatur triplo polygonorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 50. F 460.
K 120.

Sint in hac progressione A B C D. & qui fit ex polygono minimi A, in triangulum numeri terminorum esto E. qui fit autem ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi esto F. dico aggregatum duorum E F. æquari triplo polygonorum à singulis, etenim sumatur K, solidus sub quadrato A, sub numero angulorum binario multato, & sub summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C. igitur per 18. ambo E K. simul æquantur summæ polygonorum à singulis A B C D. sed per præcedentem, detracto K, ex F. manet duplum polygonorum à singulis. Igitur si ad F. multatum numero K. concipiamus addi ipsos E K. nempe summam polygonorum à singulis; fiet vtique summa ipsorum E F. æqualis triplo polygonorum à singulis, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMASECVNDA.

In hac progressione si productus ex polygono minimi in numerum terminorum adsciscat duplum polygoni maximi, & aggregatum ducatur in numerum terminorum vnitate auctum, fiet sextuplum polygonorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 3. F 4. G 5. H 12.
K 60. L 36. M 72.
N 360. O 420. P 84.

Sint in hac progressione A B C D. & polygonus minimi esto E, numerus vero terminorum F, & illo vnitate maior esto G. ductoque E in F. fiat H. Maximi vero polygonus esto L. cuius duplum M. quo addito ad H. fiat P. ductoque P. in G. fiat O. dico O. esse sextuplum polygonorum à singulis, etenim ducto G in ipsos H. M. fiant K N. cùm ergo ex eodem G in P, summam eorundem H M. factus sit O. erit O. æqualis ambobus K N. Quia vero ex E in F, fit H. & ex H in G. fit K, est K. solidus sub tribus E F G. proinde idem K, fiet ducto F in G. & producto in E, sed ex F. in G. fit duplum trianguli ipsius F. per octauam Diophanti. Ergo K, fit ducto E, in duplum trianguli F, similiter N. factus est ex G, in M, duplum polygoni L. ergo summa duorum K N. seu O. componitur ex ductu E. in duplum trianguli ex F, & ex ductu G in duplum polygoni ex D. sed horum semissis, nempe productus ex E, in triangulum ex F. vna cum producto ex G. in polygonum ex D. æquatur triplo polygonorum à singulis per præcedentem. Igitur O, æquatur sextuplo eorundem polygonorum. Quod ostendendum susceperam.

3. 1. poris.

SCHOLIVM.

Ex his duabus propoſitionibus duo elici poſſunt Canones ad inueniendum ſummam quotlibet ſimilium polygonorum, quorum latera in hac progreſſione diſponantur, ſed quia ipſi Canones ab ipſis propoſitionibus non differunt, illos adſcribere ſupernacaneum duxi. Itaque hactenus de polygonorum progreſſione dictum eſto: Reſtat vt agamus de cuborum progreſſione, ſed prius tres inſignes illorum proprietates demonſtrabimus, quæ ad illorum progreſſionem aliquatenus ſpectant.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

Si diſponantur omnes numeri impares ab vnitate, ex illorum ordinata & continua additione, quadrati omnes procreabuntur.

Putabit forte quiſpiam nos huic propoſitioni ſuperſedere debuiſſe, quandoquidem ex polygonorum definitione quadratis applicata, hoc ipſum manifeſtum fit. Verum quoniam antiqua definitio quadratorum ab Euclide priſciſque omnibus, & ab ipſo Diophanto libro primo arithmeticorum tradita, diuerſa eſt, quatenus definiuntur quadrati, numeri qui fiunt ex alio quopiam in ſeipſum multiplicato, operæpretium viſum eſt, oſtendere vtramque definitionem iiſdem numeris conuenire, ne vlla ſuperſit hac de re dubitatio. Etenim poſſet aliquis iure ambigere, an quadratus cui conuenit polygoni definitio, & qui fit ex imparium aggregatione, idem ſit qui producitur latere in ſeipſum ducto, quandoquidem neque triangulus neque pentagonus, nec hexagonus, neque alius quiſpiam polygonus præter ſolum quadratum, reſpondet figuræ Geometricæ angulorum & laterum æqualium, eiuſdemque nominis.

A 1. B 3. C 5. D 7.
L 2. M 4. N 6.
F 1. G 2. H 3.

Sint ab vnitate impares A B C D. dico ex eorum ordinata aggregatione fieri omnes quadratos, etenim cùm vnitas A. ſit primus quadratus, dico ſummam duorum A B. eſſe ſecundum quadratum ſeu quadratum binarij, & ſummam trium A B C. eſſe quadratum ternarij, & ſummam quatuor numerorum A B C D. eſſe quadratum quaternarij, & ſic in infinitum, ſumantur numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem, F G H. & ſint eorum dupli L M N. patet igitur ipſos L M N. eſſe numeros pares ordinate diſpoſitos, ac proinde ſi ſingulis addatur vnitas, fieri omnes impares, hoc eſt L. cum vnitate æquatur ipſi B. at M. cum vnitate æquatur ipſi C. ac demum N. cum vnitate æquatur ipſi D & ſic deinceps. Itaque ' quoniam ſi quadrato vnitatis F. hoc eſt ipſi vnitati A, addatur duplum 18. 1. poriſ. lateris illius & præterea vnitas, fit quadratus proxime maior, hoc eſt quadratus binarij, cum L, ſit duplus ipſius F, & B, excedat L, vnitate, patet addito B. ad vnitatem A, fieri quadratum binarij. Rurſus quia quadrato binarij G. addendo duplum ipſius G. & vnitatem, hoc eſt numerum C. fit quadratus ternarij, cum A G. ſimul faciant quadratum binarij vt oſtenſum eſt, facient tres A B C. ſimul quadratum ternarij. Et eodem argumento oſtendetur quatuor A B C D. æquari quadrato quaternarij, & ſic in infinitum. Igitur conſtat propoſitum.

COROLLARIVM.

Patet ergo quemlibet quadratum tot imparibus conſtare, quot vnitates continet latus quadrati.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

In progreſſione arithmetica ab vnitate incipiente, & per vnitatem creſcente, cubus maximi æquatur quadrato maximi, & producto ex maximo in duplum antecedentium.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 12.

Sit vnitas A. & quotlibet numeri deinceps B C D. per vnitatis augmentum creſcentes, ſitque E duplum ipſorum A B C. Dico cubum maximi D. æquari quadrato ipſius D. & producto ex D. in E etenim productus ex D. in E. certa 2. cum quadrato ipſius D. ' æquatur producto ex D E. ſimul in D. at E D. ſimul æquantur quadrato ipſius D. per corollarium 4. huius. Igitur productus ex E. in D. cum quadrato ex D. æquatur producto ex quadrato ipſius D, in D. hoc eſt cubo ipſius D. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

Quotlibet cuborum ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ſumma quadratus eſt, cuius latus componitur ex cuborum ipſorum lateribus ſimul additis.

Sint quotlibet numeri ab vnitate A B C D. secundum seriem numerorum, quorum cubi sint E F G H. Dico summam duorum E F. Itemque trium E F G. itemque quatuor E F G H. esse quadratum, cuius latus est summa duorum A B. vel trium A B C. vel quatuor A B C D.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 1. F 8. G 27. H 64.

Primò enim quadratus summæ duorum A B. æquatur quadratis ipsorum A & B & duplo producti ex A in B. At quadratus vnitatis A æquatur cubo ipsius vnitatis E. quadratus autem ex B. cum duplo producti ex B in A æquatur cubo F per præcedentem. Igitur quadratus summæ duorum A B. æquatur cubis E F. simul, quod erat propositum. Deinde quadratus summæ trium A B C. æquatur quadrato summæ duorum A B. & quadrato ipsius C. & duplo producti ex A B. simul in C. sed quadrato summæ duorum A B. æquantur cubi E F. per demonstrata: quadrato autem ipsius C, cum duplo producti ex A B. simul in C. æquatur cubus G, per præcedentem. Igitur quadratus summæ trium A B C. æquatur cubis E F G. simul. Denique eodem argumento quadratus summæ omnium A B C D. æquatur quadrato summæ trium A B C. hoc est cubis E F G. & quadrato ipsius D. cum duplo producti ex D. in summam trium A B C. hoc est cubo H. per præced. Igitur quadratus summæ ipsorum A B C D. æquatur cubis E F G H simul. Quod erat demonstrandum, eademque est demonstrationis ratio in pluribus, vt patet, quamobrem abundè constat propositum. quarta.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur summam quotlibet cuborum ab vnitate, facere quadratum cuius latus, est numerus triangulus, quia enim A B C D. est progressio naturalis numerorum ab vnitate, patet ex definitione triangulorum, tam A B. simul, quàm A B C, vel A B C D. conficere triangulum, est autem trianguli latus, ipse cuborum numerus, vt etiam perspicuum est.

PROPOSITIO VIGESIMASEXTA.

Quadratus quilibet adsumpto suo latere, duplum facit collateralis trianguli.

A 16.
B.... C. D

Esto quilibet quadratus A cuius latus B C. dico si B C. addatur ad A fieri duplum trianguli à latere B C. etenim ipsi B C. addatur vnitas C D. igitur ex B C. in B D. fiet duplum trianguli ex B C. per 8. Diophanti, sed productus ex B C in B D. æquatur quadrato ex B C. hoc est ipsi A, & producto ex B C in C D. sit hoc est ipsi B C. cum C D. sit vnitas. Ergo duplum trianguli ex B C. æquatur quadrato A cum suo latere B C. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

Vnitas primum cubum: duo sequentes impares coniuncti, secundum cubum; tres sequentes tertium cubum; quatuor succedentes, quartum, semperque vno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares constituunt.

A 1. Disponantur ab vnitate A. numeri impares B C D E F G H K L. dico quod B C. simul secundum ab vnitate cubum faciunt, at D E F. faciunt tertium cubum, ac demum
B 3 / C 5. | R 8 G H K L. quartum cubum constituunt, & sic deinceps, sit enim R. summa duorum B C. & sit T. summa trium D E F. sitque V. summa ipsorum quatuor G H K L. etenim quoniam A B C D E F G K L. sunt impares ordinate dispositi ab vnitate, eorum
D 7. / E 9. / F 11. | T 27 summa, seu summa ipsorum A R T V. est quadratus, cuius latus tot constat vnitatibus, quot sunt numeri A B C D E F G H K L. Quoniam vero ex ipsis vnus sumitur, tum duo, tum tres, tum quatuor, patet numerum numerorum esse triangulum, cuius latus tot continet vnitates, quot fiunt propositorum numerorum sumptiones, hoc est, quot
G 13. / H 15. | sunt ipsi A R T V. Cùm itaque summa ipsorum A R T V. sit quadratus cuius latus est triangulum, erit eadem summa, aggregatum totidem cuborum ab vnitate quot
K 17. / L 19. | V 64 sunt vnitates in latere trianguli, hoc est quot sunt ipsi A R T V, puta quatuor cuborum, simili prorsus argumento ostendemus aggregatum ipsorum A R T. esse summam trium cuborum ab vnitate. Quare relinquetur V. esse quartum cubum, eademque ratione ostendemus A R. simul esse summam duorum cuborum ab vnitate, ac proinde relinquetur T, tertius cubus, eritque R. secundus, cùm A sit vnitas. Quare patet propositum. 25. huius. Corolla. 25. huius.

SCHOLIVM.

Eadem fere ratione demonstratur hac propositio à Francisco Maurolyco, prop. 62. arithmeticorum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hanc propoſitionem ita conſtituo magis vniuerſalem. Vnitas primam columnam in quotumque polygonorum progreſſione conſtituit; duo ſequentes numeri multati primo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, ſecundam columnam; tres ſequentes multati ſecundo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, tertiam columnam, & ſic eodem in infinitum progreſſu.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA.

Cubus quilibet adſumpto ſextuplo trianguli collateralis vnitate aucto facit cubum proxime maiorem.

A. 27. B. 36. C. 64. D 3. E. 6. F. 4. — Sit cubus A cuius latus D. & ab eodem latere triangulus eſto E. cuius ſextuplum B. additoque B. vnitate aucto ad A. fiat C. dico C. eſſe cubum proxime maiorem. Sumatur F. ſuperans vnitate ipſum D. Igitur cubus ex F. [1] æqualis eſt cubo ipſius D. & vnitati, & triplo tum quadrati ipſius D. tum ipſius D. At quadratus ipſius D. cum ſuo latere [2] æquabitur duplo trianguli E. Quare triplum quadrati ex D. cum triplo ipſius D. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur ad cubum ipſius D. hoc eſt ad A. addendo B. & vnitatem, qui fit puta C. eſt cubus ipſius F. Quod demonſtrandum erat.

20. 2. por. 26. huius.

Aliter interuallum cuborum ab ipſis D F. [3] æquatur cubo interualli, hoc eſt vnitati, & triplo producti ex D. in F. At ex D. in F. fit duplum trianguli E. per octauam Diophanti, ac proinde triplum producti ex D. in F. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur interuallum cuborum ab ipſis D F. æquatur ipſi B. & vnitati. Quod erat propoſitum.

21. 2. pori.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

In progreſſione arithmetica, in qua minimus terminus æquatur differentiæ, productus ex minimo in quadratum numeri terminorum, æquatur producto ex maximo in numerum terminorum.

A 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 5. — Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit numerus terminorum F. dico productum ex A. in quadratum ipſius F. æquari producto ex E. in F. Quia enim [1] ex A. in F. fit E. vtique productus ex F. in E. erit ſolidus contentus ſub tribus numeris A. E. F. Quare [2] idem ſolidus fiet ſi F. ducatur in E. & productus hoc eſt quadratus ipſius F. ducatur in A. Quod erat demonſtrandum.

1. huius. 3. 1. pori.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

In hac progreſſione, productus ex minimo in triangulum numeri terminorum, æquatur ſummæ omnium.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 5. G. 30. — Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium G. dico G. æquari producto ex A. in triangulum ipſius F. Etenim ducto F. in ſummam extremorum, hoc eſt in ipſos A. E. fit duplum ipſius G. per quartam Diophanti. At productus ex F. in E. æquatur producto ex quadrato ipſius F. in A. per præcedentem, igitur duplum ipſius G. æquatur productis ex A. in F. & ex A in quadratum F. hoc eſt producto ex A in F. auctum ſuo quadrato. Quare [1] cùm F. cum ſuo quadrato ſit duplus trianguli ex F. erit duplum ipſius G. æquale producto ex A. in duplum trianguli ex F. ac proinde ipſe G. æquabitur producto ex A. in triangulum ipſius F. Quod erat demonſtrandum.

28. huius.

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

In hac progreſſione, productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum, æquatur aggregato cuborum à ſingulis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 8. N. 15. G. 1. H. 2. K. 3. L. 4. M. 5. P. 225. — Sint in hac progreſſione A B C D E. & ipſius A. cubus eſto F. ſumanturque totidem ab vnitate continue diſpoſiti numeri G H K L M. quorum ſumma N. patet ergo N. eſſe triangulum numeri terminorum. Quare ſit eius quadratus P. dico productum ex F. in P. æquari aggregato cuborum à ſingulis A B C D E. Quia enim ſicut [1] A continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, in E. quinquies, ſic etiam G. continetur in H. bis, in K. ter,

2. huius.

ter, in L. quater in M. quinquies, patet ipsos A B C D E esse in iisdem rationibus, in quibus & ipsi G H K L M. Quamobrem & cubi illorum sunt in iisdem rationibus, in quibus & cubi istorum, cum sit ergo cubus A ad cubum G. sicut cubus B. ad cubum H. & cubus C ad cubum K. & cubus D. ad cubum L. & cubus E ad cubum M. erunt & omnes antecedentes hoc est aggregatum cuborum à singulis A B C D E. ad consequentes simul, hoc est ad aggregatum cuborum a singulis G H K L M. sicut F ad cubum ipsius G hoc est ad vnitatem, sed aggregatum cuborum à singulis G H K L M. æquatur ipsi P. per 25. huius, ergo est aggregatum cuborum a singulis A B C D E. ad P. sicut F, ad vnitatem proinde ex definitione multiplicationis, ducto F in P. fiet aggregatum cuborum à singulis A B C D E. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hinc sequitur cubum maximi toties sumptum quot sunt numeri terminorum ad aggregatum cuborum habere minorem rationem quam quadruplam.

PROPOSITIO TRIGESIMASECVNDA.

In hac progressione productus ex minimo in quadratum summæ omnium æquatur aggregato cuborum à singulis.

H 4. K 8. F 30. G 900.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 225. M 15.

Sint in hac progressione A B C D E. quorum summa F. cuius quadratus G. dico ex A. in G. produci aggregatum cuborum à singulis. Sit enim H. quadratus ipsius A & K cubus eiusdem, sitque M. triangulus numeri terminorum, cuius quadratus L. Itaque ' quoniam ex A in M. producitur F est F. medius proportionalis inter quadratos ipsorum A M. hoc est inter H & L. per 7. Diophanti, quamobrem ex H in L. producitur G. quadratus ipsius F. Quamobrem ' cum ex eodem H in A & in L. producantur K & G est A ad L. vt K ad G. ' ac proinde ex A in G. fiet idem numerus, qui ex K in L. sed ex K. in L. fit aggregatum cuborum à singulis per præcedentem. Igitur & ex A in G. fit idem aggregatum cuborum, quod erat ostendendum. 30. huius. 17. 7. 19. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMATERTIA.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, & quilibet extremorum ducatur in quadratum alterius extremi; quilibet autem mediorum ducatur in quadratum alterius medij, fient quatuor solidi in eadem ratione proportionales.

E 4. F 16. G 9. H 36.
A 2. B 4. C 3. D 6.
K 12.
L 24. M 48. N 36. P 72.

Sit A ad B. vt C ad D. & sint ipsorum A B C D. quadrati E F G H. ductoque D. in E. fiat L. & ex A in H. fiat P. & rursus ducto C in F fiat M. & ex B in G. fiat N. dico esse L ad M. & N. ad P. sicut A ad B vel C ad D. sumatur K. planus sub mediis B C. vel sub extremis A D. Quia ergo L fit ducto A in A. & producto E in D. ' idem L fiet ducto A in D, & producto K in A. similiter quia M. fit ducto B in B. & producto F in C fiet idem M. ducto B in C. & producto K in B. quare cum eodem K ducto in A & in B. fiant L M. ' erit L. ad M. vt A ad B. eodem argumento ostendemus ex eodem K. in C, & in D. produci N. & P ac proinde esse N ad P. vt C. ad D. igitur vt A ad B vel C. ad D. sic est L ad M. & N. ad P. quod erat ostendendum. 3. 1. porif. 17. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMAQVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita solidus sub maximo, & sub quadrato summæ extremorum, ad quadruplum aggregati cuborum a singulis.

F 12. L 5.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 30. K 60.

Sint in hac progressione A B C D E. & summa extremorum F. dico esse A ad E. sicut solidus sub E & quadrato ipsius F. ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, sumatur H summa omnium cuius duplum sit K & sit numerus terminorum L. quia ergo ducto L in F fit K per 4 Diophanti, ' at ducto eodem L. in A. fit E ' erit A ad E. sicut F ad K. quare per præcedentem erit A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F. ad productum ex A in quadratum ipsius K, sed productus ex A in quadratum ipsius H ' æquatur aggregato cuborum à singulis, & quadratus ipsius K quadruplus est quadrati sui semissis H. ac proinde productus ex A in quadratum ex K quadruplus est aggregati cuborum à singulis. Igitur est A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, quod demonstrandum erat. 1. huius. 17. 7. 32. huius.

SCHOLIVM.

Ex aliquibus harum propoſitionum licebit faciles elicere regulas ad inueniendum ſummam quotlibet cuborum, quorum latera ſint in hac progreſſione diſpoſita.

PRIMA REGVLA.

Sume triangulum numeri terminorum, & eius quadratum ducito in cubum minimi, fiet aggregatum cuborum a ſingulis.

Conſtat per 31. vt ſi ſint 5. numeri, & ſit minimus 2. ſume triangulum ipſius 5. puta 15. & eius quadratum 225. ducito in 8. cubum ipſius 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800.

SECVNDA.

Ducito minimum in quadratum ſummæ omnium, fiet aggregatum cuborum à ſingulis.

Conſtat per 32. ſic in dato ſupra exemplo, ducito 2. in 900. quadratum ſummæ omnium 30. fit aggregatum cuborum à ſingulis 1800. vt prius.

TERTIA.

Ducito quadratum maximi in quadratum ſummæ extremorum, productum diuide per quadruplum minimi, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Facile infertur ex 34. ſic in dato exemplo ducito 100. quadratum maximi, in 144. quadratum ſummæ extremorum, fit 14400. quem diuide per quadruplum minimi 2. puta per 8. fit 1800. aggregatum cuborum vt ante.

QVARTA.

Ducito maximum in ſemiſſem ſummæ extremorum, vel ſummam extremorum in ſemiſſem maximi, producti quadratum diuide per minimum, orietur aggregatum cuborum à ſingulis.

Rurſus infertur ex 34. vel etiam ex præcedente regula, fit ducendo 10. in 6. vel 12. in 5. fit 60. cuius quadratus 3600. quo diuiſo per minimum 2. fit aggregatum cuborum à ſingulis, vt ſupra 1800.

FINIS.

Ne vacarent paginæ ſequentes, placuit has Epiſtolas adjicere varijs refertas D. P. de FERMAT in quoſdam Græcos authores obſeruationibus, quarum nonnullæ ad Mathematicas pertinent diſciplinas.

περίσται, ὁ δὲ ἀφ' ἑαυτῶν σκοπῶν, ὡς ἔμαθεν τὰς ἡσυχίας πολλὰς ὑπεθέμενος τὰς πλείστας αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hic vulgò legitur, corrigenda ex manuscripto & loco illius reponendum συνεχῶρει quod ex conjecturâ viderat Casaubonus vt patet ex ipsius notis.

Alexandri Pherensis stratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάτερωνι τυραννεύοντος Λυκαίνης πρὸς ἁπάσας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν ἐθάρρων, διέπεμψεν ὅτι ἀκάτιον τύχαι, &c. legendum esse ἐπὶ ἀκατίῳ, vt vult Casaubonus in notis, confirmat codex manuscriptus vbi legitur ἀφ' μικρᾶ πλοιαρίῳ, quæ verba idem sonant.

Cyri stratagema narrat Polyænus lib. 7o. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις φάλαγγα ταξάμενος τρὶς ἡττήθη· ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες ἦγον τὰ τέκνα ἅπασαι ἐν Παταργάδαις τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συμβῆναι, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ εἶδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτους διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τελεμάτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κῦρον πρὸς αὐτοὺς ἄλλης διηθίνης μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuscripto συμπαθόντες quæ vox itidem restituenda in stratagemate Apollodori pag. 435. manuscriptus noster ex quo conijcimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθοῦντες verbis sequentibus rem narrat & stratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθείᾳ τέκνων νικῶσιν, &c. vox autem illa melius authoris sensui respondet quam ἢ παθοῦσις vt legendum censuit Casaubonus.

Darij stratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκαις τειχῇ διηρημένοις, μᾶς ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακῶν ἴζοντας τὰς ἱππους καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα ἐφείθησε τοῖς Πέρσαις, &c. hic loco vocis ἴζοντας quæ est corrupta in editione Tornæsii, legendum ex manuscripto ἀναριθμήτους.

Autophradatis stratagema legitur lib. 7. pag. 516. & tale est, Αὐτοφραδάτης ἐμβαλεῖν Πισίδαις βουλόμενος τὴν εἰσβολὴν στενοπόρον καὶ φυλαττομένην ὁρῶν, προσήγαγε μὲν τὸ στρατόπεδον, πάλιν δὲ ἀπήγαγε μικρόν που, μέχρι σταδίων ς', ἵνα ἐκπλήθωσιν, οἱ μὲν φυλάττοντες τῶν Πισιδῶν ἀπηλλάγησαν, ἀθύμους τοὺς πολεμίους ἀπεργασάμενος. ὁ δὲ τῶν ψιλῶν καὶ ὁπλιτῶν τοὺς ἐλαφροτάτους λαβών, πολλῇ σπουδῇ δρόμων διῆλθε τὰ στενὰ καὶ τῶν Πισιδῶν χώραν ἐπόρθησεν.

In hoc stratagemate loco verborum μέχρι σταδίων ς' reponendum procul dubio ἐπίσημον κόππα, quod Vulteius arithmeticarum apud Græcos notarum parum callens non intellexit, similitudine inter ς' quod significat 6. & ζ' quod significat 90. delusus, legendum igitur μέχρι σταδίων ζ. quam esse veram lectionem, ratio ipsa primum confirmat, si enim Autophradates ad sex tantum stadia recessisset, hostes suspicione, & metu non liberasset, deinde in manuscripto legitur ἀναριθμήτους absque notis arithmeticis.

Scipionis continentiæ exemplum laude dignissimum refertur lib. 8. pag. 568. sequentibus verbis, Σκιπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν φάσιναι, ὡς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένων ἤγαγον καλλεῖς ὑφ' ἡμῶν ἔχνται, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τῇ δὲ ὥρᾳ προπομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχάρισατο, περίκα φάσας ὑπισθόνας τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgo legitur φυγαγωγοὶ quod interpres vertit captiuorum ductores, sed legendum ex manuscripto νυμφαγωγοὶ, hoc est virginum ductores, quæ correctio & verissima, & elegantissima, vt nullus supersit dubitandi locus.

Plura adiungerem, sed feriis iam desinentibus quarum beneficio otium suppetebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.

SCHOLIVM.

Semper autem continget vel E. vel H. parem eſſe, & alterutrius dimidium poſſe ſumi ſine fractione;
1. huius. *nam vel G. par eſt, vel impar; ſi G. ſit par cum eo ducto in A. fiat E. erit & E, par: ſi autem G. ſit impar, ſane quis eum ſuperat vnitate, puta H. par erit.*

Caterum ex multis harum propoſitionum elicuntur regulæ ad inueniendam ſummam quadratorum à quotlibet numeris in hac progreſſione diſpoſitis.

PRIMA.

Ducito numerum terminorum vnitate auctum in quadratum maximi, & producto adde quod ſit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per ſeptimam huius, ſic ducendo 6. in 100. fit 600. cui addendo productum ex 2. in 30. nempe 60. fit 660. cuius triens 220. eſt ſumma quadratorum.

SECVNDA.

Ducito numerum terminorum in planum ſub maximo, & ſub ſumma extremorum, & producto adde quod ſit ex minimo in ſummam omnium, compoſiti triens erit ſumma quadratorum.

Conſtat per duodecimam adiuuante ſeptima, ſic ducendo 5. in 120. (qui ſit ex 10. in 12.) fit 600. cui reddendo 60. vt prius, fit 660. cuius triens eſt 220. vt ſupra.

TERTIA.

Ducito numerum terminorum in quadratum ſummæ extremorum, à producto aufer quod ſit ex minimo in ſummam omnium, reſidui triens erit ſumma quadratorũ.

Conſtat per nonam adiuuante ſeptima, ſic ducto 5. in 144. quadratum ipſius 12. fit 720. vnde ſi auferas 60. reſtat 660. cuius triens eſt 220. vt prius.

Porro ſicut tribus modis, huius regulæ prima pars variata eſt in tribus hiſce præceptis, ita & totidem modis variari poteſt ſecunda. Nam loco producti ex minimo in ſummam omnium ſumi poteſt productus ex minimo in planum ſub maximo, & ſub dimidio numeri terminorum vnitate aucti per decimam quintam, vel productus ex maximo in dimidium ſummæ extremorum per corollarium octauæ.

QVARTA.

Ducito duplum numeri terminorum ternario auctum in quadratum maximi, producto adde planum ſub extremis, compoſiti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per vndecimam: ſic ducendo 13. in 100. fit 1300. cui addendo 20. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

QVINTA.

Ducito quadratum maximi in duplum numeri terminorum auctum ternario, & parte vnitatis à numero terminorum denominata, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per corollarium vndecimæ ſic ducendo 100. in $13\frac{1}{3}$ fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ſupra.

SEXTA.

Ducito numerum terminorum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano ſub maximo & ſub ſumma extremorum contento, producti ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimam tertiam, ſic ducendo 5. in aggregatum ex 144. & ex 120. nempe in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt prius.

SEPTIMA.

Ducito maximum in aggregatum ex quadrato ſummæ extremorum, & ex plano

ſub maximo & ſub ſumma extremorum, productum diuide per minimum, quotientis ſextans erit ſumma quadratorum.

Conſtat per decimamquartam indagando quartum proportionalem, tribus cognitis. Sic ducendo 10. in 264. fit 2640. quo diuiſo per 2. fit 1320. cuius ſextans eſt 220. vt ante.

PROPOSITIO DECIMASEXTA.

In hac progreſſione. Octuplum plani ſub minimo, & ſub ſumma omnium adſcito minimi quadrato æquatur quadrato compoſiti ex minimo, & duplo maximi.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium F. Dico octuplum plani ex A. in F. adſumpto quadrato ipſius A. æquari quadrato compoſiti ex A. & duplo ipſius E. Etenim ' productus bis ex A. in F. æquatur quadrato E. cùm plano ſub A E. Quare octuplum producti ex A. in F. æquatur quadruplo quadrati E. & quadruplo plani ſub A E. Proinde ſi addatur vtrimque quadratus A. vtique octuplum plani ſub A F. cum quadrato A. æquabitur quadrato E. quater, plano ſub A E. quater, & quadrato A. ſemel. Atqui quadruplum quadrati E. æquatur quadrato dupli ipſius E. & quadruplum plani ſub A E. æquatur duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. Rurſus autem ' quadrati ex A. & ex duplo ipſius E. cum duplo plani ſub A. & ſub duplo ipſius E. æquantur quadrato compoſiti ex A. & ex duplo E. Igitur hic quadratus æquatur octuplo plani ſub A F. Quod erat demonſtrandum.

10. huius.

4. ſecundi.

SCHOLIVM.

Hinc rurſus demonſtratur quod ait Diophantus quæſt. 44. lib. 4. Itemque Plutarchus quæſtione Platonica quarta nimirum Πᾶς τρίγωνος ἀριθμὸς ὀκτάκις γενόμενος καὶ ὑποδὰς σχηλαβὴν γίνεται τετράγωνος. *vt euidens eſt ſi A. ponatur vnitas, & differentia progreſſionis vnitas. Tunc enim F. erit triangulus ex definitione. Etenim cum vnitas non mutet numerum quem multiplicat, & quadratus vnitatis ſit ipſa vnitas patet octuplum producti ex A. in F. fore octuplum ipſius F. cui addendo quadratum ipſius A. puta vnitatem fiet quadratus, cuius latus æquabitur duplo ipſius E. & vnitati. Itaque hanc eandem propoſitionem iam tripliciter demonſtrauimus. Primo ad quadrageſimam quartam 4. peculiari demonſtratione. Secundo hic vniuerſaliter, prout hæc proprietas conuenit omni progreſſioni arithmetica, cuius minimus terminus æqualis eſt differentiæ. Tertio vniuerſaliſſimè, ad octauam Diophanti de numeris multangulis, proprietatem hanc omni in vniuerſum progreſſioni arithmeticæ applicantes vi theorematis 5. eorum quæ ad ſextam demonſtrauimus.*

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5. F 15.

Hæc ergo dixiſſe ſufficiat de progreſſione quadratorum, quorum latera in hac progreſſione ſunt ordinata. Agamus iam de omnium polygonorum in vniuerſum progreſſione.

PROPOSITIO DECIMASEPTIMA.

Si numerus ſecetur in duas partes, tum in tres, tum in quatuor, tum in quinque; & ſic deinceps, & quælibet pars vnius ſectionis comparetur, cuilibet ex aliis partibus eiuſdem ſectionis, continget hanc comparationem in prima ſectione fieri ſemel, in ſecunda ter, in tertia ſexies, in quarta decies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

A....C.....B
D....E....F....G
H...K...L...M...N

Secetur A B. in duas partes A C. C B. & ſecetur D G. in tres D E. E F. F G. & ſecetur H N. in quatuor H K. K L. L M. M N. & ſic deinceps, & comparetur quælibet pars vnius ſectionis cuilibet ex aliis eiuſdem ſectionis, dico in ſectione numeri A B. hanc comparationem fieri ſemel, in ſectione D G. fieri ter, in ſectione H N. fieri ſexies, & ſic continue per numeros triangulos aſcendendo.

Primo enim in ſectione A B. patet A C. tantum comparari poſſe ipſi C B. vnde conſtat propoſitum.

Secundo in ſectione D G. quia D E. comparari poteſt ſingulis E F. F G. & ipſæ E F. F G. rurſus inter ſe ſemel comparantur, patet tres hic fieri comparationes. Quod erat intentum.

Tertio in ſectione H N. quia H K. comparari poteſt ſigillatim, tribus reliquis, vnde tres oriuntur comparationes, & rurſus tres reliquæ per proxime demonſtrata, ter inter ſe comparantur. Patet hic in vniuerſum ſex fieri comparationes, quod erat propoſitum.

Denique ſi numerus ſecetur in quinque partes, cùm prima pars comparari poſſit quatuor reliquis, & quatuor reliquæ per iam demonſtrata, ſexies inter ſe comparentur, fient omnino decem compa-

tionum æquabitur triangulo præcedentium comparationum adſciſcenti ſuum latus vnitate auctum, vnde fiet triangulus proximè maior ex definitione triangulorum. Quamobrem ex omni parte patet propoſitum.

PROPOSITIO DECIMAOCTAVA.

In hac progreſſione ſi polygonus quilibet minimi ducatur in triangulum numeri terminorum, & producto addatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub numero angulorum, binario multato, & ſub ſumma totidem triangulorum ab vnitate quot ſunt ipſi numeri vno minus, fiet ſumma ſimilium polygonorum a ſingulis.

L 2.
G 2. M 2.
E 2. H 2. N 2.
F 2. K 2. O 2.
A 2. B 4. C 6. D 8.
coroll. 1. huius. P 7. Q 10. R 4. T 5. V 10.
X 70. Y 200.

Sint in hac progreſſione A B C D. & ſit P. quilibet polygonus minimi, puta heptagonus, ſitque Q. triangulus numeri terminorum, quo ducto in P. fiat X. ſitque R. quadratus ipſius A. & T. numerus angulorum binario multatus, & V. ſumma totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi B C D. & ſolidus ſub ipſis R T V. eſto Y. dico aggregatum duorum X Y. æquari ſummæ ſimilium polygonorum, puta heptagonorum à ſingulis A B C D. Quia enim A. continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, reſoluantur B C D. in numeros æquales ipſi A. puta B. in E F. At C in G H K. ac demum D. in L M N O. Itaque per ſcholium 10. primi polygonus B. æquatur polygonis ipſorum E F. & producto ex E, in F, ſeu quadrato R. ducto in T. ſimiliter polygonus C. æquatur polygonis G H K. & productis ex qualibet parte in quamlibet ex aliis, ſeu totidem quadratis R. ductis in T. denique polygonus D. æquatur polygonis ipſorum L M N O. & productis ex quolibet in quemlibet ex alijs, ſeu totidem R. ductis in T. quamobrem ſi his omnibus polygonis & productis addatur polygonus ipſius A. patet polygonos à ſingulis A B C D. continere polygonum ipſius A. ſeu ipſum P. ſemel, bis, ter, quater, & ſic deinceps, id eſt ſecundum vnitates trianguli Q. & præterea ipſum R. ductum in T. ſemel, ter, ſexies & ſic deinceps ſecundum triangulos ab vnitate, id eſt ſecundum vnitates ipſius V. per præcedentem. Quamobrem polygoni à ſingulis A B C D. æquantur producto ex Q. in P. ſeu ipſi X. adſciſcenti ſolidum ſub R. T. V. nempe ipſum Y. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO DECIMANONA.

In hac progreſſione aggregatum productorum ex minimo in maximum ſemel, in ſecundum ab illo bis, in tertium ter, in quartum quater, & ſic deinceps, æquatur producto ex quadrato minimi in ſummam totidem triangulorum ab vnitate, quot ſunt ipſi numeri.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.
N. 4. M. 3. L. 2. K. 1.
E. 1. F. 2. G. 3. H. 4.
O. 4. P. 6. Q. 6. R. 4.

Sint in hac progreſſione A B C D. Dico ſi A. ducatur in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, & ſic deinceps, aggregatum productorum, æquari producto ex A. in ſummam totidem triangulorum ab vnitate. Etenim ſumantur totidem numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſiti E. F. G. H. quibus ſuperponantur totidem illis æquales ordine inuerſo, puta K L M N. & ex K. in H. fiat R. ex L. in G. fiat Q. ex M. in F. fiat P. ex N. in E fiat O.

Coroll. 1. huius. Patet A. contineri in A. ſecundum E. in B. ſecundum F. in C. ſecundum Q. in D. ſecundum H. Quare cùm K. ſit vnitas, ſi A. ducatur ſemel in D. productus continebit quadratum ipſius A. toties, quoties productus ex K. in H. puta R. continet vnitatem. Similiter quia L. eſt binarius, ſi A. ducatur bis in C. productus continebit quadratum A. toties quoties productus ex L. in G. puta Q. continet vnitatem. Eodem argumento probabitur productum ex A. in B. ter toties continere quadratum A. quoties P. continet vnitatem, & rurſus productum ex A. in A. quater toties continere quadratum A. quoties O. continet vnitatem. Quamobrem producti omnes ex A. in D. ſemel, in C. bis, in B. ter, in A. quater, toties continent quadratum A. quot ſunt

14. 1. appen. vnitates in ſumma ipſorum O P Q R. ſed ſumma ipſorum O P Q R. æquatur ſummæ triangulorum ab ipſis E. F. G. H. Igitur producti omnes ex A. in D. ſemel in C. bis, in B. ter, in A. quater toties continent quadratum A. quot ſunt vnitates in ſumma totidem triangulorum ab vnitate. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMA.

In hac progreſſione, ſi numerus terminorum vnitate auctus, ducatur in polygonum maximi, & à producto auferatur ſolidus contentus ſub quadrato minimi, ſub

numero angulorum binario multato, & sub summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi numeri vno minus, residuum æquatur duplo polygonorum à singulis.

K. 8. H. 6. G. 4. F. 2.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 3.

Sint in hac progressione A B C D E. & numerus angulorum binario multatus esto L. Dico si numerus terminorum vnitate auctus ducatur in polygonum ipsius E. & à producto auferatur solidus contentus sub quadrato A. numero L. & summa totidem triangulorum ab vnitate, quot sunt ipsi A B C D. residuum æquari duplo polygonorum à singulis A B C D E. Etenim superponantur ipsis totidem illis æquales ordine inuerso F G H K. Tunc ex demonstratione septimæ huius patet binos A K. B H. C G. D F. æquari sigillatim ipsi E. quare si sumantur polygoni harum summarum, & præterea polygonus ipsius E. bis, horum aggregatum æquabitur producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum ipsius E. Atqui polygoni. summæ binorum A K. B H. C G. D F. ' æquantur polygonis omnium A K. B H. C G. D F. seu duplo polygonorum à singulis A B C D. & præterea productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis A B C D E. & productis ex A. in K. ex B. in H. ex C. in G. ex D. in F. ductis in L. sed hi producti (' quandoquidem A. continetur in F. semel, in G bis, in H ter, in K quater) æquantur productis ex A. in D. semel, in C. bis, in B. ter in A. quater, ac proinde per præcedentem iidem producti æquantur producto ex quadrato A, in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. Igitur productus ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E. æquatur duplo polygonorum à singulis, & producto ex quadrato A, in summam tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. ducto in L. quare si solidus sub quadrato A, numero L, & summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C D. auferatur à producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum E, residuum erit duplum polygonorum à singulis A B C D E. quod demonstrare oportuit.

10. 1. apg.

coroll. 1. huius.

PROPOSITIO VIGESIMAPRIMA.

In hac progressione, qui fit ex polygono minimi in triangulum numeri terminorum, adscito producto ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi, æquatur triplo polygonorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 50. F 460.
K 120.

Sint in hac progressione A B C D. & qui fit ex polygono minimi A, in triangulum numeri terminorum esto E. qui fit autem ex numero terminorum vnitate aucto in polygonum maximi esto F. dico aggregatum duorum E F. æquari triplo polygonorum à singulis, etenim sumatur K, solidus sub quadrato A, sub numero angulorum binario multato, & sub summa tot triangulorum ab vnitate quot sunt ipsi A B C. igitur per 18. ambo E K. simul æquantur summæ polygonorum à singulis A B C D. sed per præcedentem, detracto K, ex F. manet duplum polygonorum à singulis. Igitur si ad F. multatum numero K. concipiamus addi ipsos E K. nempe summam polygonorum à singulis; fiet vtique summa ipsorum E F. æqualis triplo polygonorum à singulis, quod demonstrandum erat.

PROPOSITIO VIGESIMASECVNDA.

In hac progressione si productus ex polygono minimi in numerum terminorum adsciscat duplum polygoni maximi, & aggregatum ducatur in numerum terminorum vnitate auctum, fiet sextuplum polygonorum à singulis.

A 2. B 4. C 6. D 8.
E 3. F 4. G 5. H 12.
K 60. L 36. M 72.
N 360. O 420. P 84.

Sint in hac progressione A B C D. & polygonus minimi esto E, numerus vero terminorum F, & illo vnitate maior esto G. ductoque E in F. fiat H. Maximi vero polygonus esto L. cuius duplum M. quo addito ad H. fiat P. ductoque P. in G. fiat O. dico O. esse sextuplum polygonorum à singulis, etenim ducto G in ipsos H. M. fiant K N. cùm ergo ex eodem G in P, summam eorundem H M. factus sit O. erit O. æqualis ambobus K N. Quia vero ex E in F, fit H. & ex H in G. fit K, est K. solidus sub tribus E F G. proinde ' idem K, fiet ducto F in G. & producto in E, sed ex F. in G. fit duplum trianguli ipsius F. per octauam Diophanti. Ergo K, fit ducto E, in duplum trianguli F, similiter N. factus est ex G, in M, duplum polygoni L. ergo summa duorum K N. seu O. componitur ex ductu E. in duplum trianguli ex F, & ex ductu G in duplum polygoni ex D. sed horum semissis, nempe productus ex E, in triangulum ex F. vna cum producto ex G. in polygonum ex D. æquatur triplo polygonorum à singulis per præcedentem. Igitur O, æquatur sextuplo eorundem polygonorum. Quod ostendendum susceperam.

3. 1. poris.

SCHOLIVM.

Ex his duabus propoſitionibus duo elici poſſunt Canones ad inueniendum ſummam quotlibet ſimilium polygonorum, quorum latera in hac progreſſione diſponantur, ſed quia ipſi Canones ab ipſis propoſitionibus non differunt, illos adſcribere ſupernacaneum duxi. Itaque hactenus de polygonorum progreſſione dictum eſto: Reſtat vt agamus de cuborum progreſſione, ſed prius tres inſignes illorum proprietates demonſtrabimus, quæ ad illorum progreſſionem aliquatenus ſpectant.

PROPOSITIO VIGESIMATERTIA.

Si diſponantur omnes numeri impares ab vnitate, ex illorum ordinata & continua additione, quadrati omnes procreabuntur.

Putabit forte quiſpiam nos huic propoſitioni ſuperſedere debuiſſe, quandoquidem ex polygonorum definitione quadratis applicata, hoc ipſum manifeſtum fit. Verum quoniam antiqua definitio quadratorum ab Euclide priciſque omnibus, & ab ipſo Diophanto libro primo arithmeticorum tradita, diuerſa eſt, quatenus definiuntur quadrati, numeri qui fiunt ex alio quopiam in ſeipſum multiplicato, operæpretium viſum eſt, oſtendere vtramque definitionem iiſdem numeris conuenire, ne vlla ſuperſit hac de re dubitatio. Etenim poſſet aliquis iure ambigere, an quadratus cui conuenit polygoni definitio, & qui fit ex imparium aggregatione, idem ſit qui producitur latere in ſeipſum ducto, quandoquidem neque triangulus neque pentagonus, nec hexagonus, neque alius quiſpiam polygonus præter ſolum quadratum, reſpondet figuræ Geometricæ angulorum & laterum æqualium, ciuſdemque nominis.

A 1. B 3. C 5. D 7.
L 2. M 4. N 6.
F 1. G 2. H 3.

Sint ab vnitate impares A B C D. dico ex eorum ordinata aggregatione fieri omnes quadratos, etenim cùm vnitas A. ſit primus quadratus, dico ſummam duorum A B. eſſe ſecundum quadratum ſeu quadratum binarij, & ſummam trium A B C. eſſe quadratum ternarij, & ſummam quatuor numerorum A B C D. eſſe quadratum quaternarij, & ſic in infinitum, ſumantur numeri ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem, F G H. & ſint eorum dupli L M N. patet igitur ipſos L M N. eſſe numeros pares ordinate diſpoſitos, ac proinde ſi ſingulis addatur vnitas, fieri omnes impares, hoc eſt L. cum vnitate æquatur ipſi B. at M. cum vnitate æquatur ipſi C. ac demum N. cum vnitate æquatur ipſi D & ſic deinceps. Itaque ' quoniam ſi quadrato vnitatis F. hoc eſt ipſi vnitati A, addatur duplum lateris illius & præterea vnitas, fit quadratus proxime maior, hoc eſt quadratus binarij, cum L, ſit duplus ipſius F, & B, excedat L, vnitate, patet addito B. ad vnitatem A, fieri quadratum binarij. Rurſus quia quadrato binarij G. addendo duplum ipſius G. & vnitatem, hoc eſt numerum C. fit quadratus ternarij, cum A G. ſimul faciant quadratum binarij vt oſtenſum eſt, facient tres A B C. ſimul quadratum ternarij. Et eodem argumento oſtendetur quatuor A B C D. æquari quadrato quaternatij, & ſic in infinitum. Igitur conſtat propoſitum.

18. 1. poriſ.

COROLLARIVM.

Patet ergo quemlibet quadratum tot imparibus conſtare, quot vnitates continet latus quadrati.

PROPOSITIO VIGESIMAQVARTA.

In progreſſione arithmetica ab vnitate incipiente, & per vnitatem creſcente, cubus maximi æquatur quadrato maximi, & producto ex maximo in duplum antecedentium.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 12.

Sit vnitas A. & quotlibet numeri deinceps B C D. per vnitatis augmentum creſcentes, ſitque E duplum ipſorum A B C. Dico cubum maximi D. æquari quadrato ipſius D. & producto ex D. in E etenim productus ex D. in E. cum quadrato ipſius D. ' æquatur producto ex D E. ſimul in D. at E D. ſimul æquantur quadrato ipſius D. per corollarium 4. huius. Igitur productus ex E. in D. cum quadrato ex D. æquatur producto ex quadrato ipſius D, in D. hoc eſt cubo ipſius D. Quod erat oſtendendum.

tertia 2.

PROPOSITIO VIGESIMAQVINTA.

Quotlibet cuborum ab vnitate ſecundum ſeriem naturalem diſpoſitorum ſumma quadratus eſt, cuius latus componitur ex cuborum ipſorum lateribus ſimul additis.

Sint quotlibet numeri ab vnitate A B C D. secundum seriem numerorum, quorum cubi sint E F G H. Dico summam duorum E F. Itemque trium E F G. itemque quatuor E F G H, esse quadratum, cuius latus est summa duorum A B. vel trium A B C. vel quatuor A B C D.

A 1. B 2. C 3. D 4.
E 1. F 8. G 27. H 64.

Primò enim quadratus summæ duorum A B. æquatur quadratis ipsorum A & B & duplo producti ex A in B. At quadratus vnitatis A æquatur cubo ipsius vnitatis E. quadratus autem ex B. cum duplo producti ex B in A æquatur cubo F per præcedentem. Igitur quadratus summæ duorum A B. æquatur cubis E F. simul, quod erat propositum. Deinde quadratus summæ trium A B C. æquatur quadrato summæ duorum A B. & quadrato ipsius C. & duplo producti ex A B. simul in C. sed quadrato summæ duorum A B. æquantur cubi E F. per demonstrata: quadrato autem ipsius C, cum duplo producti ex A B. simul in C. æquatur cubus G, per præcedentem. Igitur quadratus summæ trium A B C. æquatur cubis E F G. simul. Denique eodem argumento quadratus summæ omnium A B C D. æquatur quadrato summæ trium A B C. hoc est cubis E F G. & quadrato ipsius D. cum duplo producti ex D. in summam trium A B C. hoc est cubo H. per præced. Igitur quadratus summæ ipsorum A B C D. æquatur cubis E F G H simul. Quod erat demonstrandum, eademque est demonstrationis ratio in pluribus, vt patet, quamobrem abundè constat propositum. quarta 4.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur summam quotlibet cuborum ab vnitate, facere quadratum cuius latus, est numerus triangulus, quia enim A B C D. est progressio naturalis numerorum ab vnitate, patet ex definitione triangulorum, tam A B. simul, quàm A B C, vel A B C D. conficere triangulum, est autem trianguli latus, ipse cuborum numerus, vt etiam perspicuum est.

PROPOSITIO VIGESIMASEXTA.

Quadratus quilibet adsumpto suo latere, duplum facit collateralis trianguli.

A 16.
B.... C. D

Esto quilibet quadratus A cuius latus B C. dico si B C. addatur ad A fieri duplum trianguli à latere B C. etenim ipsi B C. addatur vnitas C D. igitur ex B C. in B D. fiet duplum trianguli ex B C. per 8. Diophanti, sed productus ex B C in B D. æquatur quadrato ex B C. hoc est ipsi A, & producto ex B C in C D. sit hoc est ipsi B C. cum C D. sit vnitas. Ergo duplum trianguli ex B C. æquatur quadrato A cum suo latere B C. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIGESIMASEPTIMA.

Vnitas primum cubum, duo sequentes impares coniuncti, secundum cubum; tres sequentes tertium cubum; quatuor succedentes, quartum, semperque vno plures sequentem deinceps in infinitum cubum aggregati impares constituunt.

A 1.
B 3 | R 8 | C 5.
D 7. | E 9. | F 11. | T 27
G 13. | H 15. | K 17. | L 19. | V 64

Disponantur ab vnitate A. numeri impares B C D E F G H K L. dico quod B C. simul secundum ab vnitate cubum faciunt, at D E F. faciunt tertium cubum, ac demum G H K L. quartum cubum constituunt, & sic deinceps, sit enim R. summa duorum B C. & sit T. summa trium D E F. sitque V. summa ipsorum quatuor G H K L. etenim quoniam A B C D E F G K L. sunt impares ordinate dispositi ab vnitate, eorum summa, seu summa ipsorum A R T V. est quadratus, cuius latus tot constat vnitatibus, quot sunt numeri A B C D E F G H K L. Quoniam vero ex ipsis vnus sumitur, tum duo, tum tres, tum quatuor, patet numerum numerorum esse triangulum, cuius latus tot continet vnitates, quot fiunt propositorum numerorum sumptiones, hoc est, quot sunt ipsi A R T V. Cùm itaque summa ipsorum A R T V. sit quadratus cuius latus est triangulum, erit eadem summa, aggregatum totidem cuborum ab vnitate quot sunt vnitates in latere trianguli, hoc est quot sunt ipsi A R T V, puta quatuor cuborum, simili prorsus argumento ostendemus aggregatum ipsorum A R T. esse summam trium cuborum ab vnitate. Quare relinquetur V. esse quartum cubum, eademque ratione ostendemus A R. simul esse summam duorum cuborum ab vnitate, ac proinde relinquetur T, tertius cubus, eritque R. secundus, cùm A sit vnitas. Quare patet propositum. 25. huius. Corolla. 25. huius.

SCHOLIVM.

Eadem fere ratione demonstratur hac propositio à Francisco Maurolyco, prop. 62. arithmeticorum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hanc propoſitionem ita conſtituo magis vniuerſalem. Vnitas primam columnam in quotumque polygonorum progreſſione conſtituit; duo ſequentes numeri multati primo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, ſecundam columnam; tres ſequentes multati ſecundo triangulo toties ſumpto quot ſunt anguli polygoni quaternario multati, tertiam columnam, & ſic eodem in infinitum progreſſu.

PROPOSITIO VIGESIMAOCTAVA.

Cubus quilibet adſumpto ſextuplo trianguli collateralis vnitate aucto facit cubum proxime maiorem.

A. 27. B. 36. C. 64. D 3. E. 6. F. 4.

Sit cubus A cuius latus D. & ab eodem latere triangulus eſto E. cuius ſextuplum B. additoque B. vnitate aucto ad A. fiat C. dico C. eſſe cubum proxime maiorem. Sumatur F. ſuperans vnitate ipſum D. Igitur cubus ex F. [20. 2. por.] æqualis eſt cubo ipſius D. & vnitati, & triplo tum quadrati ipſius D. tum ipſius D. At quadratus ipſius D. [26. huius.] cum ſuo latere æquabitur duplo trianguli E. Quare triplum quadrati ex D. cum triplo ipſius D. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur ad cubum ipſius D. hoc eſt ad A. addendo B. & vnitatem, qui fit puta C. eſt cubus ipſius F. Quod demonſtrandum erat.

[21. 2. pori.] Aliter interuallum cuborum ab ipſis D F. æquatur cubo interualli, hoc eſt vnitati, & triplo producti ex D. in F. At ex D. in F. fit duplum trianguli E. per octauam Diophanti, ac proinde triplum producti ex D. in F. æquatur ſextuplo ipſius E. hoc eſt ipſi B. Igitur interuallum cuborum ab ipſis D F. æquatur ipſi B. & vnitati. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO VIGESIMANONA.

In progreſſione arithmetica, in qua minimus terminus æquatur differentiæ, productus ex minimo in quadratum numeri terminorum, æquatur producto ex maximo in numerum terminorum.

A 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 5.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ſit numerus terminorum F. dico productum ex A. in quadratum ipſius F. æquari producto ex E. in F. Quia enim [1. huius.] ex A. in F. fit E. vtique productus ex F. in E. erit ſolidus [3. 1. pori.] contentus ſub tribus numeris A. E. F. Quare idem ſolidus fiet ſi F. ducatur in E. & productus hoc eſt quadratus ipſius F. ducatur in A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO TRIGESIMA.

In hac progreſſione, productus ex minimo in triangulum numeri terminorum, æquatur ſummæ omnium.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 5. G. 30.

Sint numeri qui prius, & ſit ſumma omnium G. dico G. æquari producto ex A. in triangulum ipſius F. Etenim ducto F. in ſummam extremorum, hoc eſt in ipſos A. E. fit duplum ipſius G. per quartam Diophanti. At productus ex F. in E. æquatur producto ex quadrato ipſius F. in A. per præcedentem, igi- [28. huius.] tur duplum ipſius G. æquatur productis ex A. in F. & ex A in quadratum F. hoc eſt producto ex A in F. auctum ſuo quadrato. Quare cùm F. cum ſuo quadrato ſit duplus trianguli ex F. erit duplum ipſius G. æquale producto ex A. in duplum trianguli ex F. ac proinde ipſe G. æquabitur producto ex A. in triangulum ipſius F. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO TRIGESIMAPRIMA.

In hac progreſſione, productus ex cubo minimi in quadratum trianguli numeri terminorum, æquatur aggregato cuborum à ſingulis.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. E. 10. F. 8. N. 15.
G. 1. H. 2. K. 3. L. 4. M. 5. P. 225.

Sint in hac progreſſione A B C D E. & ipſius A. cubus eſto F. ſumanturque totidem ab vnitate continue diſpoſiti numeri G H K L M. quorum ſumma N. patet ergo N. eſſe triangulum numeri terminorum. Quare ſit eius quadratus P. dico productum ex F. in P. æquari aggregato cuborum à ſingulis A B C D E. Quia enim ſicut [2. huius.] A continetur in B. bis, in C. ter, in D. quater, in E. quinquies, ſic etiam G. continetur in H. bis, in K. ter,

ter, in L. quater in M. quinquies, patet ipsos A B C D E esse in iisdem rationibus, in quibus & ipsi G H K L M. Quamobrem & cubi illorum sunt in iisdem rationibus, in quibus & cubi istorum, cum sit ergo cubus A ad cubum G. sicut cubus B. ad cubum H. & cubus C ad cubum K. & cubus D. ad cubum L. & cubus E ad cubum M. erunt & omnes antecedentes hoc est aggregatum cuborum à singulis A B C D E. ad consequentes simul, hoc est ad aggregatum cuborum à singulis G H K L M. sicut F ad cubum ipsius G hoc est ad vnitatem, sed aggregatum cuborum à singulis G H K L M. æquatur ipsi P. per 25. huius, ergo est aggregatum cuborum à singulis A B C D E. ad P. sicut F, ad vnitatem proinde ex definitione multiplicationis, ducto F in P. fiet aggregatum cuborum à singulis A B C D E. Quod erat demonstrandum.

OBSERVATIO D. P. F.

Hinc sequitur cubum maximi toties sumptum quot sunt numeri terminorum ad aggregatum cuborum habere minorem rationem quam quadruplam.

PROPOSITIO TRIGESIMA SECVNDA.

In hac progressione productus ex minimo in quadratum summæ omnium æquatur aggregato cuborum à singulis.

H 4. K 8. F 30. G 900.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
L 225. M 15.

Sint in hac progressione A B C D E. quorum summa F. cuius quadratus G. dico ex A. in G. produci aggregatum cuborum à singulis. Sit enim H. quadratus ipsius A & K cubus eiusdem, sitque M. triangulus numeri terminorum, cuius quadratus L. Itaque [a] quoniam ex A in M. producitur F est F. medius proportionalis inter quadratos ipsorum A M. hoc est inter H & L. per 7. Diophanti, quamobrem ex H in L. producitur G. quadratus ipsius F. Quamobrem [b] cum ex eodem H in A & in L. producantur K & G est A ad L. vt K ad G. [c] ac proinde ex A in G. fiet idem numerus, qui ex K in L. sed ex K. in L. fit aggregatum cuborum à singulis per præcedentem. Igitur & ex A in G. fit idem aggregatum cuborum, quod erat ostendendum.

30. huius.
17. 7.
19. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMA TERTIA.

Si fuerint quatuor numeri proportionales, & quilibet extremorum ducatur in quadratum alterius extremi; quilibet autem mediorum ducatur in quadratum alterius medij, fient quatuor solidi in eadem ratione proportionales.

E 4. F 16. G 9. H 36.
A 2. B 4. C 3. D 6.
K 12.
L 24. M 48. N 36. P 72.

Sit A ad B. vt C ad D. & sint ipsorum A B C D. quadrati E F G H. ductoque D. in E. fiat L. & ex A in H. fiat P. & rursus ducto C in F fiat M. & ex B in G. fiat N. dico esse L ad M. & N. ad P. sicut A ad B vel C ad D. sumatur K. planus sub mediis B C. vel sub extremis A D. Quia ergo L fit ducto A in A. & producto E in D. [a] idem L. fiet ducto A in D, & producto K in A. similiter quia M. fit ducto B in B. & producto F in C fiet idem M. ducto B in C. & producto K in B. quare cum eodem K ducto in A & in B. fiant L M. [b] erit L. ad M. vt A ad B. eodem argumento ostendemus ex eodem K. in C, & in D. produci N. & P ac proinde esse N ad P. vt C. ad D. igitur vt A ad B vel C. ad D. sic est L ad M. & N. ad P. quod erat ostendendum.

3. 1. perist.
17. 7.

PROPOSITIO TRIGESIMA QVARTA.

In hac progressione, est vt minimus ad maximum, ita solidus sub maximo, & sub quadrato summæ extremorum, ad quadruplum aggregati cuborum à singulis.

F 12. L 5.
A 2. B 4. C 6. D 8. E 10.
H 30. K 60.

Sint in hac progressione A B C D E. & summa extremorum F. dico esse A ad E. sicut solidus sub E & quadrato ipsius F. ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, sumatur H summa omnium cuius duplum sit K & sit numerus terminorum L. quia ergo ducto L in F fit K per 4 Diophanti, [a] at ducto eodem L. in A. fit E [b] erit A ad E. sicut F ad K. quare per præcedentem erit A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F. ad productum ex A in quadratum ipsius K, sed productus ex A in quadratum ipsius H [c] æquatur aggregato cuborum à singulis, & quadratus ipsius K quadruplus est quadrati sui semissis H. ac proinde productus ex A in quadratum ex K quadruplus est aggregati cuborum à singulis. Igitur est A ad E. sicut productus ex E in quadratum ipsius F ad quadruplum aggregati cuborum à singulis, quod demonstrandum erat.

1. huius.
17. 7.
31. huius.

ἀφίεσαν, ὁ δὲ ἀφ' ἑαυτῶν, ὡς ἔμαθον τὰς ἵππους πολλὰς ὑπεβίβασθε τὰς πλείστας αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hic vulgò legitur, corrigenda ex manuscripto & loco illius reponendum συνεχώρει quod ex conjecturâ viderat Casaubonus vt patet ex ipsius notis.

Alexandri Pherensis stratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάτερων ἀπολοχεύετος Λεωσθένης πρὸς ἁπάσας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φατρῶν ναυμαχεῖν ἐθάρρων, διέπεμψεν ὅτι ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum esse ἐπὶ ἀκατίου, vt vult Casaubonus in notis, confirmat codex manuscriptus vbi legitur διὰ μικρῶν πλοιαρίων, quæ verba idem sonant.

Cyri stratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδους ἀθροταξάμενος τρὶς ἡττήθη; ἐπεὶ δὲ Πέρσαι αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Παισαργάδαις τὴν τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἴδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐταῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτους διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τελεωτάτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κύρῳ πρὸς αὐτοὺς ἄλλης δεηθῆναι μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuscripto συμπαθόντες quæ vox itidem restituenda in stratagemate Apollodori pag. 435. manuscriptus noster ex quo conijcimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθοῦντες verbis sequentibus rem narrat & stratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθείᾳ τύπτειν νικῶμενοι, &c. vox autem illa melius authoris sensui respondet quam ἢ παθόντες vt legendum censuit Casaubonus.

Darij stratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκαις τειχῇ διηρημένοις, μιᾶς ἐκράτησε μοίρας, τῶν δὲ Σακῶν ἰζόντων τὰς ἱππους καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα ἀφεῖθησαν τοῖς Πέρσαις, &c. hic loco vocis ἰζόντων quæ est corrupta in editione Tornæsij, legendum ex manuscripto ἀναριθόντων.

Autophradatis stratagema legitur lib. 7. pag. 516. & tale est, Αὐτοφραδάτης ἐμβαλεῖν Πισίδαις βουλόμενος τὴν ἐπιβολὴν ἐνεποίησε καὶ φυλαττομένου ὁρῶν, ἀφεστήκει μὲν τὸ στρατόπεδον, πάλιν δ' ἀπήγαγεν ὀπίσω, μέχρι σταδίων ς', νυξὶ ἐπῆλθεν, οἱ μὲν φυλάττοντες τῶν Πισιδῶν ἀπηλλάγησαν, ὀλίγοι δὲ τοὺς πολεμίους ἀπηλπισμένους. ὁ δὲ τῶν φίλων καὶ ὁπλιτῶν τοὺς ἐλαφροτάτους λαβὼν, πολλῇ σπουδῇ δρόμων ἐπῆλθε τὰ στενὰ καὶ τῶν Πισιδῶν χώραν ἐπόρθησεν.

In hoc stratagemate loco verborum μέχρι σταδίων ς' reponendum procul dubio ἐπίσημον κόππα, quod Vulteius arithmeticarum apud Græcos notarum parum callens non intellexit, similitudine inter ς' quod significat 6. & ζ' quod significat 90. delusus, legendum igitur μέχρι σταδίων ζ'. quam esse veram lectionem, ratio ipsa primum confirmat, si enim Autophradates ad sex tantum stadia recessisset, hostes suspicione, & metu non liberasset, deinde in manuscripto legitur ἐννενήκοντα absque notis arithmeticis.

Scipionis continentiæ exemplum laude dignissimum refertur lib. 8. pag. 568. sequentibus verbis, Σκιπίων δορυάλωτον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν φόβισας, ὡς οἱ φυγαγωγοὶ παρθένων ἤγαγον κάλλει ὑπερφυῶς ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τῷ δ' ὧρα προσομίσαντος, ὁ δ' ἐκ ταύτα συνεχάρισατο, προεξαφῆκας ὑπεδέδωκε τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgo legitur φυγαγωγοὶ quod interpres vertit captiuorum ductores, sed legendum ex manuscripto νυμφαγωγοὶ, hoc est virginum ductores, quæ correctio & verissima, & elegantissima, vt nullus superfit dubitandi locus.

Plura adiungerem, sed feriis iam desinentibus quarum beneficio otium suppetebat, finem quoque huic παρεμβολῶν παρεμβολῇ imponimus. Vale & me ama.

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON. S. Fermat S. P. D.

CRiticas obſeruationes quas mihi nuper miſiſti, vir clariſſime, ſæpius legi non ſine voluptate & admiratione; in illis enim ingenij, judicij, & doctrinæ dotes quas in te iampridem ſuſpicimus vbique elucent, nihil autem inuenire poſſim quod tanti muneris vice tibi referam, niſi commodùm egeſtati meæ ſuccurrerent variæ lectiones quas vir tibi ſingulari coniunctus amicitiâ, cuius mihi iucunda ſemper eſt recordatio, margini appoſuit quorumdam librorum quos ſedulò peruoluebat, & quorum pleraque loca, ſed ὀλίγα πάριγρα, emendauit; ſcis enim quàm præcoci ille vbertate florum amænitatem fructuum maturitati iunxerit, nec me latet quantâ ipſe fiduciâ ſuas exercitationes ſolitus ſit in tuum ſinum effundere; licet autem omnes iſtæ quas excerpſi emendationes, tibi nouitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua eſt comitas, te benignâ manu ſuſcepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clariſſime, noſti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi inſtar eſt aut iſagoges Philoſophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat, illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Iſmael Bullialdus vir doctiſſimus & Latinitate donatum elegantibus notis illuſtrauit; ſed non omnibus illud mendis purgaſſe videtur, vt aliquot, ni fallor, exemplis quæ ſequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis vbi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit, locum illum exſcribere non piget, ipſa enim ſeries emẽdationis procul dubio neceſſitatem, & veritatem oſtendet, τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ στοιχειώδεις καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται &c. & inferius, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων ὅτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ aſteriſcus in margine reſpõdet cum voce διαιρεταὶ, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαίρετοι loco τῶν διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαίρετοι, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν legendum præterea φθόγγων ὅτινες πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαίρετοι, & hæc quoque lectio confirmatur verbis eiuſdem Bryennii lib. 1. cap. 3. vbi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τῶν ἀριθμῶν, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & inſtans ſunt ἀδιαίρετα & conſequenter φθόγγος ἀδιαίρετος non diuidendi vim habens, vt vult interpres Latinus, nec immerito Bacchius Senior in introductione artis muſicæ quæſtioni illi τί ὄν ἐστιν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, reſpondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, ſed etiam ἄτομον eſſe docet antiquæ muſicæ celeberrimus auctor Ariſtides Quintilianus lib. 1. de Muſicâ, atque ita authoritas æque ac ratio ſuffragatur huic emendationi, quæ fit vnius tantum litteræ mutatione; minimâ quòque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, vbi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικούς, legendum ſcilicet, φασὶ, vt apud Bryennium λέγουσι; paulo inferius vbi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βαρείας δὲ βαρύς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμα δὲ μικρὸς, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennij authoritate confirmatur.

Hactenus de ſono de quo agitur in cap. illo 6. in cap. vero 8. agitur de ſemitonio, & ita vulgo legitur καὶ καὶ τὸ ἡμίφωνον γράμμα οὐκ ὡς ἥμισυ φωνῆς καλοῦμεν ἀλλ' ὡς μὴ ταὐτοτονεῖ καὶ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὸ non καὶ, legendum præterea, ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτονῶ καθ' αὐτὸ φωνὴν ἀποτονῶ, quæ lectio eiuſdem Bryennij authoritate nixa veriorem vulgatâ ſenſum efficit.

Atque harum probatio lectionum deſumi poteſt, ἐκ τῶν κοινῶν τοῖς μουσικοῖς ὑποτιθεμένων καὶ ἐκ τῶν κοινῶν τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανομένων, vt Porphyrii verbis vtar quæ in commentariis clariſſimi interpretis referuntur pag. 276. ſed non ſine mendo, male enim ibi legitur, ἐκ τῶν ὑπὸ τῆς μουσῆς ὑποτιθεμένων.

VIRO CLARISSIMO D. DE RANCHIN. P. Fermat S. P. D.

POlyænum tibi tuum, Vir Clariſſime, mitto, ſed obſeruanda in eo quædam ſuppeditat codex manuſcriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hactenus ineditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum & monitorum militarium inueni ſub nomine παρεμβολῶν, cuius auctorem licet manuſcriptus non detegat, colligo tamen ex gloſſario Græcobarbaro Meurſii, eum eſſe Heronem, non illum quidem Alexandrinum cuius ſpiritalia & alia quædam opuſcula extant, & qui antiquo, hoc eſt, optimo æuo, Græcè ſcripſit, ſed alium poſterioris æui, quod pleraque ipſius vocabula Græcobarbara ſatis innuunt; vtrumque, ætatem nempe & nomen auctoris confirmat Meurſius in voce κοντυβέρνιον vbi citantur ſequentia Heronis verba in παρεμβολαῖς, ἀπίσειλι γῶν τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντυβέρνια, hæc enim verba cum in meo manuſcripto deſint, ſupplendum in eo nomen auctoris ex manuſcripto Meurſii; tempus vero quo hæc ſcribebantur & quo voces ἄπληκτον & κοντυβέρνιον in vſu erant, vltra ſeptingentos plus minùs annos non videtur excurrere; in hoc autem παρεμβολῶν tractatu, pleraque Polyæni ſtratagemata ſuppreſſo authoris nomine aliis ſæpe verbis referuntur, quandoque & iiſdem, vnde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel ſi mauis doctis omnibus tuo nomine iure repreſentationis libenter exhibeo.

Cleomenis ſtratagema narratur libro 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæſianæ ſequentibus verbis, Κλεομένης Λακεδαιμονίων βασιλεὺς, Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεστρατοπέδευσεν, ἦν τοῖς Ἀργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος ἐσήμαινε τῇ στρατιᾷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾶν ἐπαίδαζον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεξίεσαν, ἀναπαυομένων ἀντανεπαύοντο, Κλεομένης λάθρα παρήγγειλε ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ ὁπλίσασθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἄδειπνον ἐτράποντο, Κλεομένης ὡπλισμένους ἐπαγαγὼν ἀμαρδὸν ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Ἀργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco poſt verba ἐξιόντων ἀντεξίεσαν, addendum ex manuſcripto ἀειτώντων ἠρίστων, quod finis ipſius ſtratagematis pleniſſimè confirmat.

Themiſtoclis ſtratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θεμιστοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐκέλευσε τοῖς Ἕλλησι καταγράφειν ἐπὶ τῶ τείχους, Ἄνδρες Ἴωνες ἃ δίκαια πείθει στρατεύοντες ὅτι τοὺς πατέρας, τέκνα ἀναγκαζομένων βασιλεὺς ὑπόπτους αὐτοὺς ἐποίησατο, corrigendum ex manuſcripto ἐλογίσατο, quam eſſe veram lectionem innuit ſenſus.

Ageſilai ſtratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Ἀγησίλαος, aitille, ἐν κορωνείᾳ Ἀθηναίους ἐνίκησεν, ἤγγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Ἀθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς οἷ κἀβούλοιντο ἀπιέναι. ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναίους reponendum ex manuſcripto Θηβαίους.

Aliud Ageſilai ſtratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγησίλαος ἐν ταῖς διαφορεσβείαις ἤξίου τοὺς πολεμίους τοὺς μάλιστα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξεται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων. τοῦτο ἐπὶ πλεῖον συγχεόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑστίας καὶ αὐονδῶν, ταῖς πόλεσι τάραν ἐνεποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας, Vulteius hoc modo interpretatur, Ageſilaus in legationibus petebat ab hoſtibus vt maxime potentes ad ſe mitterent; cum quibus de communi vtilitate ſermones conferret, cum his plurimum habens conſuetudinis, & communicans focum ac cineres, ſeditiones in vrbibus excitabat propter vulgi ſuſpiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod eſt in textu Græco

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, &, audacter dicam, certissima alterius loci eiusdem Theonis emendatio pagina 164. vbi de oratorio loquitur, refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradit Euander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Ὀσιρὶς θεοῖς ἀθανάτοις, πνεύματι καὶ ἀέρι καὶ ἡλίῳ καὶ σελήνῃ καὶ γῇ καὶ νυκτὶ καὶ πάτρῃ τ' ὄντων καὶ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτῆς ἀρετῆς βίου συντάξεως, id est, vt vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & Terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ eius, mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita paruâ vnius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amori sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cuius velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in conuiuio καὶ μὲν δὴ τήν γε τῶν ζώων πᾶσιν πάντων τὴν ἐναντιώσεται μὴ οὐκ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ἢ γένεσιν καὶ φύσιν πάντα τὰ ζῶα, etenim animalium omnium effectionem, vt vertit Serranus, ex amoris sapientiâ existere, idest gigni atque nasci ecquis negauerit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur visitque exortum lumina Solis.

His emendationibus vnam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diuersitate ætatum Phantasiæ, ὧδε δὲ τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὐκρατος καὶ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτάτοις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσι κατακορὲς, καὶ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἰσχνοῖς, id est vt vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aer senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, alijs quidem depressa esse videtur, alijs vero alta; at huius loci elegantior sensus erit si legatur non βρῶμα sed χρῶμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hic foret sermo, præterea τὸ ἀμαυρὸν melius colori conuenit quam cibo, & æque de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορὲς, sic apud Virgilium legimus, saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem vrbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de deprauatis Alcibiadis moribus, qui locus si vulgatam lectionem retineas ipso forsan Alcibiade deprauatior erit, Athenæi verba hæc sunt Λυσίας δὲ ὁ ῥήτωρ φησὶ τὰς τροφὰς αὐτῷ λίχνους εἶναι, ἐπλεύσαντος γὰρ κοινῇ Ἀξιόχου καὶ Ἀλκιβιάδου εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημεν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντίδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνωκείπην, ἵνα τὰ αὐτῷ γένηται θυγάτηρ ἣν ἐκ ἔφαντο δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δὲ ἦν ἀνδρὸς ὡραῖα ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ, καὶ εἰ μὲν χρῶτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης Ἀξιόχου ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δὲ Ἀξίοχος Ἀλκιβιάδου, error hic procul dubio in voce illa ξυνωκείπην & legendum ξυνωκείσην hoc est concubuerunt, atque ita si falsa Xynoceipe deleatur, & sola supersit illa duobus nupta Medontias, portentosæ istorum iuuenum libidinis nouitati nihil detrahetur; veritas autem istius emendationis satis per se patet, & ex ipsâ loci serie elici potest, in quo illud δύο ὄντε alioqui superuacaneum foret, nec iam amplius ambigua proles; ratio igitur illius correctionis in promptu est, cui eiusdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδόντιδος γὰρ τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἐρασθεὶς καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιόχῳ ὃς ἦν αὐτῷ τῆς ὥρας ἐραστὴς, ὡς φησὶ Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτὸν λόγῳ, καὶ τούτου ἐνεπόησεν αὐτῷ, id est vt interpretatur Dalechampius, Medontidem Abydenam auditione tantum ille amare cœpit, & imprimis charam habuit, eam tamen cum Hellespontum nauibus

adiisset, Axiocho nauigationis comiti, & pulchritudinis ipsius amatori, vt inquit Lysias in oratione quam contra eum scripsit, vtendam dedit, ibi autem fictitiæ Xynocepes nulla mentio, & illud ἰκονόμουν æque ac ξυναχεῖσθαι communes Alcibiadis,& Axiochi amores fuisse satis arguit.

Sed ab istorum iuuenum voluptate oculos auertamus, & eam quæ ex studiorum societate percipitur, puriorem & diuturniorem, summumque aduersorum solatium litteras esse fateamur; cum tu his mirum in modum oblecteris, non iniucundas tibi fore confido obseruationes in quibus amici manum agnosces; ipsius ego lucubrationum sparsas variis in locis reliquias e tenebris quibus illas parentis modestia abdiderat, eruere conatus sum, neque hæc contemnenda duxi, vt ex hoc spicilegio rerum quæ perspicacissimos, vt ita loquar, messores latuerunt, pateat, quantam earum auctor in liberiori & coniecturis aperto critices campo segetem fuerit collecturus si sæpius in illo spatiari voluisset: Vale & me ama.

BIBLIOTHEQUE PUBLIQUE DE LA VILLE LYON

Digitized by Goo

Digitized by Google